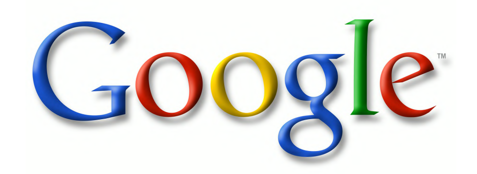


Archiv
für
Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

herausgegeben

von

Professor Dr.-Ing. **W. Rogowski**
Aachen

IX. Band

Mit zahlreichen Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1921



Namenverzeichnis.

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 1. Heft. 1920.

Kritische Frequenz und Eigenfrequenzen einlagiger Spulen.

Eine experimentelle Untersuchung.

Von

A. Gothe.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

I. Geschichtliche Übersicht und Ziel der Arbeit.

Eine Spule ist, streng genommen, als ein elektrisches Gebilde mit verteilter Induktivität und Kapazität anzusehen[1]).

Leitet man Wechselstrom sehr langsamer Frequenz durch eine Spule, so tritt die Kapazitätswirkung zurück, und die Spule verhält sich dann wie eine „konzentrierte" Selbstinduktion. Steigert man die Frequenz auf mittlere Höhe, so muß auch die Eigenkapazität der Spule berücksichtigt werden. In diesem Frequenzbereich wird die Spule gewöhnlich als eine „konzentrierte" Selbstinduktion mit parallel geschalteter „konzentrierter" Kapazität aufgefaßt[2]). Geht man zu noch höheren Frequenzen, bei denen die zugehörigen Wellenlängen mit der aufgewickelten Drahtlänge annähernd gleich groß oder noch kürzer werden, so gelangt man in einen Frequenzbereich, für den das Verhalten einer Spule bisher nicht befriedigend geklärt ist.

Gerade dieser Frequenzbereich ist aber wichtig für die drahtlose Telegraphie und für die Hochspannungstechnik. In der drahtlosen Telegraphie tritt jetzt, wo man durch Röhrensender Wechselstrom beliebig hoher Frequenz herstellen kann, nicht selten der Fall ein, daß die aufgewickelte Drahtlänge einer Spule mit der Wellenlänge der Schwingungen von gleicher Größenordnung ist oder sie sogar übertrifft. In der Starkstromtechnik führt man Überspannungserscheinungen bei gewissen Einschaltvorgängen auf Eindringen hochfrequenter Wechselströme (Wanderwellen) in die Wicklungen der Verbrauchsapparate zurück[3,4,5,6]).

Es ist daher natürlich, daß man bereits mehrfach versucht hat, Klarheit über das Verhalten von Spulen bei sehr hohen Frequenzen zu gewinnen. Aus physikalischen Kreisen verdanken wir wertvolle Beiträge Seibt[7]), Drude[8]) und Lenz[9]). In technischen Kreisen haben sich Rüdenberg[3]), Wagner[5]), Böhm[4]) und Rogowski[6]) mit dieser Frage beschäftigt. Vergleicht man die Ergebnisse dieser Arbeiten miteinander, so findet man leider keine einheitliche Auffassung. Vielmehr stehen die Ergebnisse von Lenz und Rogowski denen von Wagner, Böhm und

[1]) Vom Ohmschen Widerstand wird hier und im allgemeinen auch später abgesehen.
[2]) M. Wien, Wied. Ann. 44. S. 692. 1891.
Orlich, Kapazität und Induktivität. S. 186. 1909.
Rogowski, Archiv f. Elektrotechn. VII. S. 24. 1918.
[3]) Rüdenberg, E. und M., 1914. S. 731.
[4]) Böhm, Archiv f. Elektrotechn. V. S. 408. 1916.
[5]) Wagner, Archiv f. Elektrotechn. VI. S. 301. 1917.
[6]) Rogowski, Archiv f. Elektrotechn. VII. S. 17 und 240. 1918.
[7]) Seibt, ETZ. 1903. S. 105.
[8]) Drude, Ann. d. Physik 9. S. 293. 1902.
[9]) Lenz, Ann. d. Physik 43. S. 749. 1914. — Ein Auszug daraus befindet sich bei Rogowski, Archiv. f. Elektrotechn. VII. S. 248. 1918.

Rüdenberg gegenüber. Die mehr experimentellen Arbeiten von Seibt und Drude bringen nicht genügendes Material, um endgültig für die eine oder andere Auffassung entscheiden zu können.

Rüdenberg[1]), Böhm[2]) und Wagner[3]) fassen eine Spule als einen Kettenleiter auf[4]), wie er in Bild 1 dargestellt ist. Darin bedeutet L die Selbstinduktion jeder einzelnen Windung (aus dem gesamten magnetischen Felde der Spule definiert), M die gegenseitige Induktion zweier benachbarter Windungen, C die Kapazität jeder einzelnen Windung gegen Erde und K die Kapazität zwischen zwei unmittelbar benachbarten Windungen. Die Verkettung beschränkt sich, abgesehen von der Erdkapazität, nur auf benachbarte Windungen. Die Gegeninduktivität M ist stets sehr klein gegen L, sodaß ihre Vernachlässigung im allgemeinen von geringem Einfluß ist [Wagner[5]), der Grenzfall M = o].

Doch ist es bisher eine offene Frage, ob das Ersatzschema (Kettenleiter) das Verhalten einer Spule richtig darstellen kann. Hierüber kann nur ein Vergleich der Folgerungen seiner Theorie mit der Wirklichkeit Aufschluß geben. Solche Folgerungen sind: Jede Spule mit erheblicher Erdkapazität hat eine Reihe von Eigenschwingungen. Sie streben einer oberen Grenze, der „kritischen Frequenz" zu, die nach dem Ersatzschema im wesentlichen durch L und K bestimmt ist.

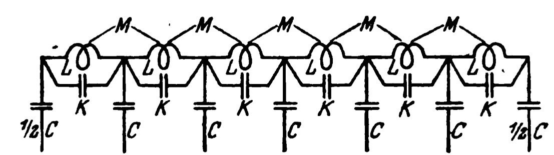
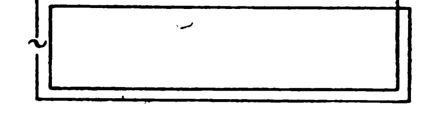


Bild 1. Ersatzschema einer Spule nach Wagner.


Bild 2. Spule aus zwei Windungen nach Rogowski.

$$\omega_{krit} = \frac{1}{\sqrt{LK - MC}} \quad ^{6)}$$

und mit guter Annäherung

$$\omega_{krit} = \frac{1}{\sqrt{LK}} \qquad 1)$$

Je kleiner die Erdkapazität der Spule ist, desto mehr häufen sich die Eigenfrequenzen in der Nähe der kritischen, so daß die Spule im Grenzfall vernachlässigbarer Erdkapazität nur eine einzige Eigenschwingung besitzt, die mit der kritischen Frequenz übereinstimmt. Wir werden also später zu prüfen haben, ob bei einer Spule oberhalb der durch die Formel 1) bestimmten kritischen Frequenz noch Eigenschwingungen vorhanden sind oder nicht.

Trifft ein Wechselstrom von der kritischen Frequenz auf eine Spule, so ist aus dem Ersatzschema leicht abzuleiten, was erfolgt. Der Scheinwiderstand eines aus Windungsinduktivität L und Windungskapazität K gebildeten Schwingungskreises wird bei der kritischen Frequenz durch Resonanz unendlich groß. Die gesamte

---

[1]) Rüdenberg, E. und M., 1914. S. 731.
[2]) Böhm, Archiv f. Elektrotechn. V. S. 408 1916.
[3]) Wagner, Archiv f. Elektrotechn. VI. S. 301. 1917.
[4]) Für Böhm stimmt das zwar nicht völlig, da bei ihm die Induktivität und Kapazität der Spule nicht an einzelnen Stellen konzentriert, sondern auf dem Spulendraht gleichmäßig verteilt gedacht und in die Rechnung eingeführt wird. Doch berücksichtigt Böhm ebenso wie Rüdenberg und Wagner nur die elektrische und magnetische Verkettung benachbarter Windungen. Seine Ergebnisse weichen daher nicht wesentlich von denen Wagners ab. Infolgedessen wird von mir der Ansatz Böhms im folgenden als nicht wesentlich verschieden von dem Wagners aufgefaßt. Unterschiede in der Böhmschen und Wagnerschen Rechnung machen sich erst oberhalb der kritischen Frequenz bemerkbar.
[5]) Wagner, Archiv f. Elektr. VI. S. 314. 1917.
[6]) Daselbst S. 310.

Spannung legt sich also auf die erste Windung, sodaß diese einer großen Überspannung ausgesetzt ist.

Zweifel an der Gültigkeit des Wagnerschen Ersatzschemas sind dadurch entstanden, daß Rogowski das Spulenproblem von einer anderen Seite angefaßt hat und zu erheblich anderen Ergebnissen gekommen ist. Rogowski[1]) hat die Eigenschaften einer Spule aus zwei Windungen entwickelt, indem er sie als zwei ineinander geschachtelte Doppelleitungen mit geeigneten Querverbindungen aufgefaßt hat (Bild 2). Die Erdkapazität ist hier vernachlässigt. Durch Verfolgen der Vorgänge in den Leitungen mit Hilfe der erweiterten Telegraphengleichung hat Rogowski eine Grundschwingung und unendlich viele Oberschwingungen gefunden. Seine Rechnung ergibt zwei Gruppen von Eigenschwingungen, die ein verschiedenes physikalisches Verhalten zeigen. Bei Eigenfrequenzen „erster Art"[2]) gerät eine Spule mit einer auf ihre Enden wirkenden Wechselstrommaschine von gleicher Periodenzahl in Stromresonanz. Die dadurch in der Spule auftretenden Spannungen können die der Maschine nicht übersteigen. Stimmt die Frequenz der Maschine mit einer Eigenfrequenz „zweiter Art" überein, so tritt Spannungsresonanz ein, wodurch erhebliche Spannungserhöhungen in der Spule hervorgerufen werden können. Durch Erweiterung seiner Theorie für 3, 4 und schließlich für viele Windungen findet Rogowski, daß bei allen Spulen analoge Verhältnisse bestehen.

Zu ganz ähnlichen Ergebnissen kommt Lenz[3]). Während Rogowski hauptsächlich Spulen mit geringer Windungszahl behandelt, berechnet Lenz Spulen mit sehr (unendlich) vielen Windungen. Die Erdkapazität vernachlässigt er ebenfalls. Auch er findet eine Grundschwingung und unendlich viele Oberschwingungen. Seine Rechnung liefert rein mathematisch zwei Gruppen von Eigenschwingungen, die Rogowski als Eigenschwingungen „erster und zweiter Art" deutet. Für die Grundschwingungen und in einzelnen Fällen auch für die 1. Oberschwingung kann Lenz seine Ergebnisse mit Messungen von Drude[4]) vergleichen und findet gute Übereinstimmung.

Rogowski hat versucht, seine eigenen Ergebnisse mit denen Wagners und Böhms zu vergleichen, und ist zu dem Schluß gekommen, daß die kritische Frequenz bei Wagner und Böhm mit seiner Grundschwingung übereinstimmen muß. Unvereinbar bleibt aber, daß Rogowski oberhalb der Grundschwingung noch ein ganzes Spektrum von Eigenschwingungen findet, während nach Wagner und Böhm das ganze Eigenspektrum bei vernachlässigbarer Erdkapazität auf den Bereich der kritischen Frequenz zusammengedrängt wird und im Grenzfall vollkommen in sie hineinfällt.

Durch einen Vergleich der Ansätze von Wagner, Böhm, Lenz und Rogowski zeigt der Letzte[5]), daß der Hauptunterschied wahrscheinlich in dem Grad der angenommenen magnetischen und elektrischen Verkettung zwischen den Windungen einer Spule liegt. Wagner stellt nur den Einfluß benachbarter Windungen in Rechnung, während Lenz und Rogowski auch weiter entfernt liegende berücksichtigen. Man kann somit der Ansicht sein, daß die Unterschiede der beiden Theorien schwinden, wenn man das Wagnersche Ersatzschema reicher mit Verkettungen ausstattet.

Bei diesem Stande des Spulenproblems bedürfen folgende Fragen dringend der Klärung:

[1]) Rogowski, Archiv f. Elektr. VII. S. 17 und 240. 1918.

[2]) Um Verwechslungen zu vermeiden, werden die Eigenschwingungen mit Lenz folgendermaßen beziffert: λ_1 Grundschwingung, λ_2 erste Oberschwingung, λ_3 zweite Oberschwingung usw. Es sind dann λ_1, λ_3, λ_5 ... Eigenschwingungen erster Art, λ_2, λ_4, λ_6 ... Eigenschwingungen zweiter Art.

[3]) Lenz, Ann. d. Phsik. 43. S. 749. 1914.

[4]) Drude, Ann. d. Physik. 9. S. 293. 1902.

[5]) Rogowski, Archiv. f. Elektr. VII. S. 257. 1918.

1. Wieweit ist das Rüdenberg-Wagnersche Ersatzschema und die Böhmsche Rechnung auf Spulen mit vernachlässigbarer Erdkapazität anwendbar?

2. Stimmt es für Spulen mit erheblicher Erdkapazität?

3. Geben die Theorien von Rogowski und Lenz das Verhalten von Spulen ohne Erdkapazität richtig wieder, und wenn ja, wieweit sind sie auf Spulen mit Erdkapazität zu übertragen?

4. Mit welcher Genauigkeit kann man nach den Lenzschen Formeln für kurze Spulen die Eigenschwingungen berechnen?

Auf diese Fragen gibt die folgende experimentelle Untersuchung für einlagige Spulen, wie ich glaube, eine sichere Antwort.

II. Gedrängte Übersicht über die Ergebnisse.

Für den Fall vernachlässigbarer Erdkapazität wurde durch den Versuch bei sämtlichen Spulen, so verschieden ihre Form auch gewählt wurde, eine Grundschwingung und eine große Zahl Oberschwingungen gefunden. An einer Spule sind bis zu 30 Eigenschwingungen gemessen worden. Sie streben bei allen Spulen einem harmonischen Verhältnis zu. Eine obere Grenze oder eine Häufung, wie sie beim Vorhandensein einer kritischen Frequenz hätte auftreten müssen (vgl. oben), habe ich nicht finden können. Immer lagen die Eigenschwingungen so, wie es nach den Rechnungen von Rogowski und Lenz zu erwarten war.

Die von Rogowski eingeführten Eigenschwingungen erster und zweiter Art ließen sich deutlich unterscheiden. Bei den Schwingungen erster Art lag jedesmal in der Spulenmitte ein Strombauch und zwischen den Spulenenden eine große Spannung. Denn durch einen Draht, der mit dem einen Spulenende verbunden war, ließen sich Fünkchen aus dem anderen Spulenende ziehen. Durch Kurzschließen der Spulenenden verschwanden die Schwingungen erster Art; nur hohe Oberschwingungen blieben nach Kurzschluß der Spulenenden schwach bestehen.

Bei den Schwingungen zweiter Art lag dagegen ein Stromknoten in der Spulenmitte. Zwischen den Spulenenden war offenbar keine Spannung vorhanden; denn beim Kurzschließen der Spule blieben die Schwingungen nach Wellenlänge und Amplitude unverändert bestehen[1]). Nur bei langen Spulen mit großem Windungsabstand zeigten die längsten Eigenschwingungen zweiter Art nach Kurzschließen der Spulenenden eine kleine Vergrößerung.

Aus meinen Versuchen dürfte daher hervorgehen, daß das Verhalten einer einlagigen Spule ohne Erdkapazität besser durch die Theorien von Rogowski und Lenz als durch den Kettenleiter von Wagner dargestellt wird.

Um zu prüfen, ob vielleicht das Rüdenberg-Wagnersche Ersatzschema die Erscheinungen bei einer Spule mit erheblicher Erdkapazität richtig wiedergibt, wurde ein großer, geerdeter Kupferblechzylinder in die Spule gebracht und wieder das Spektrum beobachtet. Qualitativ blieben sämtliche Eigenschwingungen der Spule vollständig erhalten, nur Wellenlänge und Dämpfung der Eigenschwingungen wurden größer. Bei der Grundschwingung waren die Änderungen sehr stark, bei der ersten Oberschwingung schon wesentlich geringer, und bei höheren Oberschwingungen nahmen sie immer mehr ab. Ähnliche Wirkungen rief in die Spule gebrachtes Eisen hervor. In keinem Falle ließ sich eine obere Grenze oder Häufung der Eigenschwingungen, also auch keine kritische Frequenz nachweisen. Es muß danach als erwiesen angesehen werden, daß der Kettenleiter als Ersatzschema auch für eine Spule mit Erdkapazität nicht genügt. Aus den Messungen folgt vielmehr, daß bei Spulen mit großer Erdkapazität, den großen Zügen nach, das Frequenzspektrum dasselbe ist, wie es von Rogowski und Lenz für Spulen ohne Erdkapazität berechnet worden ist.

[1]) Von Rogowski vorhergesagt, vgl. Archiv VII, S. 257.



Durch weitere Messungen wurde festgestellt, daß das Verhalten einlagiger Spulen bei hohen Oberschwingungen praktisch nur von der aufgewickelten Drahtlänge abhängt. Form der Spule, Windungsabstand, Art der Schwingungserregung, geringe Erdkapazität, parallel zur Spule geschaltete oder einseitig angehängte Kondensatoren rufen nur kleine Änderungen hervor. Physikalisch kommt dies Ergebnis ja nicht unerwartet. Die Felder der einzelnen Spulenteile heben sich, namentlich bei hohen Oberschwingungen, so weit auf, daß die Spule bereits sehr viel von ihrem Charakter als Spule verloren und die Eigenschaften eines geraden Drahtes angenommen hat.

Für kurze, weite Spulen hat Lenz[1]) eine Formel angegeben, die allein aus der Länge des aufgewickelten Drahtes die Wellenlänge der Oberschwingungen zu berechnen gestattet. Ich habe die Rechnungen von Lenz gut bestätigt gefunden; im Mittel ergeben sie etwa 10 % zu kleine Werte gegenüber den Messungen.

Die vorliegenden Untersuchungen sind ausschließlich mit ungedämpften Schwingungen angestellt worden. Die gefundenen Ergebnisse gelten daher zunächst nur für ungedämpfte Schwingungen. Es ist aber zu erwarten, daß eine Spule bei Stoßanregung kein wesentlich anderes Verhalten zeigt.

III. Messungen.

1. Versuchsanordnung. Der Versuchsanordnung lag folgender Gedankengang zugrunde: Wird eine Spule von einem Röhrensender mit ungedämpften Wellen durch Resonanz zu einer Eigenschwingung angeregt, so fließen in der Spule starke Ströme, die in der Umgebung ein kräftiges magnetisches Wechselfeld hervorrufen. Tastet man dieses Wechselfeld mit einer Probespule ab, so erhält man zunächst ein Bild von dessen Verteilung und kann daraus rückwärts auf die Stromverteilung in der zu untersuchenden Spule schließen.

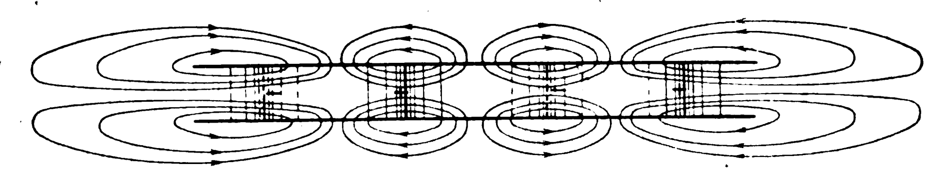


Bild. 3. Strom- und Feldverteilung auf der Spule.

Wenn die Spule unendlich lang wäre und unendlich viele Strombäuche hätte, so würde jeder Stelle eines Strombauches ein Feldmaximum der axialen Komponente und jeder Stelle eines Stromknotens ein Feldminimum entsprechen. Für eine wirk-

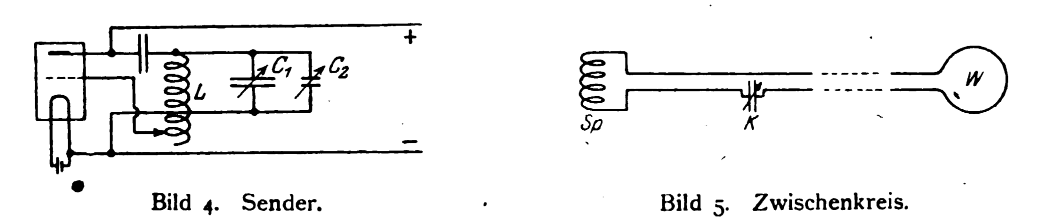


Bild 4. Sender. Bild 5. Zwischenkreis.

liche Spule trifft das an den Enden nicht mehr zu (Bild 3). Immerhin ist es möglich, durch Untersuchung des magnetischen Feldes die Zahl der Strombäuche auf der Spule festzustellen. Für den Hauptteil der Spule — etwa zwischen den äußersten Strombäuchen — erhält man auch ein richtiges Bild der Stromverteilung.

Der Röhrensender (Bild 4) hatte eine 10-Watt-Röhre von Telefunken, die mit 3 Amp. Heizstrom aus Akkumulatoren und 840 Volt Anodenspannung betrieben

[1]) Lenz, Ann. d. Physik. 43. S. 792. 1914.

wurde. Diese Spannung wurde durch Hintereinanderschalten des städtischen Netzes und einer Hochspannungsbatterie erreicht. Der Schwingungskreis bestand aus einer blanken Spule L und aus zwei parallelgeschalteten Drehkondensatoren, C_1 und C_2, von denen C_2 zur Feinabstimmung diente. Die Einzelteile hatte die Firma Telefunken

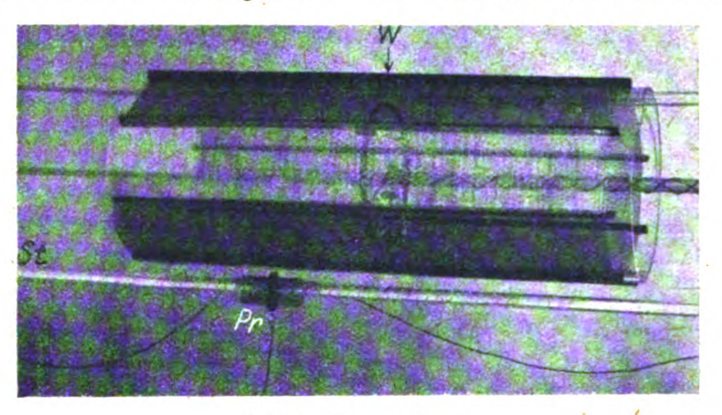


Bild 6. Lange Spule.

in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt. Der Wellenbereich des Senders ging von 30 bis 500 m. Oberwellen ließen sich im Schwingungskreis nicht nachweisen; jedenfalls hatten sie weniger als $^1/_{10}$ % der Energie der Grundwelle. Die

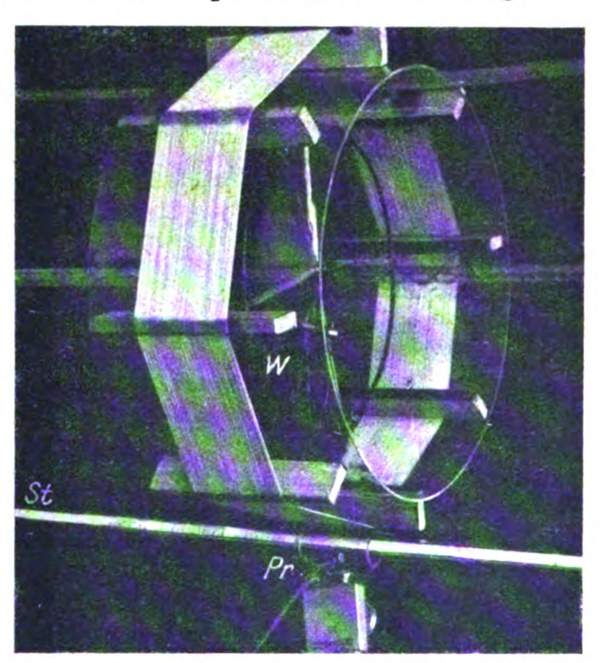


Bild 7. Kurze Spule.

Schaltung geht aus Bild 4 hervor. Für größere Wellen wurde ein Sender der Firma C. Lorenz benutzt, der prinzipiell ebenso gebaut war wie der beschriebene.

Zur Übertragung der Schwingungen des Senders auf die untersuchte Spule diente ein Zwischenkreis (Bild 5). Er bestand aus einer 10 cm weiten Spule (Sp) mit 37 Windungen in sechsfacher Unterteilung, einem Drehkondensator (K) (bis zu 2000 cm Kapazität) und 1 bis 3 Kopplungswindungen (W), die in der untersuchten Spule lagen (Bild 6 und 7). Spulen und Sender waren stets so weit voneinander

entfernt, daß keine unmittelbare Beeinflussung stattfand. Damit die Anregung der untersuchten Spule nur durch die Kopplungswindungen geschah, waren die Zuleitungen um einen Glasstab gedreht, der in der Spulenachse lag (Bild 6 und 7). Die Spule hing 1,50 m hoch vom Erdboden an einem Glasstab, um Erdkapazität möglichst auszuschalten.

An der Spule entlang, parallel zu ihrer Achse, konnte auf einem Glasstab (St) mit Millimeterteilung mittels eines Fadens die Probespule (Pr) gezogen werden. Sie bestand bei Messungen an langen Spulen aus einer Flachspule von 9 Windungen (Bild 6), deren größte 4,2 cm und deren kleinste 2,85 cm Durchmesser hatte; die Dicke der Flachspule betrug 0,6 mm. Ihre Enden führten über eine verdrillte Leitung zu einem empfindlichen Thermoelement. Für die übrigen Fälle wurde eine einzige Windung benutzt, die über einen Blockkondensator von 0,5 M F. und einen Detektor kurzgeschlossen war (Bild 7). Bei der ersten Probespule waren die Klemmen des Thermoelementes, bei der zweiten die Enden des Blockkondensators mit einem Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske verbunden, dessen Empfindlichkeit 10^{-8} Amp. betrug. Seine volle Schwingung dauerte 1,9 Sek., sodaß eine schnelle Einstellung des Anschlages erfolgte.

2. Schwierigkeiten. Bei den ersten Anwendungen der Meßanordnung stellten sich mehrere Schwierigkeiten heraus, die erst überwunden werden mußten, bevor einwandfreie Ergebnisse zu erzielen waren.

Im Sender (Bild 4) selbst wurde bei hohen Frequenzen ein Springen[1]) der Welle bei kontinuierlicher Veränderung des Drehkondensators (C_1) beobachtet. Dadurch wurde ein stetiges Überstreichen eines bestimmten Wellenbereiches sehr erschwert. Der Anlaß für das Springen war Resonanz zwischen Gitter- und Anodenkreis. Beseitigen ließ es sich nicht; denn es tritt bei allen festgekoppelten Systemen in der Nähe der Resonanz auf. Es blieb nichts anderes übrig, als durch mehrmalige Änderung der Spule im Schwingungskreis und der Rückkopplung das übersprungene Wellengebiet stückweise herzustellen.

Das Springen wiederholte sich bei fester Kopplung von Sender und Zwischenkreis. Nur bei sehr schwacher Rückwirkung ließen sich beide Schwingungskreise in Resonanz bringen. Dieser Fall war nicht verwendbar, weil er einen so schwachen Strom im Zwischenkreis zur Folge hatte, daß die zu untersuchende Spule nicht mehr in merkliche Schwingungen versetzt wurde. Ich half mir dadurch, daß ich fest koppelte, aber auf Resonanz verzichtete. Dann bildete sich im Zwischenkreis die erzwungene Schwingung des Senders aus, deren Energie im Zwischenkreis durch Änderung der Verstimmung gegen den Sender fast beliebig eingestellt werden konnte.

Die Kopplung des Zwischenkreises mit der zu untersuchenden Spule wurde stets so lose gehalten, daß keine Rückwirkung eintrat. Auch die Probespule (Pr in Bild 6 und 7) entnahm so geringe Energie, daß sie keinen Einfluß auf den Schwingungszustand der untersuchten Spule ausübte.

Noch eine andere unangenehme Nebenwirkung wurde in den gekoppelten Systemen beobachtet. Beabsichtigt war rein induktive Kopplung, stets trat aber auch kapazitive auf, die manchmal die erste sogar überwog.

Der Strom im Zwischenkreis wurde in ähnlicher Weise gemessen, wie es Rogowski und Lindemann[2]) angegeben haben. Um eine Leitung wurde eine Ringspule gelegt, die über ein Thermoelement zu einem Zeigergalvanometer führte (Bild 8 a). Legte man die Ringspule (R) um beide Leitungen (Bild 8 b), so hätte kein Ausschlag erfolgen dürfen; denn man sollte annehmen, daß Hin- und Rückstrom in beiden Leitungen gleich groß wären. Das Galvanometer zeigte aber trotzdem

[1]) M. Wien, Wied. Ann. 61. S. 151. 1897 und Salpeter, Jahrbuch f. drahtl. Telegr. 1919. Seite 385.

[2]) Lindemann, Jahrbuch f. drahtl. Telegr. 1917. S. 62. Archiv f. Elektr. I. S. 518. 1912.

Strom an, auch wenn die Spulen (Sp und W) des Zwischenkreises oder die Leitungen an beliebiger Stelle kurzgeschlossen wurden, selbst dann noch, wenn der ganze Zwischenkreis durch einen einfachen geraden Draht ersetzt wurde. Eine Unterbrechung des Drahtes durch einen Drehkondensator bewirkte eine Verkleinerung des Ausschlages, solange die Kapazität klein war. Bei etwa 500 cm Kapazität war das Maximum erreicht, wenn der Sender Wellen von 120 m Länge aussandte. Durch Abstimmen der Ringspule ließ sich zeigen, daß der Draht dieselben Schwingungen ausführte wie der Sender. Es handelte sich also um taktmäßiges Aufladen des dem Sender zugewandten Drahtendes gegen das abgewandte. Durch das Hin- und Herpendeln der Ladung auf dem Draht entstand in ihm ein Strom, der die Ringspule induzierte. Daß in der Ringspule (R) nur ein Induktionsstrom und kein Kapazitätsstrom floß, ließ sich durch Kurzschließen der Spule zeigen; dadurch verschwand der Ausschlag.

Im Zwischenkreis floß also ein Induktionsstrom in beiden Leitungen in entgegengesetzter Richtung und außerdem ein Kapazitätsstrom, der in beiden Leitungen gleiche Richtung hatte. Bei Wellenlängen über 200 m war der Kapazitätsstrom gering gegenüber dem Induktionsstrom (weniger als 2 %); bei kürzeren Wellen wurde das Verhältnis aber schnell ungünstiger. Das mußte verhindert werden, damit die untersuchte Spule nicht gleichzeitig kapazitiv und induktiv angeregt wurde. Durch Verringerung der Anodenspannung auf 400 Volt und Vergrößerung des Abstandes

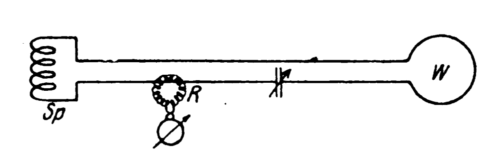


Bild 8a. Strommessung im Zwischenkreis.

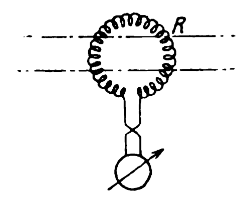


Bild 8b. Messung des Kapazitätstromes.

von Sender und Zwischenkreis wurde der Kapazitätsstrom herabgesetzt. Durch möglichst kleine Verstimmung beider Schwingungskreise gegeneinander ließ sich trotzdem der induzierte Strom im Zwischenkreis so groß machen, daß der Kapazitätsstrom dagegen verschwand.

In der zu untersuchenden Spule machten sich ebenfalls gleichzeitiger Induktions- und Kapazitätsstrom sehr störend bemerkbar. Bei langen Spulen bildeten sich die Eigenschwingungen nur verzerrt und verwaschen aus, weil sich die beiden Kopplungen zum Teil entgegen wirkten. Um zu prüfen, wie stark die kapazitive Kopplung war, wurde die induktive durch Kurzschließen der Kopplungswindungen (W in Bild 6 und 7) ausgeschaltet. Bei kurzen, weiten Spulen, deren Windungen sämtlich etwa die gleiche Entfernung von den Kopplungswindungen hatten, war es bei kurzen Wellen und Verwendung des Zwischenkreises überhaupt nicht möglich, überwiegend induktive Anregung zu erzielen. Die ganze Spule wurde einfach im Rhythmus des Senders geladen und entladen, Schwingungen bildeten sich fast nicht aus. In solchen Fällen wurden die Kopplungswindungen unmittelbar in den Schwingungskreis des Senders geschaltet; der Zwischenkreis wurde also ganz beseitigt. Dadurch war es möglich, mit geringer Anodenspannung und doch starkem Strom in den Kopplungswindungen zu arbeiten, so daß sich, wie vorher zwischen Sender und Zwischenkreis, die kapazitive Kopplung auf einen geringen Teil der induktiven herabdrücken ließ. Wichtig war jetzt nur genügend lose Kopplung zwischen Sender und der zu untersuchenden Spule, damit kein Springen der Welle (Ziehen) eintrat. Bei Wellenlängen unter 55 m ist es in keinem Falle gelungen, überwiegend induktive Anregung der Spule zu erzielen. Dagegen ließen sich mit einseitig kapazitiver Anregung beliebig kurze Eigenschwingungen herstellen.



Kapazitive Kopplung zwischen untersuchter Spule und Prüfkreis wurde dadurch unschädlich gemacht, daß Detektor und Blockkondensator unmittelbar an die Probespule angeschlossen wurden. Wenn die Probespule kurzgeschlossen wurde, so zeigte das Galvanometer niemals einen Ausschlag, auch nicht bei Verwendung eines Thermoelementes statt des Detektors.

Lange, weitgewickelte Spulen zeigten besonders bei der Grundschwingung große Empfindlichkeit gegen Erdkapazität. Nähern der Hand auf weniger als $^1/_2$ m rief manchmal schon Änderungen des Galvanometerausschlages hervor. Deshalb geschah die Feineinstellung des Senders sowie das Vorbeiziehen der Probespule durch Bindfäden aus mehr als 1 m Entfernung. Die Kopplungswindungen (W in Bild 6) mit ihren Zuleitungen bewirkten bei langen Spulen bereits eine geringe Kapazitätsvergrößerung, solange sie sich im Innern der Spule befanden. In solchen Fällen geschah die Anregung durch die Kopplungswindungen von außen her in einigen cm Abstand von der untersuchten Spule. Die Probespule (Pr) erzeugte bei 1 cm Entfernung niemals mehr eine Änderung; im allgemeinen konnte sie sogar bis auf 2 mm genähert werden.

3. Gang einer Messung. Die Untersuchung einer Spule begann mit der Messung der 1. Eigenschwingung (Grundwelle). Bei ihr liegt erfahrungsgemäß ein Strommaximum in der Spulenmitte; deshalb wurde die Probespule an diese Stelle gerückt. Die zu erwartende Wellenlänge ist in ganz roher Annäherung gleich der doppelten Drahtlänge der Spule. In diesem Bereich wurde die Senderwelle langsam und stetig geändert, bis der Galvanometerausschlag ein Maximum erreicht hatte. Dann waren Sender und Spule in Resonanz. Wenn die Spule nicht mit einer Eigenschwingung angeregt wurde, stand das Galvanometer meist genau auf Null. Um ein Bild von der Stromverteilung zu erhalten, wurde die Probespule an der ganzen Spule vorbeigezogen und die Galvanometerausschläge beobachtet. Sie sind proportional dem Quadrat des Stromes in der Probespule. Wenn die Verschiebungen der Probespule als Abszissen und die zugehörigen Galvanometerausschläge als Ordinaten aufgetragen wurden, so ergab sich eine Kurve, wie sie in Bild 9 schwarz ausgezogen dargestellt ist. Die Unsymmetrie rührt daher, daß die Induktion der von links kommenden Zuleitungen zu den Kopplungswindungen nicht ganz vermieden werden konnte. Die Größe der Eigenschwingung wurde mit einem von der Reichsanstalt geeichten Wellenmesser festgestellt. Die Dämpfung der Spule wurde nach der Bjerknesschen Resonanzmethode bestimmt.

Die Messung der übrigen Eigenschwingungen erfolgte in derselben Weise. Es war nur zu beachten, daß die Probespule ungefähr an eine Stelle gerückt wurde, an der ein Strommaximum zu erwarten war. Für sämtliche Eigenschwingungen 1. Art war das z. B. die Mitte der Spule; für die 1., 2. usw. Eigenschwingung 2. Art etwa $^1/_4$, $^1/_8$ usw. Spulenlänge von der Mitte oder einem Ende entfernt.

Höhere Eigenschwingungen ergeben beim Vorbeiziehen der Probespule mehrere maximale Galvanometerausschläge, die 8. Eigenschwingung (7. Oberwelle) z. B. 8 (Bild 10). Aus physikalischen Gründen muß die Stromrichtung in zwei benachbarten Strombäuchen entgegengesetzt sein. Um ein richtiges Bild der Stromverteilung auf der Spule zu bekommen, müssen deshalb die Galvanometerausschläge für einen Strombauch positiv, für den nächsten negativ, für den dritten wieder positiv usw. aufgetragen werden. Etwa von den äußersten Strombäuchen bis zu den Enden geben die Kurven die Stromverteilung nicht richtig wieder (siehe Versuchsanordnung).

4. Eigenschwingungen von Spulen ohne Erdkapazität. Die Messungen wurden zunächst an zwei Spulen ausgeführt, von denen die eine lang und die andere kurz im Verhältnis zum Durchmesser war. Später wurden noch sehr lange, mittlere und sehr kurze Formen untersucht.



An den Spulen wurden die Eigenschwingungen (λ) und die Dämpfungen ($\mathfrak{d}$) bei induktiver, kapazitiver und galvanischer Kopplung gemessen. Außerdem wurde der Einfluß von Kapazitäten untersucht, die an die Spulenenden gehängt wurden.

Die induktive Anregung ist eingehend besprochen worden (siehe oben). Die kapazitive geschah dadurch, daß an ein Spulenende ein 1,50 m (in Einzelfällen 3,00 m) langer Draht gehängt wurde, dessen freies Ende bis auf etwa 2 cm an den Sender reichte. Durch periodisches Laden und Entladen des Drahtendes geriet die Spule in Schwingungen. Die galvanische [Seibt[1])] Anregung unterschied sich von der kapazitiven nur dadurch, daß das 1,50 m lange Drahtende mit einer Kondensatorbelegung des Senders verbunden war. Diese Kopplung war so fest, daß bei der Grundschwingung (λ_1) Ziehen eintrat.

Die Maße der langen Spule (Bild 6) waren:

Gesamte Drahtlänge	$L = 359$ m	Spulenlänge	$2l = 46{,}8$ cm
Windungszahl	$N = 580$	Ganghöhe	$g = 0{,}8$ mm
Länge einer Windung	$2\pi R = 62$ cm	Drahtdurchmesser	$2r = 0{,}3$ mm

Mittlerer Durchmesser der Spule $2R = 19{,}75$ cm.

Der Spulenkörper war ein Glaszylinder von 50 cm Länge, auf den 8 Hartgummileisten von 1 cm Höhe geklebt waren, sodaß die Wicklung, die aus blankem Kupferdraht bestand, außer an den 8 Auflagepunkten völlig in Luft lag. Auf diese Weise wurden dielektrische Einflüsse nach Möglichkeit vermieden.

Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle 1 zusammengestellt:

Tabelle 1.

	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung			Galvanische Anregung
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$	bei 3,00 m Drahtende λ	λ
λ_1	645	0,0145	740	0,015	792	920
λ_2	367	0,015	377	0,016	380	380
λ_3	256		264		266	265
λ_4	199		203		205	203
λ_5	162		162		164	162
λ_6	137,5		137		138	
λ_7	118		118		119	
λ_8	104	0,020	104		104	
λ_9	91	0,026	91		91	
λ_{10}	82		82		82	

Bei kapazitiver Anregung sind noch folgende Eigenschwingungen gemessen worden:

$\lambda_{11} = 74$ m, $\lambda_{12} = 68$ m, $\lambda_{13} = 63{,}5$ m, $\lambda_{14} = 59$ m, $\lambda_{15} = 55{,}5$ m,
$\lambda_{16} = 51{,}5$ m, $\lambda_{17} = 49$ m, $\lambda_{18} = 46{,}3$ m, $\lambda_{19} = 44{,}1$ m, $\lambda_{20} = 42$ m,
$\lambda_{21} = 40{,}2$ m, $\lambda_{22} = 39{,}1$ m, $\lambda_{23} = 37{,}8$ m, $\lambda_{24} = 36{,}6$ m, $\lambda_{25} = 35{,}3$ m,
$\lambda_{26} = 34$ m, $\lambda_{27} = 33{,}2$ m, $\lambda_{30} = 31$ m.

Über die Wirkung, die mit den Spulenenden verbundene Kondensatoren ausüben, wurde folgendes gefunden:

I. An ein Spulenende ist ein beliebiger Kondensator angeschlossen.

λ_1 wächst von 645 m auf 780 m,
λ_2 „ „ 367 m „ 422 m,
λ_9 „ „ 91 m „ 91,5 m,

[1]) Seibt, E. T. Z. 1903. S. 105.

II. Die freie Kondensatorbelegung ist geerdet.

Bei $\sim$ 50 cm Kapazität	Bei $\sim$ 1000 cm Kapazität
$\lambda_1 = 910$ m,	$\lambda_1 = 1080$ m,
$\lambda_2 = 433$ m,	$\lambda_2 = 440$ m,
$\lambda_9 = 92$ m,	$\lambda_9 = 92{,}5$ m.

III. Die Spule ist durch einen Kondensator kurzgeschlossen.



Bei 69,3 cm Kapazität	Bei $\sim$ 1000 cm Kapazität
$\lambda_1 = 2610$ m,	—
$\lambda_2 = 434$ m,	$\lambda_2 = 434$ m,
$\lambda_9 = 92{,}5$ m,	$\lambda_9 = 93$ m.

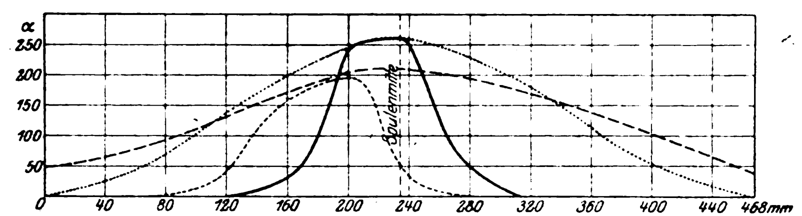


Bild 9. Stromverteilung auf der Spule bei λ.

——— Induktive Anregung,
- - - Kapizitive Anregung,
-·- - „ Anregung mit Erdkapazität,
······ Quadrierte Sinuskurve.

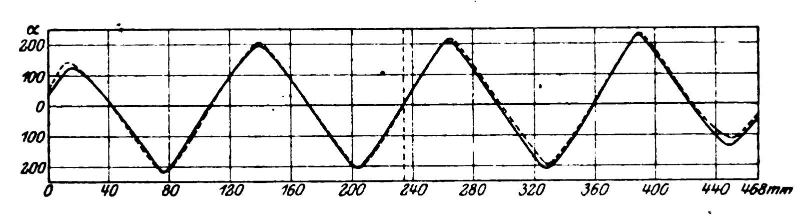


Bild 10. Stromverteilung bei λ_8.

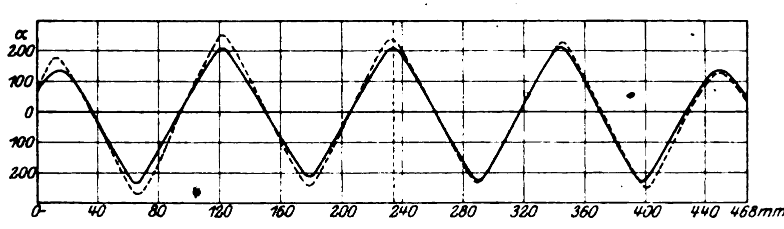


Bild 11. Stromverteilung bei λ_9.

IV. Die Spule ist durch einen Draht kurzgeschlossen.

λ_1 keine Schwingungen,
$\lambda_2 = 380$ m,
λ_3 keine Schwingungen,
$\lambda_4 = 203$ m,
$\lambda_9 = 91{,}5$ m.

Die Bilder 9—11 geben die Quadratwerte[1]) der Horizontalkomponente (parallel zur Spulenachse) des magnetischen Spulenfeldes wieder. Mit gewissen Einschränkungen[2]) läßt sich daraus ein Bild von der Stromverteilung auf der Spule gewinnen.

[1]) Die Quadratwerte entstehen wegen der Verwendung eines Detektors oder Thermoelementes im Prüfkreis.

[2]) Siehe Versuchsanordnung.

Für die Grundschwingung ist die Abweichung der Kurven in Bild 9 von der wirklichen Stromverteilung erheblich. Diese wird für den Fall vernachlässigbarer Erdkapazität etwa sinusförmig sein, müßte also als quadrierte Sinuskurve erscheinen (punktierte Linie). Bei den Bildern 10 und 11 beschränkt sich die Abweichung im wesentlichen auf die Teile zwischen den äußersten Strombäuchen und den Enden der Kurven. Die Verschiebung der Kurven nach links rührt daher, daß die Anregung stets von dieser Seite erfolgte.

Dieselben Untersuchungen wie an der langen Spule wurden an einer kurzen (Bild 7) ausgeführt. Die Meßergebnisse lassen sich hier unmittelbar mit der Rechnung von Lenz vergleichen.

Die Maße der Spule waren folgende:

$L = 201$ m, $2l = 7{,}45$ cm,
$N = 172$ $g = 0{,}433$ mm,
$2\pi R = 116{,}9$ cm, $2r = 0{,}25$ mm,
$2R = 37{,}25$ cm,

Der Spulenkörper bestand aus einem 19 cm langen Glaszylinder mit 8 aufgeklebten Holzleisten von 3 cm Höhe. Auf ihm war die Wicklung aus baumwollumsponnenem Kupferdraht angebracht. Um Veränderungen der Spule zu verhüten, wurde sie mit Schellacklösung bestrichen. Die Meßergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

	Berechnet nach Lenz	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung			Galvanische Anregung
						bei 3,00 m Drahtende	
	λ	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$	λ	λ
λ_1	723	766,5	0,037	835	0,039	860	948
λ_2	263	278	0,052	288,5	0,05	288,5	302
λ_3	165	173,5	—	176	—	176	176
λ_4	114	122	—	126	—	—	126
λ_5	90	96	—	97,5	—	—	—
λ_6	73	80,5	0,11	80,5	—	—	—
λ_7	58,5	69	0,09	69	—	—	—
λ_8	53	60,5	—	—	—	—	—
λ_9	47	49,5	—	—	—	—	—
λ_{10}	42	44,5	—	—	—	—	—

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung der nach Lenz berechneten Eigenschwingungen mit den gemessenen befriedigend. Noch besser würde sie voraussichtlich bei Spulen aus Profildraht anstatt Runddraht sein, weil dann die wirkliche Windungskapazität gut der von Lenz angenommenen entsprechen würde[1]).

An die Spulenenden angeschlossene Kondensatoren ergaben:

I. Mit einem Spulenende ist ein beliebiger Kondensator verbunden.

λ_1 wächst von 766,5 m auf 842 m,
λ_2 „ „ 278 m „ 291 m,
λ_3 „ „ 173,5 m „ 176 m.

II. Die freie Kondensatorbelegung ist geerdet.

Bei ∼ 50 cm Kapazität: $\lambda_1 = 905$ m, $\lambda_2 = 292$ m, $\lambda_3 = 177{,}5$ m,

Bei ∼ 1000 cm Kapazität: $\lambda_1 = 975$ m, $\lambda_2 = 296{,}5$ m, $\lambda_3 = 178{,}5$ m.

[1]) Vgl. Rogowski, Archiv VII. S. 253.

III. Die Spule ist über einen Kondensator kurzgeschlossen.

Bei 69,3 cm Kapazität	Bei $\sim$ 1000 cm Kapazität
$\lambda_1 = 2370$ m,	—
$\lambda_2 = 286$ m,	$\lambda_2 = 286$ m,
$\lambda_3 = 185$ m,	$\lambda_3 = 189{,}5$ m,

IV. Die Spule ist über einen Draht kurzgeschlossen.

λ_1 keine Schwingungen,
$\lambda_2 = 278$ m,
λ_3 keine Schwingungen,
$\lambda_4 = 126$ m.

In Bild 12 und 13 ist die Stromverteilung bei der 6. und 7. Eigenschwingung dargestellt. Es fällt auf, daß die Strombäuche hier verschieden groß sind im Gegensatz zur langen Spule.

Für die Spulen (Bild 6 und 7) ist die kritische Frequenz nach der Formel von Wagner $\omega_{krit} = \frac{1}{\sqrt{LK}}$ (s. Historische Übersicht) berechnet worden. L wurde bestimmt, indem die Größe der Gesamt-Selbstinduktion der Spule in der Brücke gemessen und durch die Windungszahl dividiert wurde. K wurde aus den Formeln für Doppelleitungen berechnet. Das L der langen Spule (Bild 6 und Tabelle 1) ergab sich zu $\frac{2{,}25 \cdot 10^7}{580} = 3{,}88 \cdot 10^4$ cm und $K = 18{,}6$ cm. Die daraus berechnete kritische Frequenz ist $\omega_{krit} = 3{,}53 \cdot 10^9$ und die zugehörige Wellenlänge $\lambda_{krit} = 53{,}2$ m.

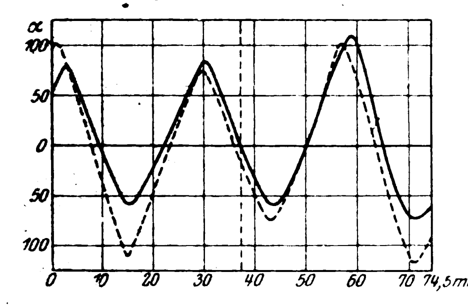


Bild 12. Stromverteilung bei λ_6.

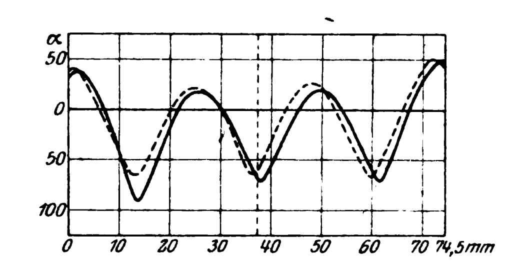


Bild 13. Stromverteilung bei λ_7.

Nach Tabelle 1 ist aber noch eine Eigenschwingung bei 31 m festgestellt worden. Für die kurze Spule (Bild 7 und Tabelle 2) ergab sich $L = \frac{1{,}66 \cdot 10^7}{172} = 9{,}65 \cdot 10^4$ cm, $K = 47{,}2$ cm, $\omega_{krit} = 1{,}4 \cdot 10^9$ und die zugehörige Wellenlänge $\lambda_{krit} = 134$ m, während nach Tabelle 2 noch eine Eigenschwingung bei 44,5 m gemessen worden ist. Es ist also an praktischen Beispielen nachgewiesen, daß eine kritische Frequenz, wie Wagner sie annimmt, nicht besteht.

Grundsätzliche Verschiedenheit zwischen dem Verhalten der kurzen Spule gegenüber dem der langen hat sich nicht gezeigt. Es ist daher anzunehmen, daß auch bei anderen einlagigen Spulen keine neuen Erscheinungen auftreten. Um eine weitere Bestätigung dieser Annahme zu erhalten, wurden noch einige Spulenformen untersucht. Dadurch wurden gleichzeitig die Unterlagen für die Kurven (Bild 14 und 15) gewonnen, aus denen sich die Größe der 1. bis 3. Eigenschwingung ermitteln läßt, wenn nur Drahtlänge und Form der Spule $\left(\frac{\text{Spulenlänge}}{\text{Spulendurchmesser}}\right)$ bekannt sind.

Sämtliche Spulen waren von gleicher Bauart. Die ungewöhnlich lange (Tabelle 3) war auf einen Pappzylinder mit 8 Holzleisten von 1 cm Höhe gewickelt, alle anderen

Für die Grundschwingung ist die Abweichung der Kurven in Bild 9 von der wirklichen Stromverteilung erheblich. Diese wird für den Fall vernachlässigbarer Erdkapazität etwa sinusförmig sein, müßte also als quadrierte Sinuskurve erscheinen (punktierte Linie). Bei den Bildern 10 und 11 beschränkt sich die Abweichung im wesentlichen auf die Teile zwischen den äußersten Strombäuchen und den Enden der Kurven. Die Verschiebung der Kurven nach links rührt daher, daß die Anregung stets von dieser Seite erfolgte.

Dieselben Untersuchungen wie an der langen Spule wurden an einer kurzen (Bild 7) ausgeführt. Die Meßergebnisse lassen sich hier unmittelbar mit der Rechnung von Lenz vergleichen.

Die Maße der Spule waren folgende:

$L = 201$ m, $2l = 7{,}45$ cm,
$N = 172$ $g = 0{,}433$ mm,
$2\pi R = 116{,}9$ cm, $2r = 0{,}25$ mm,
$2R = 37{,}25$ cm,

Der Spulenkörper bestand aus einem 19 cm langen Glaszylinder mit 8 aufgeklebten Holzleisten von 3 cm Höhe. Auf ihm war die Wicklung aus baumwollumsponnenem Kupferdraht angebracht. Um Veränderungen der Spule zu verhüten, wurde sie mit Schellacklösung bestrichen. Die Meßergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

	Berechnet nach Lenz	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung		bei 3,00 m Drahtende	Galvanische Anregung
	λ	λ	b	λ	b	λ	λ
λ_1	723	766,5	0,037	835	0,039	860	948
λ_2	263	278	0,052	288,5	0,05	288,5	302
λ_3	165	173,5	—	176	—	176	176
λ_4	114	122	—	126	—	—	126
λ_5	90	96	—	97,5	—	—	—
λ_6	73	80,5	0,11	80,5	—	—	—
λ_7	58,5	69	0,09	69	—	—	—
λ_8	53	60,5	—	—	—	—	—
λ_9	47	49,5	—	—	—	—	—
λ_{10}	42	44,5	—	—	—	—	—

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung der nach Lenz berechneten Eigenschwingungen mit den gemessenen befriedigend. Noch besser würde sie voraussichtlich bei Spulen aus Profildraht anstatt Runddraht sein, weil dann die wirkliche Windungskapazität gut der von Lenz angenommenen entsprechen würde[1]).

An die Spulenenden angeschlossene Kondensatoren ergaben:

I. Mit einem Spulenende ist ein beliebiger Kondensator verbunden.

λ_1 wächst von 766,5 m auf 842 m,
λ_2 „ „ 278 m „ 291 m,
λ_3 „ „ 173,5 m „ 176 m.

II. Die freie Kondensatorbelegung ist geerdet.

Bei ∼ 50 cm Kapazität
$\lambda_1 = 905$ m,
$\lambda_2 = 292$ m,
$\lambda_3 = 177{,}5$ m,

Bei ∼ 1000 cm Kapazität
$\lambda_1 = 975$ m,
$\lambda_2 = 296{,}5$ m,
$\lambda_3 = 178{,}5$ m.

[1]) Vgl. Rogowski, Archiv VII. S. 253.

III. Die Spule ist über einen Kondensator kurzgeschlossen.

Bei 69,3 cm Kapazität	Bei $\sim$ 1000 cm Kapazität
$\lambda_1 = 2370$ m,	—
$\lambda_2 = 286$ m,	$\lambda_2 = 286$ m,
$\lambda_3 = 185$ m,	$\lambda_3 = 189{,}5$ m,

IV. Die Spule ist über einen Draht kurzgeschlossen.

λ_1 keine Schwingungen,
$\lambda_2 = 278$ m,
λ_3 keine Schwingungen,
$\lambda_4 = 126$ m.

In Bild 12 und 13 ist die Stromverteilung bei der 6. und 7. Eigenschwingung dargestellt. Es fällt auf, daß die Strombäuche hier verschieden groß sind im Gegensatz zur langen Spule.

Für die Spulen (Bild 6 und 7) ist die kritische Frequenz nach der Formel von Wagner $\omega_{\text{krit}} = \frac{1}{\sqrt{LK}}$ (s. Historische Übersicht) berechnet worden. L wurde bestimmt, indem die Größe der Gesamt-Selbstinduktion der Spule in der Brücke gemessen und durch die Windungszahl dividiert wurde. K wurde aus den Formeln für Doppelleitungen berechnet. Das L der langen Spule (Bild 6 und Tabelle 1) ergab sich zu $\frac{2{,}25 \cdot 10^7}{580} = 3{,}88 \cdot 10^4$ cm und $K = 18{,}6$ cm. Die daraus berechnete kritische Frequenz ist $\omega_{\text{krit}} = 3{,}53 \cdot 10^9$ und die zugehörige Wellenlänge $\lambda_{\text{krit}} = 53{,}2$ m.

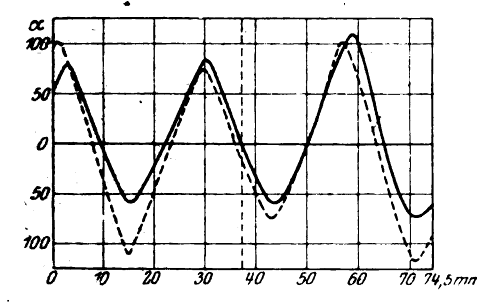


Bild 12. Stromverteilung bei λ_6.

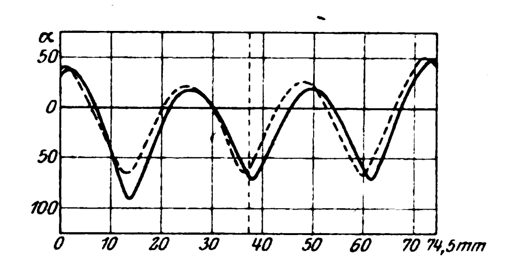


Bild 13. Stromverteilung bei λ_7.

Nach Tabelle 1 ist aber noch eine Eigenschwingung bei 31 m festgestellt worden. Für die kurze Spule (Bild 7 und Tabelle 2) ergab sich $L = \frac{1{,}66 \cdot 10^7}{172} = 9{,}65 \cdot 10^4$ cm, $K = 47{,}2$ cm, $\omega_{\text{krit}} = 1{,}4 \cdot 10^9$ und die zugehörige Wellenlänge $\lambda_{\text{krit}} = 134$ m, während nach Tabelle 2 noch eine Eigenschwingung bei 44,5 m gemessen worden ist. Es ist also an praktischen Beispielen nachgewiesen, daß eine kritische Frequenz, wie Wagner sie annimmt, nicht besteht.

Grundsätzliche Verschiedenheit zwischen dem Verhalten der kurzen Spule gegenüber dem der langen hat sich nicht gezeigt. Es ist daher anzunehmen, daß auch bei anderen einlagigen Spulen keine neuen Erscheinungen auftreten. Um eine weitere Bestätigung dieser Annahme zu erhalten, wurden noch einige Spulenformen untersucht. Dadurch wurden gleichzeitig die Unterlagen für die Kurven (Bild 14 und 15) gewonnen, aus denen sich die Größe der 1. bis 3. Eigenschwingung ermitteln läßt, wenn nur Drahtlänge und Form der Spule $\left(\frac{\text{Spulenlänge}}{\text{Spulendurchmesser}}\right)$ bekannt sind.

Sämtliche Spulen waren von gleicher Bauart. Die ungewöhnlich lange (Tabelle 3) war auf einen Pappzylinder mit 8 Holzleisten von 1 cm Höhe gewickelt, alle anderen

auf Glaszylinder[1]) von 50 oder 19 cm Länge mit Leisten von 1 oder 3 cm Höhe, ähnlich wie bei den in Abb. 5 und 6 dargestellten Spulen. Die Meßergebnisse sind in den Tabellen 3 bis 7 zusammengestellt.

Tabelle 3. $\frac{l}{R} = 7,3$ (sehr lang),

$L = 150,6$ m, $2l = 65$ cm,
$N = 538$, $g = 1,21$ mm,
$2\pi R = 28$ cm, $2r = 0,6$ mm,
$2R = 8,9$ cm.

	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	190	0,020	225	0,025
λ_2	112	0,026	114	—
λ_3	78	—	80	—
λ_4	64	—	65	—
λ_5	55	—	55,5	—
λ_6	49	—	49	—
λ_7	44	—	44	—

$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = 1,18$,
Nach Lenz 1,19.

Tabelle 4. $\frac{l}{R} = 1$,

$L = 198,6$ m, $2l = 18,7$ cm,
$N = 338$, $g = 0,554$ mm,
$2\pi R = 58,75$ cm, $2r = 0,5$ mm,
$2R = 18,7$ cm.

	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	531	0,012	580	0,011
λ_2	275,5	0,034	280	0,034
λ_3	181	—	184	—
λ_4	135	—	138	—
λ_5	105	—	107	—
λ_6	85,5	—	87	—
λ_7	73	—	74	—

$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = 1,04$,
Nach Lenz 1,07.

Tabelle 5. $\frac{l}{R} = 0,402$,

$L = 78,5$ m, $2l = 7,45$ cm,
$N = 134$, $g = 0,556$ mm,
$2\pi R = 58,8$ cm, $2r = 0,5$ mm,
$2R = 18,65$ cm.

	Nach Lenz berechnet	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung
	λ	λ	$\mathfrak{d}$	λ
λ_1	239	283	0,022	316
λ_2	102	122	0,051	128,5
λ_3	64	74,5	—	77
λ_4	44,5	54	—	56
λ_5	34,8	—	—	45
λ_6	28,4	—	—	38,7
λ_7	22,9	—	—	34,2

$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = 0,862$,
Nach Lenz 0,854.

Tabelle 6. $\frac{l}{R} = 0,201$,

$L = 156,1$ m, $2l = 7,52$ cm,
$N = 134$, $g = 0,561$ mm,
$2\pi R = 116,6$ cm, $2r = 0,5$ mm,
$2R = 37,1$ cm.

	Nach Lenz berechnet	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung
	λ	λ	$\mathfrak{d}$	λ
λ_1	560	614	0,024	667
λ_2	204	226	0,076	236,5
λ_3	128	142	—	142
λ_4	89	102	—	102
λ_5	69	80	—	80
λ_6	56,6	—	—	67
λ_7	45,6	—	—	57

$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = 0,736$,
Nach Lenz 0,728.

[1]) Sämtliche benutzten Glaszylinder und Stäbe wurden in dankenswerter Weise vom Glaswerk Jena (Schott und Gen.) zur Verfügung gestellt.

Tabelle 7. $\frac{l}{R} = 0{,}100$ (sehr kurz),

$L = 100{,}6$ m, $2l = 3{,}73$ cm,
$N = 86$, $g = 0{,}433$ mm,
$2\pi R = 117$ cm, $2r = 0{,}25$ mm,
$2R = 37{,}3$ cm.

	Nach Lenz berechnet	Induktive Anregung		Kapazitive Anregung
	λ	λ	$\mathfrak{d}$	λ
λ_1	404	435	0,022	465
λ_2	130,5	144	0,12	145
λ_3	84	88,5	—	89
λ_4	57	63	—	64
λ_5	44,7	50	—	50

$$\frac{2\lambda_2}{\lambda_1} = 0{,}662,$$

Nach Lenz 0,646.

Die Tabellen 2 und 6 sind die Meßergebnisse von zwei Spulen gleicher Form $\left(\frac{l}{R}\right)$, doch ist das Verhältnis von Ganghöhe zu Drahtdurchmesser $\left(\frac{g}{2r}\right)$ verschieden. Ein Vergleich der Werte von $f = \frac{\lambda}{2L}\left(\frac{\text{Eigenschwingung}}{\text{Doppelte Drahtlänge}}\right)$ für beide Spulen (Tabelle 8) lehrt, daß die Eigenschwingungen wachsen, wenn $\frac{g}{2r}\left(\frac{\text{Ganghöhe}}{\text{Drahtdurchmesser}}\right)$ kleiner wird; doch beträgt die Änderung nur wenige Prozent.

Tabelle 8.

	$\frac{g}{2r} = 1{,}73$	$\frac{g}{2r} = 1{,}12$
$f_1 = \frac{\lambda_1}{2L}$	1,91	1,97
$f_2 = \frac{\lambda_2}{2L}$	0,692	0,724
f_3	0,431	0,453
f_4	0,304	0,330
f_5	0,239	0,260

Die Bilder 14 und 15 zeigen die Abhängigkeit der 1. bis 3. Eigenschwingung von der Spulenform bei $\frac{g}{2r} = 1{,}11$. Die von Lenz auf Grund seiner Rechnung aufgestellten Kurven sind gestrichelt eingezeichnet. Beispiel: Eine Spule habe eine aufgewickelte Drahtlänge von $L = 100$ m, einen Spulendurchmesser von $2R = 20$ cm und eine Spulenlänge von $2l = 16$ cm; dann ist $\frac{l}{R} = 0{,}8$. Aus Bild 14 läßt sich für $\frac{g}{2r}\left(\frac{\text{Ganghöhe}}{\text{Drahtdurchmesser}}\right) = 1{,}11$, $f_1 = 1{,}44$ (nach Lenz 1,24), $f_2 = 0{,}69$, $f_3 = 0{,}45$ ablesen. Es würde demnach sein: λ_1 (Grundwelle) $= f_1 \cdot 2L = 288$ m (nach Lenz

248 m). λ_2 (erste Oberschwingung) $= f_2 \cdot 2L = 138$ m und λ_3 (zweite Oberschwingung) $= f_3 \cdot 2L = 90$ m. Für weitere Wicklungen $\left(\frac{g}{2r} > 1{,}11\right)$ würden die Eigenschwingungen um einige Prozent kleiner werden.

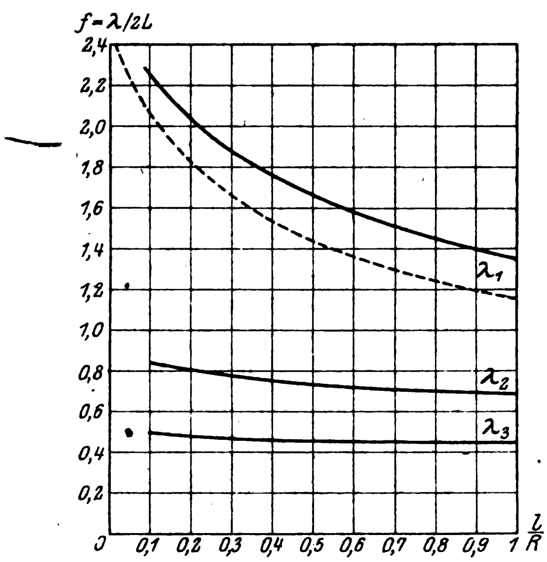


Bild 14. Abhängigkeit der Eigenschwingungen von der Spulenform $\left(\frac{l}{R}\right)$ bei enger Wicklung für kurze Spulen.

Bild 15. Für lange Spulen.

Die gestrichelte Kurve ist von Lenz auf Grund seiner Rechnung aufgestellt.

5. Einfluß von Erdkapazität[1]. Um einer Spule eine große Erdkapazität zu geben, wurde ein geerdeter Kupferblechzylinder in die Spule gebracht. Der Zylinder hatte einen 2,5 cm breiten Schlitz, damit die Anregung von den Kopplungswindungen nicht vollständig abgeschirmt wurde. Untersucht wurde eine lange und eine kurze Spule.

Für die lange Spule (Bild 6 und Tabelle 1) war der Blechzylinder 50 cm lang, sein mittlerer Abstand von den Windungen betrug bei der ersten Meßreihe (Tabelle 9) 1,2 cm, bei der zweiten 2 cm. Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte aus Tabelle 1 (ohne Erdkapazität) hinzugefügt.

Tabelle 9 (Induktive Anregung).

	1,2 cm Blechabstand		2 cm Blechabstand		Ohne Erdkapazität
	λ	δ	λ	δ	
λ_1	1640	0,046	1220	0,040	645
λ_2	600	0,024	505	0,02	367
λ_3	345	0,020	296	—	256
λ_4	237	—	218	—	199
λ_5	181	—	170	—	162
λ_6	147	—	139	—	137,5
λ_7	126	—	120	—	118
λ_8	108	—	104,5	—	104
λ_9	94	—	91	—	91
λ_{10}	83,5	—	82	—	82

[1]) Unter Erdkapazität ist hier nicht nur der Einfluß der Erde verstanden, sondern jedes Leiters mit einem andern Potential als die Spule. Obgleich der Ausdruck Erdkapazität also nur einen Teilbegriff darstellt, wurde er hier benutzt, weil er sich in der Literatur bereits häufig mit erweiterter Bedeutung findet (siehe Rogowski, Wagner u. a.).

Die Erdkapazität der kurzen Spule (Bild 7 und Tabelle 2) wurde durch Einlegen eines 19 cm langen Blechzylinders hergestellt, der im Mittel 3 cm Abstand von den Windungen hatte. Die gefundenen Zahlenwerte sind die folgenden:

Tabelle 10.

	Induktive Anregung				Kapazitive Anregung			
	mit Erdkapazität		ohne Erdkapazität		mit Erdkapazität		ohne Erdkapazität	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	785	0,054	766,5	0,037	864	0,055	835	0,039
λ_2	269	0,047	278	0,052	279	—	288,5	0,05
λ_3	173	—	173,5	—	175	—	176	—
λ_4	122	—	122	—	126	—	126	—
λ_5	96	—	96	—	—	—	—	—

Wenn die Erdleitungen der Blechzylinder unterbrochen wurden, änderten sich die Eigenschwingungen bei beiden Spulen nicht.

Um die Verhältnisse bei Transformatoren möglichst nachzuahmen, wurden Primärspulen in die zu untersuchenden Spulen eingeführt. Sie wirkten wie schwache Erdkapazitäten; dabei war es gleichgültig, ob sie kurzgeschlossen oder geöffnet waren.

In die lange Spule (Bild 6) wurde eine einlagige Primärspule von 28 cm Länge, 14 cm Durchmesser und 75 Windungen gebracht. Die Primärspule für die kurze Spule (Bild 7) war zweilagig und hatte 36 cm Länge, 26 cm Durchmesser ~ 500 Windungen. Die Tabellen 11 und 12 zeigen die Ergebnisse der Messungen.

Tabelle 11. Kapazitive Anregung.

	Mit Primärspule		Ohne Primärspule	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	1060	0,04	740	0,015
λ_2	479	—	377	—
λ_3	3[illegible]1,5	—	264	—
λ_4	251,5	—	203	—
λ_5	199	—	162	—
λ_6	155,5	—	137	—
λ_7	128	—	118	—

Tabelle 12. Kapazitive Anregung.

	Mit Primärspule		Ohne Primärspule	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	710	0,04	835	0,039
λ_2	281,5	—	288,5	—
λ_3	175,5	—	176	—
λ_4	125	—	126	—

Aus den Tabellen 9 bis 12 geht hervor, daß der Einfluß auf die Grundschwingung groß ist, bei höheren Oberschwingungen aber fast ganz verschwindet.

Bei der langen, weitgewickelten Spule trat durch eingeführtes Blech oder durch eine Primärspule jedesmal eine Vergrößerung der Eigenschwingungen ein. Bei der kurzen, enggewickelten Spule wurde dagegen mehrfach eine Verkleinerung der Eigenschwingungen beobachtet (Tabelle 10 und 12). Eine völlige Erklärung dafür wurde nicht gefunden. Voraussichtlich ist die Kapazitätsvergrößerung bei der enggewickelten Spule nur klein, die Schwächung des magnetischen Feldes durch Wirbelstrombildung im Blech und Eigenschwingungen in der Primärspule aber unter Umständen so groß, daß die Eigenschwingungen der untersuchten Spule verkleinert werden.

6. Einfluß von Eisen. Zur Feststellung des Einflusses von Eisen wurden in die lange Spule (Bild 6) 9 Epsteinbündel von je 50 cm Länge, 3 cm Breite und 2,5 cm Höhe gebracht. Die Anordnung geht aus Bild 16 hervor, die einen Schnitt, senkrecht zur Spulenachse darstellt. Das Eisen hatte durchschnittlich einen Abstand von 1,35 cm von den Windungen.

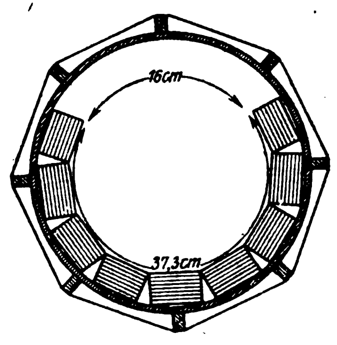


Bild 16. Anordnung der Eppsteinbündel.

Die gemessenen Eigenschwingungen sind in Tabelle 13 zusammengestellt. Die entsprechenden Werte für die Spule ohne Eisen sind beigefügt. Bei der kurzen Spule (Bild 7) wurde ein Paket Transformatorblech von 20 × 20 × 1,2 cm Außenmaß auf den Boden des Glaszylinders gelegt.

Der lichte Abstand des Eisens von den Windungen der Spule betrug im Mittel 3 cm. Der Einfluß des Eisens ist aus der Gegenüberstellung in Tabelle 14 zu ersehen.

In die Spule gebrachtes Eisen vergrößert die Eigenschwingungen besonders stark, weil es nicht nur die Kapazität, sondern auch die Induktivität der Spule erhöht. Bei höheren Eigenschwingungen nimmt aber der Einfluß, ähnlich wie bei Erdkapazität allein, schnell ab.

Tabelle 13.

	Mit Eisen		Ohne Eisen	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	über 4000		740	0,015
λ_2	1105	0,51	377	0,016
λ_3	532	—	264	—
λ_4	342	—	203	—
λ_5	243,5	—	162	—
λ_6	186	—	137	—
λ_7	149	—	118	—
λ_8	126	—	104	—
λ_9	105	—	91	—
λ_{10}	91	—	82	—

Tabelle 14.

	Mit Eisen		Ohne Eisen	
	λ	$\mathfrak{d}$	λ	$\mathfrak{d}$
λ_1	925	0,14	835	0,039
λ_2	290	0,06	288,5	0,05
λ_3	176	—	176	—
λ_4	126	—	126	—

IV. Anhang: Über die Eigenkapazität einlagiger Spulen bei Frequenzen unterhalb der Grundschwingung.

Die Messung von Selbstinduktionen in der Brücke geschieht gewöhnlich bei Niederfrequenz, also bei gleichmäßiger Stromverteilung auf der Spule. Schwingt diese aber in ihrer Grundwelle, so befindet sich in der Mitte ein Strommaximum und an den Enden Minima; die Selbstinduktion wird dadurch erheblich kleiner. Setzt man in die Thomsonsche Formel die Wellenlänge der Grundschwingung und die bei Niederfrequenz gemessene Selbstinduktion ein, so muß der für die Kapazität berechnete Wert gegenüber dem wirklichen zu klein sein. Die auf diese Weise für eine lange und eine kurze Spule (Bild 6 und 7)[1]) gefundene Kapazität beträgt 4,7 und 9 cm.

Durch eine parallel zu jeder der beiden Spulen geschaltete Kapazität von 69,3 cm wurden die Grundschwingungen der Spulen von 645 m auf 2610 m und von 766,5 m auf 2370 m erhöht. Die parallel geschaltete Kapazität war für beide Spulen groß gegen die Eigenkapazität, die Stromverteilung auf den Spulen infolgedessen annähernd gleichmäßig und die Selbstinduktion nicht sehr verschieden von der bei Niederfrequenz gemessenen.

Mit Hilfe der Thomsonschen Formel wurde aus der vergrößerten Eigenschwingung, der Selbstinduktion und der parallel geschalteten Kapazität für die beiden Spulen (Bild 6 und 7) eine Eigenkapazität von 7,5 cm und 15,4 cm gefunden.

Bei einer parallel geschalteten Kapazität von 35,36 cm ergaben die beiden Spulen Eigenschwingungen von 1950 und 1780 m. Die daraus berechneten Eigenkapazitäten waren 7,6 und 13,2 cm.

[1]) Die in der Brücke gemessene Selbstinduktion beträgt $2{,}25 \cdot 10^7$ cm und $1{,}66 \cdot 10^7$ cm.

Die folgende Überlegung führt zu ähnlichen Zahlenwerten: Wenn eine Spule mit vernachlässigbarer Erdkapazität in ihrer Grundwelle schwingt, so pendelt die Elektrizität zwischen den Spulenenden hin und her. Bild 9 zeigt, daß nur etwa im mittleren Drittel der Spule ein starker Strom fließt, nur hier besteht also ein großes Spannungsgefälle. Die beiden äußeren Spulendrittel wirken daher wie zwei Kondensatorbelegungen. Um ihre Kapazität gegeneinander berechnen zu können, wurden sie ersetzt gedacht durch zwei dünne Blechzylinder von denselben Abmessungen und demselben gegenseitigen Abstand wie die äußeren Spulendrittel. Durch Abrollen dieser Zylinder auf eine Ebene entstehen zwei parallele Bänder, deren Länge gleich dem Spulenumfang ($2\pi R$), deren Breite gleich $^1/_3$ Spulenlänge ($^2/_3\, l$) und deren mittlerer Abstand gleich $^2/_3$ Spulenlänge ($^4/_3\, l$) war (Bild 17).

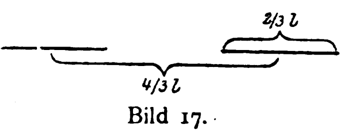


Bild 17.

Für solche Bänder hat Rogowski[1]) zwar nicht die Kapazität, aber die Selbstinduktion pro Längeneinheit berechnet und gefunden, daß ihre Größe nur vom Verhältnis der Bandbreite zum mittleren Bandabstand abhängt. Aus der Selbstinduktion läßt sich mit Hilfe der Beziehung $\frac{1}{C_{\text{farad}}} = c^2 \cdot L_{\text{Henry}}$ (c = Lichtgeschwindigkeit)[2]) die Kapazität leicht berechnen. Für den Fall, daß die Bretie der Bänder halb so groß ist wie ihr mittlerer Abstand, beträgt die Kapazität 0,115 cm pro cm Bandlänge. Dieser Wert ist mit dem Spulenumfang ($2\pi R$) zu multiplizieren, um die Kapazität der Spule zu erhalten. Für die Spulen (Bild 6 und 7) erhält man auf diese Weise 7,13 und 13,5 cm. Diese Zahlen stimmen gut mit den durch Messung gefundenen (7,5—7,64 und 15,4—13,24) überein. Aus der angestellten Überlegung folgt, daß die Kapazität einlagiger Spulen nur vom Spulendurchmesser abhängt; denn das Verhältnis der Länge eines Spulendrittels zum mittleren Abstand der beiden äußeren Spulendrittel bleibt stets $^1/_2$. Die Kapazität einer einlagigen Spule ist

$$C = 0{,}115 \cdot 2\pi R \quad (R = \text{Radius per Spule}).$$

Aus der Entstehung der Formel geht ohne weiteres hervor, daß sie nur Näherungswerte ergeben kann. Bei Niederfrequenz wird wegen der gleichmäßigen Stromverteilung die Kapazität etwas kleiner sein als oben angegeben.

Aus einer von Keller[3]) aufgestellten Formel für Spulenkapazität ergibt sich für die Spulen (Bild 6 und 7) 7,49 und $8{,}2 \cdot 10^{-3}$ cm. Keller nimmt eine gleichmäßige Verteilung der Kapazität auf der Spule an, was zweifellos nicht zutrifft. Er selbst findet durch Messung für eine lange Spule eine Kapazität, die mehr als 20 mal größer ist als seine berechnete.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit sind einlagige Spulen verschiedener Form offen und geschlossen auf Eigenschwingungen untersucht worden. Es wurde stets eine Grundschwingung und eine große Zahl Oberschwingungen gefunden. Die Art der Schwingungserregung, in die Spulen gebrachtes Kupferblech oder Eisen rief keine qualitative Änderung im Verhalten der Spulen hervor. In keinem Falle ließ sich eine Häufung oder obere Grenze („kritische Frequenz") der Eigenschwingungen feststellen. Die von Lenz aufgestellte Formel zur Berechnung kurzer, einlagiger Spulen wurde gut bestätigt gefunden.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, meinen verehrten Lehrern, Herrn Geh. M. Wien und Herrn Prof. Rogowski, die die vorliegende Arbeit angeregt und durch ihr stetes Interesse gefördert haben, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

[1]) Rogowski, Archiv f. Elektr. I. S. 222. 1912.
[2]) Abraham und Föppl, Theorie der Elektrizität I. S. 341 und folgende.
[3]) Keller, Dissertation, Zürich 1917.

Über das Ziehen des Zwischenkreis-Röhrensenders.

Von

G. Glage und H. Edler.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

1. **Beschreibung des Ziehens.** Beim Gebrauch der modernen Röhrensender hat man die Erfahrung gemacht, daß bei der Koppelung des Schwingungskreises der Röhre mit einem Sekundärsystem ganz eigenartige und dazu noch recht unübersichtliche Erscheinungen eintreten, die für die drahtlose Telegraphie wegen ihrer störenden Wirkungen von Wichtigkeit sind. Man kann in ihnen eine Koppelungserscheinung sehen, die dadurch vor den bisher bekannten charakterisiert ist, daß das Primärsystem durch die Röhrenrückkoppelung sich selbst in Schwingung erhält. Ein mechanisches Analogon einer solchen Schwingungserregung ist z. B. ein Pendel, dem durch einen von ihm selbst durch Schließen eines Kontaktes gesteuerten Elektromagneten im geeigneten Moment Impulse erteilt werden, die es auf gleicher Amplitude halten. Hierher gehören auch der bekannte Mikrophonsummer, der elektrische Lichtbogen und das Dynatron[1]) als Schwingungserzeuger.

Bei den bisher bekannten und genauer beschriebenen Koppelungserscheinungen waren entweder die Schwingungen nach der ersten Anregung sich selbst überlassen (Oberbecksche gekoppelte Pendel, Braunscher Sender, Wiensche Stoßerregung)

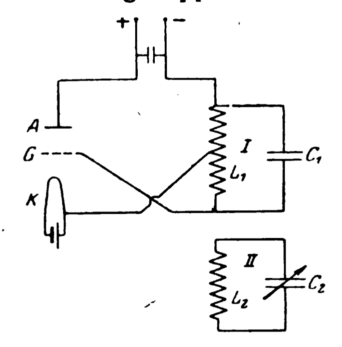


Bild 1. Schaltung des Zwischenkreis-Röhrensenders.

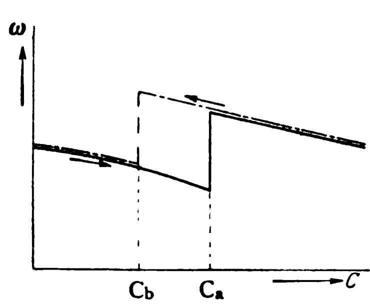


Bild 2. Frequenzänderung durch Variation der Kapazität C_2 (Bild 1).

oder es wirkte eine sinusförmige Erregung dauernd auf das eine System, ohne daß dieses aber auf die Periode der Erregung irgendwelchen Einfluß haben konnte. Mittels des Stimmgabelunterbrechers elektromagnetisch erregte Saite, Resonanztransformator, Hochfrequenzmaschine.)

Bei der Röhre erhält sich das Primärsystem dadurch dauernd auf gleicher Amplitude, daß infolge der Rückkoppelung die Gitterspannung den Anodenstrom so steuert, daß er jedesmal im richtigen Moment die zu ersetzende Energie nachliefert.

Die Schwingungsdauer dieses ganzen Primärsystems ist nur in grober Annäherung durch die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{CL}$$

gegeben, da diese Formel den Einfluß der Rückkoppelung nicht enthält. Koppelt man nun mit diesem Kreis einen zweiten mit anderer (veränderlicher) Eigenschwingung, so erhebt sich die Frage, welches Verhalten die durch die Koppelung veränderten Eigenschwingungen zeigen werden. Die Erfahrung hat gelehrt, daß im allgemeinen nur eine der beiden möglichen Schwingungen vorhanden ist. Das Charakteristische der Erscheinungen, die u. a. sehr stark von der Koppelung abhängen, ist in großen Zügen folgendes:

[1]) Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie. Bd. 14. 1919 Heft 1.

In Bild 1 seien in bekannter Weise I der durch die Röhre R (K Kathode, G Gitter, A Anode) angestoßene Primärkreis und II der damit gekoppelte Sekundärkreis. Seine Eigenfrequenz sei durch Veränderung der Kapazität C_2 variabel. Erregt man Kreis I, geht in Kreis II von schnellerer Frequenz gegenüber dem System I aus und vergrößert allmählich die Kapazität C_2, so tritt nicht allein, wie man erwarten könnte, eine Änderung der Amplitude ein, sondern auch die Schwingungszahl der beiden Kreise, die für beide gleich ist, ändert sich und wird immer niedriger (an der Resonanzstelle liegt kein Maximum der Energieabgabe) bis bei einer gewissen Kapazität nach der Resonanzstelle ein mehr oder weniger sprunghaftes Umschlagen in eine höhere Frequenz stattfindet. Stelle und Art des Umschlagens, das sich u. U. auch als ein Aussetzen der Schwingungen äußern kann, sind von der Koppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis abhängig. Geht man über diese Stelle hinaus, so tritt im allgemeinen keine wesentliche Änderung mehr ein. Geht man nun mit der Kapazität wieder zurück, so tritt an der Stelle, wo vorher das Umschlagen stattfand nichts besonderes ein, sondern die Frequenz wird höher, bis schließlich an einer Stelle vor dem Resonanzpunkt wieder ein Sprung in die tiefere Frequenz stattfindet. Graphisch (Bild 2) würde sich die Erscheinung folgendermaßen darstellen. Als Abszissen sind die Frequenzen, als Ordinanten die Kapazitäten aufgetragen. Mit wachsender Kapazität wird die Frequenz immer tiefer bis bei C_a ein Sprung in eine höhere stattfindet, die bei weiterer Vergrößerungen von C_2 wieder langsam tiefer wird. Geht man rückwärts (punktierte Linie) so findet der Sprung in die niedrigere Frequenz nicht bei C_a sondern erst bei C_b statt.

2. Eigenschwingungen und Dämpfungen gekoppelter Systeme nach der Wienschen Theorie. Koppelungserscheinungen zweier schwingenden Systeme sind schon sehr früh in der Akustik beobachtet worden, ohne daß man immer ihre Ursache erkannt hätte. Auch das im vorigen Abschnitt beschriebene Springen der Frequenz ist bereits von Weber an einem akustischen Systeme beobachtet worden[1]). Erst als man die Koppelungserscheinungen auch an elektrischen Systemen studierte wurde, nachdem Arbeiten von Oberbeck, Galitzin und Geitler voraufgegangen waren, von M. Wien eine umfassende Theorie der Schwingungen zweier gekoppelter Systeme gegeben[2]).

Da diese grundlegende Arbeit mit ihrer großen Bedeutung, die sie für das weite Gebiet der gekoppelten Schwingungen hat[3]), nicht gerade leicht zugänglich ist und auch immer wieder darauf Bezug genommen werden muß, dürfte es angebracht sein, ihre Resultate, soweit sie hier in Betracht kommen, in aller Kürze anzugeben. Für ein einigermaßen genaueres Studium muß natürlich auf die Originalarbeit verwiesen werden, da die folgende Zusammenfassung nur das allernotwendigste geben kann.

Koppelt man schwingungsfähige mechanische Systeme miteinander, so lassen sich drei Arten von Koppelung unterscheiden: Die Beschleunigungs-, Reibungs- und Kraftkoppelung. Bei elektrischen Systemen entsprechen diesen die magnetische, galvanische und elektrische Koppelung. In der Arbeit von Wien wird nun gezeigt, daß Kraft- und Beschleunigungskoppelung annähernd dieselbe Wirkung haben, und daß die Reibungs-(galvanische)Koppelung in den meisten Fällen zu vernachlässigen ist. Es genügt also in der Hauptsache nur die Kraftkoppelung eingehender zu diskutieren.

[1]) Vgl. hierzu die demnächst in den Ann. d. Phys. erscheinende Arbeit von Dr. H. Vogel Die Zungenpfeife als gek. System.

[2]) M. Wien. Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems. Ann. d. Phys. N., F. 61. 1897 S. 151 ff.

[3]) Auch das Pendeln zweier Synchronmaschinen gehört z B. in das Gebiet der gekoppelten Schwingungen. (Vgl. Dreyfus, Zur Theorie des Parallelbetriebes von Synchronmaschinen, Archiv f. Elektrotechnik VIII, S. 132.)

Zuerst werden die ungedämpften und dann die gedämpften Systeme behandelt. Für zwei ungedämpfte Systeme, die man miteinander koppelt, ergibt die Theorie, daß bei ihnen ein vollständiges Unisono im allgemeinen nicht zu erreichen ist (Scheu vor der Resonanz), auch wenn die Schwingungszahlen der Einzelsysteme genau übereinstimmen. Jedes der Systeme macht dann, je nach der Festigkeit der Koppelung, mehr oder weniger schnelle Schwebungen.

Dasselbe Resultat gilt auch für gedämpfte Schwingungen, wenn die beiden Dämpfungen einander gleich sind.

Wichtiger und häufiger vorkommend ist der Fall, daß die beiden Dämpfungen ungleich sind. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Dämpfungsdifferenz ist größer als die Koppelung.
2. Die Dämpfungsdifferenz ist gleich der Koppelung.
3. Die Dämpfungsdifferenz ist kleiner als die Koppelung.

1. Fall: $(h_1 - h_2 > \tau\gamma)$

Es bedeuten hier und in den folgenden Fällen[1]):

h_1, h_2 die Dämpfungen der unverkoppelten Systeme 1 und 2.

$$\left(\text{elektrisch ist } h_1 = \frac{R_1}{2L_1} \text{ und } h_2 = \frac{R_2}{2L_2}\right)$$

$$\tau^2 = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \text{ den Koppelungskoeffizienten}$$

γ_1, γ_2 die Eigenschwingungen der unverkoppelten Systeme.

γ die Eigenschwingungen der Systeme für den Fall der Resonanz.

$\varepsilon = \gamma_1 - \gamma_2$ die Differenz der Eigenschwingungen der Systeme.

ν_1, ν_2 die Schwingungszahlen der in jedem System auftretenden beiden Koppelschwingungen.

δ_1, δ_2 die Dämpfungen der beiden Schwingungen ν_1 und ν_2.

Die Lösung der Differentialgleichungen ergibt nun in diesem Falle für die beiden entstehenden Schwingungen

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \gamma_1 - \frac{\tau^2\gamma_1}{8} - \frac{\tau^2\gamma_1{}^2\cdot\varepsilon}{4\{\varepsilon^2 + (h_2 - h_1)^2\}}, \\ \nu_2 &= \gamma_2 - \frac{\tau^2\gamma_1}{8} + \frac{\tau^2\gamma_1{}^2\cdot\varepsilon}{4\{\varepsilon^2 + (h_2 - h_1)^2\}}, \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

und für die Dämpfungen unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß h_1 sehr klein gegen h_2 sei,

$$\delta_1 = \frac{\tau^2\gamma_1{}^2 h_2}{4(\varepsilon^2 + h^2{}_2)}$$

$$\delta_2 = h_2 - \frac{\tau^2\gamma_1{}^2 h_2}{4(\varepsilon^2 + h_2{}^2)}.$$

D. h. die Dämpfung für die Schwingung ν_2 ist bedeutend größer als die für die Schwingung ν_1. Sie ändert sich mit der Differenz ε der Eigenschwingungen der Systeme. Je größer ε wird, d. h. je verschiedener die Eigenschwingungen der beiden

[1]) Da die hier benutzten Bezeichnungen nicht ganz mit den gewöhnlich benutzten übereinstimmen, seien hier auch die in „Zenneck, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie" benutzten Zeichen angegeben.

An Stelle der Dämpfungen h_1, h_2 wird dort das log. Dekrement $\mathfrak{d} = h\frac{2\pi}{w}$ benutzt.

Im übrigen ist

$$\tau = K$$
$$\gamma = N$$
$$\nu_1 = N^I$$
$$\delta_1\,\delta_2 \sim \mathfrak{d}^I\,\mathfrak{d}^{II}.$$



Systeme sind, desto kleiner wird δ_1 und desto größer δ_2. In der Nähe der Resonanzstelle ($\varepsilon = 0$) hat δ_2 ein Minimum und δ_1 das Maximum $\frac{\tau^2 \gamma^2}{4 h^2}$. Mit anderen Worten: Es entstehen in diesem Falle zwar in jedem Kreise zwei Schwingungen ν_1 und ν_2; infolge der großen Dämpfung wird aber ν_2 sehr bald abklingen und nur ν_1 wird wahrnehmbar bestehen bleiben. Eine Ausnahme macht die Stelle der Resonanz. Hier, wo δ_2 ein Minimum und δ_1 ein Maximum hat, wird auch ν_2 stärker hervortreten.

Was nun die Schwingungszahlen ν_1 und ν_2 betrifft, so ist in Gleichung 1 das Glied $\frac{\tau^2 \gamma_1^2 \varepsilon}{4\{\varepsilon^2 + (h_2 - h_1)^2\}}$ veränderlich, und zwar ist die Veränderung nur abhängig von der einzigen Variabeln $\varepsilon = \gamma_2 - \gamma_1$. In der Gleichung für die Schwingung ν_1, die, wie wir eben gesehen haben, allein den Charakter der Erscheinung bestimmt, ist das Glied mit negativem Vorzeichen versehen. Ist also $\gamma_2 > \gamma_1$ dann ist $\varepsilon > 1$ und γ_1 wird verkleinert. Ist dagegen $\gamma_2 < \gamma_1$ dann ist $\varepsilon < 1$ und γ_1 wird vergrößert. Ein höher gestimmtes System 2 wird also den Ton γ_1 vertiefen und ein zu tief gestimmtes ihn erhöhen. Der absolute Wert des Gliedes $\frac{\tau^2 \gamma_1^2 \varepsilon}{4\{\varepsilon^2 + (h_2 - h_1)^2\}}$ wird am größten für $\varepsilon = \pm (h_2 - h_1)$. In diesem Falle wird die Verstimmung ein Maximum. Geht man also im System 2 von großer Frequenz gegenüber System 1 ($\gamma_2 > \gamma_1$) und läßt die Frequenz des Systems 2 abnehmen bis zu kleinen Werten gegenüber 1 ($\gamma_2 < \gamma_1$), so wird die Frequenz der Schwingung ν_1, (die ja das Bild der Erscheinung bestimmt), abnehmen bis in die Nähe der Resonanz; von da ab nimmt sie schnell zu, um dann kurz nach dem Durchschreiten der Resonanzstelle wieder langsam abzunehmen.

Der Verlauf der Erscheinung läßt sich sehr schön aus dem der Wienschen Arbeit entnommenen Bild 3 ersehen. Als Ordinaten sind aufgetragen $\Delta\nu$ die Abweichung der Töne ν_1 und ν_2 von γ_1 bzw. die Dämpfungen δ_1 und δ_2; als Abszissen die Differenz ε der Eigenschwingungen. Die verstärkte ausgezogene Kurve gibt ν_1, die verstärkte punktierte δ_1; die schwach ausgezogene ν_2, die schwach punktierte δ_2.

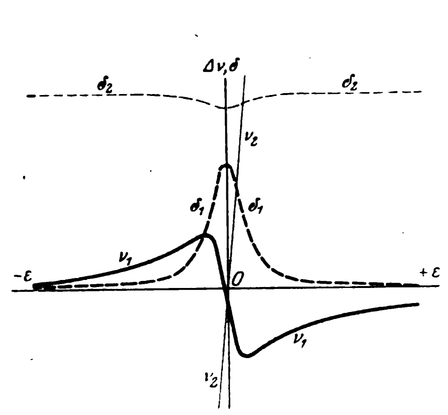


Bild 3. Frequenz und Dämpfung im Falle loser Kopplung.

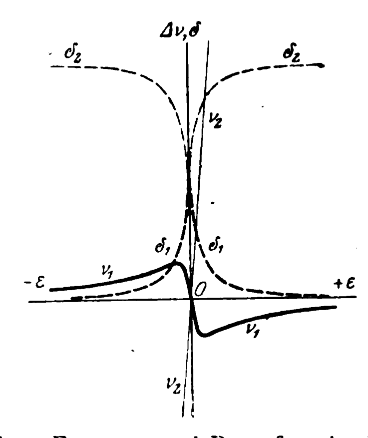


Bild 4. Frequenz und Dämpfung im Falle festerer Kopplung.

2. Fall. $h_2 - h_1 = \tau\gamma$

Hier ergibt sich:

$$\left.\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\} = \gamma_1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\tau^2}{8}\gamma_1 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon^4 + 4\tau^2\gamma^2\varepsilon^2} + \varepsilon^2}{2}}$$

und

$$\left.\begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\right\} = \frac{h_1 + h_2}{2} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon^4 + 4\tau^2\gamma^2\varepsilon^2} - \varepsilon^2}{2}}$$

Auch hier hat für $\varepsilon = 0$, δ_2 ein Minimum und δ_1 ein Maximum. Nur sind beide hier gleich. Außerhalb des Resonanzpunktes sind die beiden Dämpfungen stets verschieden, so daß auch hier die weniger gedämpfte Schwingung die vorherrschende sein wird. In der Nähe der Resonanz jedoch, wo δ_2 stark abnimmt, werden (abgesehen vom Resonanzpunkt, wo $\nu_1 = \nu_2$ ist) Schwebungen auftreten. Der Verlauf der Erscheinung läßt sich am besten aus Bild 4 ersehen. (Abszissen und Ordinaten sind dieselben wie in Bild 3.) Im Gegensatz zu dem vorigen Fall ändern sich hier in der Nähe der Resonanz Dämpfung und Schwingungszahl beider Schwingungen sehr schnell, so daß für $\varepsilon = 0$ direkt eine Unstetigkeit vorliegt. Schwingungszahl und Dämpfung sind hier in gewissem Sinne labil.

3. Fall (vorherrschende Koppelung $h_2 - h_1 < \tau\gamma$)

In diesem Falle wird:

$$\left.\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\} = \gamma_1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\tau^2\gamma}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + \tau^2\gamma_1{}^2 - \frac{(h_2 - h_1)^2\tau^2\gamma^2}{\varepsilon^2 + \tau^2\gamma^2}}$$

$$\left.\begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\right\} = \frac{h_1 + h_2}{2} \pm \frac{\varepsilon(h_2 - h_1)}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \tau^2\gamma^2}}$$

Es entstehen auch hier zwei unabhängige Schwingungsarten. Ihre Schwingungszahlen sind stets verschieden, selbst im Fall der Resonanz. Die Dämpfungen haben hier kein Maximum resp. Minimum, wie bei den vorigen Fällen, sondern mit wachsendem ε nimmt δ_1 stetig zu, während δ_2 in demselben Maße abnimmt. Im Falle der Resonanz ($\varepsilon = 0$) ist $\delta_1 = \delta_2$.

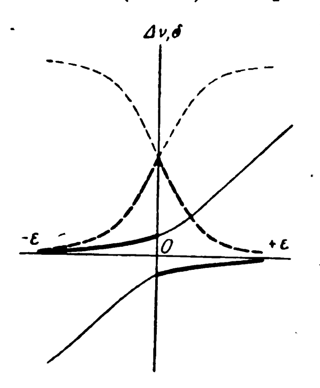


Bild 5. Frequenz und Dämpfung im Falle fester Kopplung.

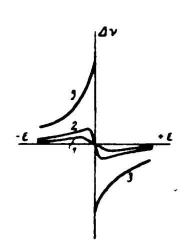


Bild 6. Frequenzänderung der schwächer gedämpften Schwingung bei loser, festerer und fester Kopplung. Frequenzsprung bei Resonanz.

Die Folge davon ist, daß während zuerst ($\varepsilon < 0$) ν_1 die vorherrschende und den Charakter der Erscheinung bestimmende Schwingung ist, nach Durchschreiten der Resonanz ($\varepsilon > 0$) ν_2 die Rolle von ν_1 übernimmt.

Da aber ν_2 die kleinere Frequenz gegenüber ν_1 hat, wird beim Durchschreiten der Resonanz ein Umschlagen von großer zu kleiner Frequenz (hohem zu tiefem Ton) eintreten. An der Stelle der Resonanz selbst ($\varepsilon = 0$), wo $\delta_1 = \delta_2$ ist, sind ν_1 und ν_2 gleichwertig vertreten. Es treten also hier sicher Schwebungen auf. Bild 5 gibt den Verlauf der Erscheinung in diesem Falle.

In Bild 6 sind die Kurven der 3 Fälle noch einmal in demselben Maßstab aufgetragen; und zwar sind hier nur die weniger gedämpften Schwingungsarten, die

das Bild der Erscheinungen bestimmen, aufgezeichnet. In Richtung der Abzisse ist ε aufgetragen. Als Ordinate ist $\Delta\nu$ die Abweichung der Frequenz ν_1 und ν_2 von der Eigenfrequenz des Systems I aufgetragen.

Wir sehen also ganz allgemein; wächst ε von $\varepsilon < 0$ bis $\varepsilon > 0$ (oder ändert sich der stärker gedämpfte Kreis so, daß seine Frequenz von kleinerer zu größerer gegenüber den schwächer gedämpften Kreis wächst), so wird die Frequenz der Hauptschwingung größer bis in die Nähe der Resonanzstelle; dort sinkt sie rasch bis auf ihren kleinsten Wert, um dann langsam wieder anzusteigen.

Die Koppelung ist bei Kurve I am schwächsten und bei Kurve III am stärksten. Je stärker also die Koppelung ist, um so sprunghafter erfolgt der Übergang.

3. Oszillographische Aufnahmen. Um nun auf die Röhren zurückzukommen, liegen dort die Verhältnisse so, daß zu den beiden Systemen I und II, wie schon anfangs erwähnt, die Eigenerregung über den Gitterkreis hinzukommt, der ebenfalls ein schwingungsfähiges Gebilde darstellt. Wir haben es also eigentlich mit drei miteinander gekoppelten Systemen zu tun (von denen das System I und der Gitterkreis derartig gekoppelt sind, daß sie sich gegenseitig aufschaukeln). Von den am Anfang kurz beschriebenen Erscheinungen ist zwar das Springen der Frequenz in der Wienschen Theorie enthalten, sollte danach aber in der Nähe der Resonanzstelle eintreten und immer an dem gleichen Platze, ob man vor oder rückwärts geht. In Wirklichkeit tritt der Sprung je nach dem Koppelungsgrade zwischen Primär- und Sekundärkreis mehr oder weniger weit von der Resonanzstelle ein und beim Zurückgehen an ganz anderer Stelle, wie schon eingangs erwähnt. In Fachkreisen wird diese Erscheinung das „Ziehen" der Röhren genannt. Über die Mechanik der Rückkoppelung kann die Theorie vorläufig sehr schwer Auskunft geben, da die Durchrechnung schon für den Fall zweier Systeme sehr kompliziert wird. Es wird sich zunächst darum handeln, die Erscheinungen experimentell zu untersuchen, um die physikalischen Grundlagen zu gewinnen. Wir stellten uns daher auf Anregung von Herrn Prof. Rogowski die Aufgabe, experimentell an die Erscheinung heranzutreten, und als erstes sollte speziell das Umschlagen von einer Frequenz in die andere mit Hilfe des Oszillographen beobachtet werden. Die heutige Mitteilung ist daher nur der erste Teil unserer Untersuchung.

Um den Oszillographen verwenden zu können, mußte die Frequenz bis zu etwa 200 pro Sek. und weniger erniedrigt werden; außerdem sollte, um alle Störungen von anderer Seite auszuschalten, kein Eisen in den Spulen verwendet werden. Es wurden daher 12 Spulen von ca. 1800 Windungen (Drahtdurchmesser 0,2 mm) (innerer Radius 6,4 cm, äußerer 9 cm, Dicke 1 cm) hergestellt, von denen je 6 in jedem Kreise verwendet wurden. Der relativ große Widerstand der Spulen mußte in Kauf genommen werden, da sonst die nötige Selbstinduktion nicht zu erreichen war. Außer diesen 6 Spulen waren noch einige Spulen von kleinerem Widerstand mit eingeschaltet. Als Kapazität wurden z. T. Glaskondensatoren von Schott und Gen., z. T. Drehkondensatoren verwendet. Die Schaltung war dieselbe wie in Abb. 1 Im Oszillographen wurde der Strom in dem Kreise I bzw. II gemessen. Als Rückkoppelung wurden 2 der 6 Spulen verwendet. Die Daten der verwendeten Kreise waren:

Primärkreis	Sekundärkreis
$L_1 = 9{,}5$ Henry	$L_2 = 9{,}2$ Henry
$R_1 = 2690$ Ohm	$R_2 = 2610$ Ohm
$C_1 = \text{const.} = 25\,000$ bzw. $29\,500$ cm	$C_2 =$ variabel bis 120000 cm.

Die Koppelung $\tau = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$ betrug 0,4.



Zunächst wurde als erregende Röhre eine Spezialröhre von Schott und Gen. (M M. 5351) benutzt. Die Anodenspannung betrug bei allen Versuchen 440 Volt. Mit einem Teil des Sekundärkreises war ein Telephon lose gekoppelt. Nach Erregung der Röhre (primär betrug die Kapazität konstant 25000 cm) wurde nun die Kapazität des Sekundärkreises von einigen 100 cm immer weiter vergrößert. Dabei wurde der Ton, der zuerst nahe bei der Eigenschwingung des Primärkreises lag, immer tiefer; an der Resonanzstelle trat nichts Besonderes ein, sondern der

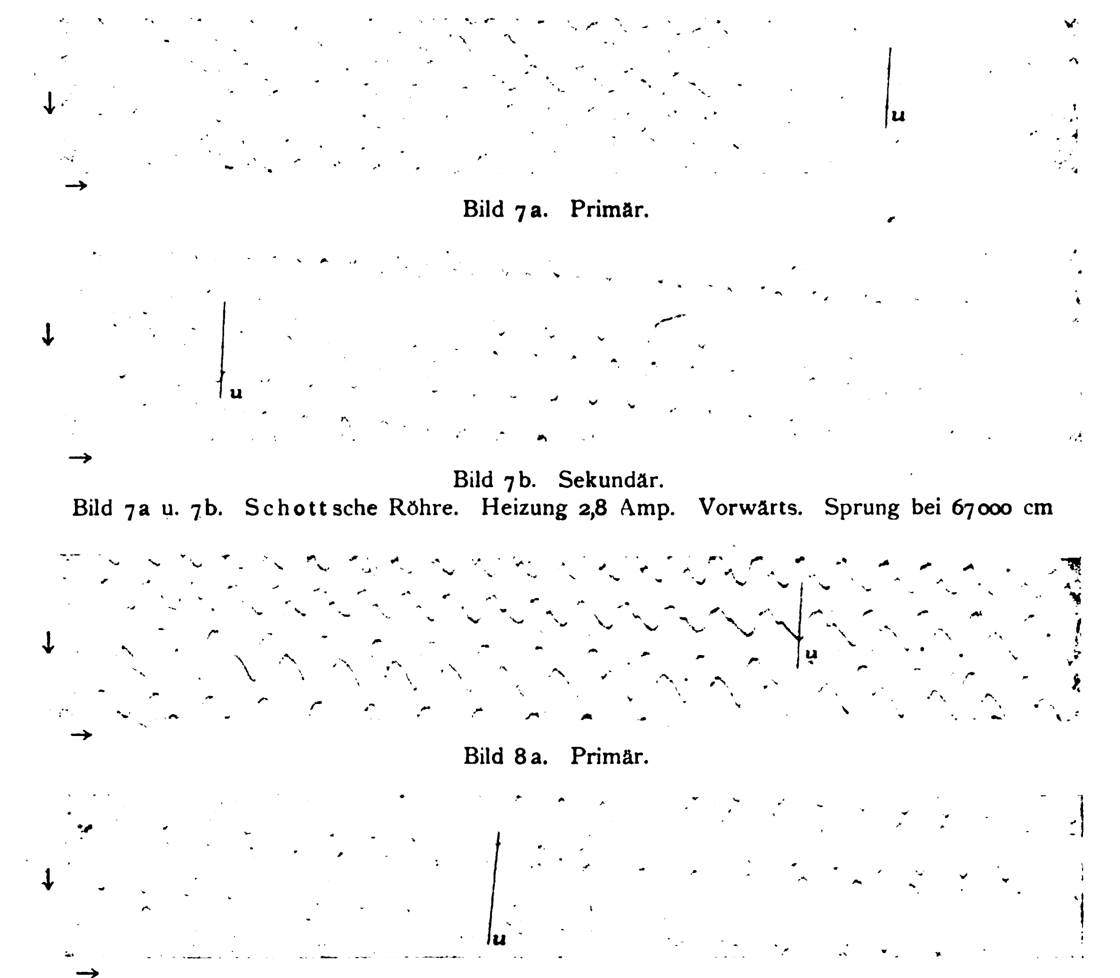


Bild 7a. Primär.

Bild 7b. Sekundär.

Bild 7a u. 7b. Schottsche Röhre. Heizung 2,8 Amp. Vorwärts. Sprung bei 67000 cm

Bild 8a. Primär.

Bild 8b. Sekundär.

Bild 8a u. 8b. Schottsche Röhre. Heizung 2,8 Amp. Rückwärts. Sprung bei 59000 cm.

Ton wurde mit weiterer Vergrößerung der Kapazität regelmäßig tiefer, dann aber trat kurz vor 67000 cm eine schwache aber deutliche Erhöhung des Tones ein und bei 67000 cm das Umspringen in den hohen Ton, der innerhalb der Oktave des Tones vor dem Umspringen lag. Ging man mit der Kapazität weiter, so trat nach dem Sprung noch eine schwache Erhöhung, dann aber eine ganz langsame Vertiefung ein, die selbst beim Kurzschließen der Sekundärkapazität nicht wesentlich tiefer wurde. Ging man nun mit der Kapazität wieder zurück, so wurde der Ton wieder höher, bis kurz vor dem Umschlagen, das jetzt bei 59000 cm eintrat, der Ton etwas tiefer wurde.

Um das Umschlagen selbst oszillographisch festzuhalten, wurde folgendermaßen verfahren: Während der Verschluß geöffnet war und der Lichtstrahl über die

Trommel des Oszillographen geführt wurde, mußte gleichzeitig einer der Drehkondensatoren des Sekundärkreises so gedreht werden, daß das Umschlagen möglichst dann eintrat, wenn der Strahl gerade über die Trommel hinweglief. Nach einiger Übung ließ sich dies leicht erreichen [1]).

Die Photogramme 7a und 7b zeigen nun das Umschlagen im Primär- und Sekundärkreis beim Vorwärtsgehen, wie wir im folgenden, um uns kurz auszudrücken,

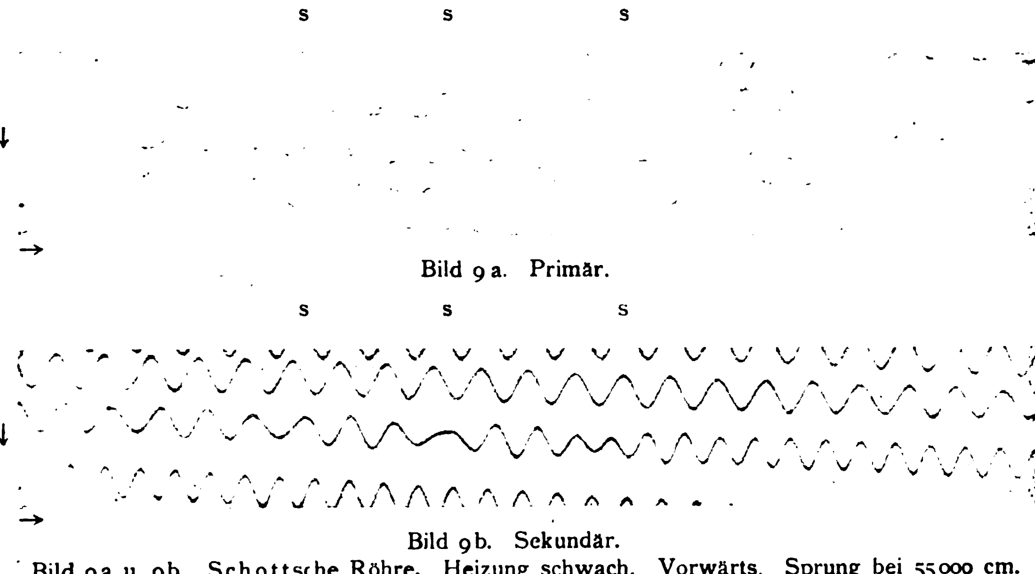


Bild 9a. Primär.

Bild 9b. Sekundär.

Bild 9a u. 9b. Schottsche Röhre. Heizung schwach. Vorwärts. Sprung bei 55000 cm.

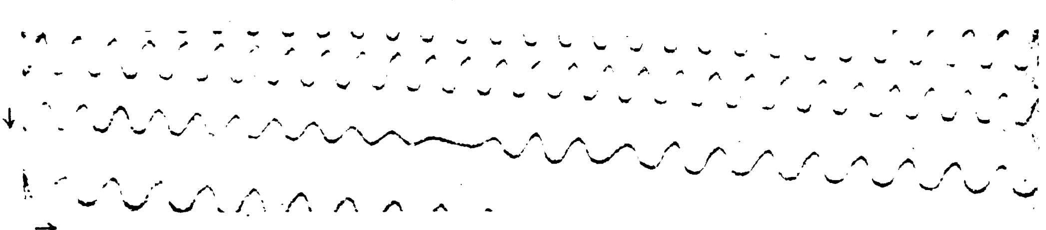


Bild 10a. Primär.



Bild 10b. Sekundär.

Bild 10a u. 10b. Schottsche Röhre. Heizung schwach. Rückwärts. Sprung bei 47000 cm.

die Variation von kleiner zu großer Kapazität nennen wollen. Zu bemerken ist, daß die Aufnahmen a und b nicht gleichzeitig, sondern nacheinander gemacht wurden, so daß sie nicht direkt miteinander vergleichbar sind. Die Stellen des Umspringens sind in den Bildern mit u bezeichnet. Man sieht, daß der Sprung der Frequenz

[1]) Zur Orientierung sei bemerkt, daß bei allen Aufnahmen die beiden Pfeile die zeitliche Bewegung andeuten. In Bild 7a fängt die Bewegung links oben an und das rechte Ende findet seine Fortsetzung wieder links in der nächsten Reihe.

hier sehr rasch vor sich geht. Vor u ist die Frequenz noch unverändert, während nachher sofort schon die höhere da ist. Die Amplitude nimmt allerdings hier in beiden Kreisen kurz vor dem Umschlagen etwas ab, um nach demselben sofort wieder konstant zu sein. Im Sekundärkreis haben wir fast reine Sinusschwingungen, während der Primärkreis stark verzerrt ist.

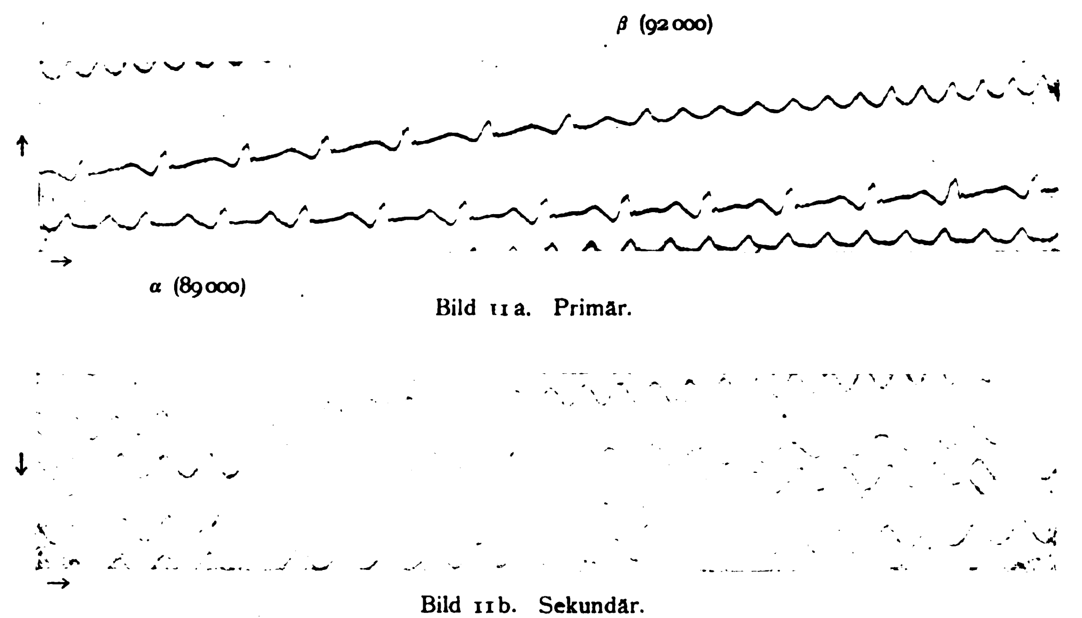


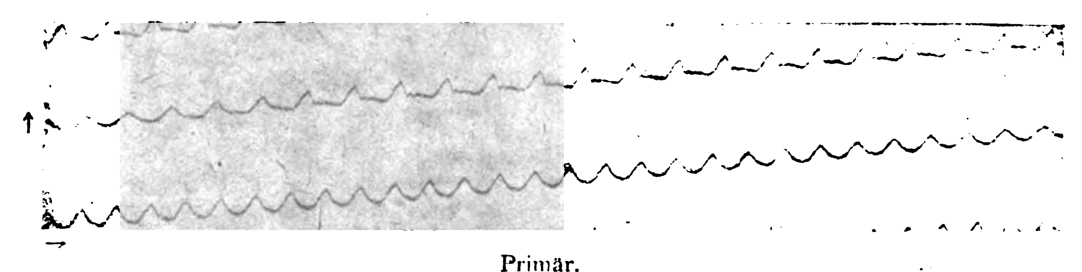
Bild 11a. Primär.

Bild 11b. Sekundär.

Bild 11a u. 11b. Röhre Studiengesellschaft. Normale Heizung. Vorwärts. Primär 29500 cm. Tiefer Ton vor dem Umschlagen bei 89000 cm. Sprung bei 92000 cm.

Die Aufnahmen 8a und b zeigen das Umschlagen beim Rückwärtsgehen. Wesentliche Unterschiede gegenüber den vorigen Aufnahmen sind nicht vorhanden. Das Springen geschieht auch hier ganz unvermittelt.

Ein ganz anderes Bild erhielten wir, als wir die Heizung der Röhre von 2,8 auf 2,55 Amp. herabsetzten. Das Springen trat jetzt bei kleinerer Kapazität, und zwar beim Vorwärtsgehen bei 55000 cm, beim Rückwärtsgehen bei 47000 cm ein.



Primär.

Bild 12. Röhre Studiengesellschaft. Normale Heizung. Rückwärts. Sprung bei 87000 cm.

Die bei den vorigen Aufnahmen a in der Nähe der Nullinie aufgetretenen Zacken waren verschwunden, wenn auch von reinen Sinusschwingungen, wie von vornherein zu erwarten, im Primärkreis keine Rede sein kann[1]). Das Umschlagen geschieht in beiden Kreisen nicht mehr momentan, sondern unter einigen Schwebungen.

[1]) Auf die Erklärung der Zacken gedenken wir in der nächsten Arbeit zurückzukommen. Vorläufig sei nur bemerkt, daß sie wahrscheinlich mit der Änderung der Heizung und der Anregung der Röhre nicht zusammenhängen.



Man vergleiche dazu die Aufnahmen 9 und 10, die wieder zunächst das Springen beim Vorwärtsgehen (9) und dann beim Rückwärtsgehen zeigen (10). Auffallend ist, daß die Schwebungen beim Rückwärtsgehen viel weniger ausgebildet sind.

Benutzten wir andere Röhren, so waren die Erscheinungen im wesentlichen dieselben, nur trat der Sprung nicht mehr ganz an derselben Stelle ein.

Bei einer Röhre (Studiengesellschaft für elektrische Leuchtröhren, ohne No.) zeigte sich allerdings eine besondere Erscheinung, die sehr stark von allen variablen Faktoren abhängig, nicht immer bei allen Röhren zu erhalten war. Beim Vorwärtsgehen schlug plötzlich (die Daten der Kreise waren dieselben wie oben angegeben. C_1 war konstant = 29500 cm) bei einer Sekundärkapazität von ca. 89000 cm (α Bild 11) der Ton in seine tiefere Oktave um, um dann erst bei 92000 cm (β Bild 11) den üblichen Sprung in die Höhe zu tun. In den Aufnahmen 11 und 12 sind diese Verhältnisse festgehalten, und zwar in 11a und b für das Vorwärtsgehen. Besonders im Sekundärkreis tritt die charakteristische Form dieses ganz tiefen Tones hervor. Man vergleiche auch Abb. 14, aus der hervorgeht, daß der Ton aus zwei Schwingungen im Verhältnis 1 : 2 zusammengesetzt ist, von denen die tiefere die kleinere Amplitude besitzt.

Aufnahme 14 gibt die Schwingungsformen unmittelbar vor Einsetzen, des ganz tiefen Tones, und nach dem Umschlagen noch einmal einzeln wieder. Nicht unter

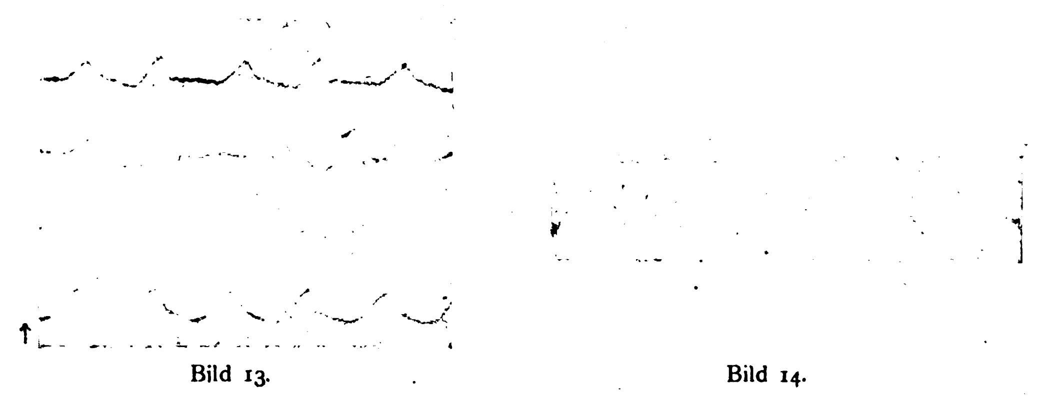


Bild 13. Bild 14.

allen Umständen war der ganz tiefe Ton stabil, wie bei dieser Anordnung. Manchmal ertönte er nur ganz kurz vor dem Springen. Beim Rückwärtsgehen trat er aber, wie aus Aufnahme 12 hervorgeht, nicht ein, sondern der Sprung vollzog sich in der üblichen Weise. Auf die Ursachen des Eintretens dieser besonderen Erscheinung gedenken wir nächstens näher einzugehen.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird bei den modernen Röhrensendern auftretende, für die Praxis sehr unangenehme Koppelungserscheinung, das sogenannte „Ziehen“, beschrieben.

Dann wird ein kurzer Auszug aus der bisher die Koppelungserscheinungen am besten umfassenden Theorie von M. Wien gegeben und besonders auf die Schwingungszahlen und Dämpfungen der entstehenden Koppelungsschwingungen hingewiesen.

Hierauf werden die Oszillogramme besprochen, die von dem Umschlagen der Frequenz aufgenommen wurden und auf einige hierbei zutage getretene besondere Erscheinungen aufmerksam gemacht.

Verlustmessungen bei Hochspannung.

Von

Alfred Semm.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Verlustmessungen an Hochspannungskabeln führte Höchstädter[1]) mit dem Wattmeter aus. Hierfür war die Benutzung eines Spannungswandlers nötig, dessen von der Spannung abhängiger Winkelfehler bei der außerordentlich großen Phasenverschiebung nicht vernachlässigt werden darf. Für sehr hohe Spannungen kommt die Wattmetermethode kaum in Frage, da Meßwandler für Spannungen über 50 kV wohl selten zur Verfügung stehen. Die Genauigkeit der Wattmetermethode bei Hochspannung ist keine große.

Monasch[2]) benutzte zur Bestimmung von dielektrischen Verlusten in Kondensatoren eine Brückenmethode, allerdings nur bis zu Spannungen von etwa 10 kV.

Petersen[3]) gibt eine elektrometrische Leistungsmessung mit Kondensatoren als Spannungsteiler an, wobei der Kondensator auf der Hochspannungsseite ein besonders ausgebildeter Zylinderkondensator ist.

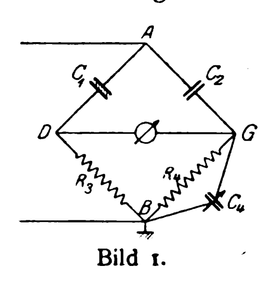


Bild 1.

Herr Professor Schering regte mich an, die folgende Brückenmethode zu erproben.

Es ist: C_1 der Verlustkondensator, C_2 ein verlustfreier Kondensator, R_3 und R_4 kapazitäts- und induktionsfreie Widerstände, C_4 eine variable Kapazität. Die Hochspannung liegt zwischen A und B, Punkt B ist geerdet. Das Nullinstrument liegt zwischen D und G.

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 die Scheinwiderstände der 4 Brückenzweige, α_1, α_2, α_3, α_4 die zugehörigen Phasenverschiebungen und δ der Verlustwinkel im Zweig 1, so gilt allgemein

$$S_1 S_4 = S_2 S_3 \qquad (1)$$

und

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\alpha_2 = -90^0$$

und

$$\alpha_3 = 0$$

also

$$\alpha_1 + \alpha_4 = -90^0$$

oder, da

$$\alpha_1 + \delta = -90^0$$

$$-(\alpha_1 + 90^0) = \alpha_4 = \delta. \qquad (2)$$

Nun ist die Tangente des Phasenwinkels bei der Kombination: Kapazität parallel Widerstand gleich $-R\,\omega\,C$, also

$$\mathrm{tg}\,\delta = \mathrm{tg}\,\alpha_4 = -R_4\,\omega\,C_4.$$

Einen Verlustkondensator kann man auffassen als einen verlustfreien Kondensator mit parallel oder in Reihe geschaltetem Widerstand. Für vorliegende Rechnung ist der letztere Fall günstiger. Der in Reihe geschaltet gedachte Widerstand sei mit R_1 bezeichnet.

Der Wattverbrauch P des Verlustkondensators berechnet sich aus:

---

1) Höchstädter, ETZ. 1910, S. 467 ff.
2) Monasch, Dissertation Danzig 1906.
3) Petersen, Hochspannungstechnik, 1911, S. 104.

$$P = \left(\frac{E}{S_1}\right)^2 R_1, \tag{3}$$

wobei R_3 gegen den sehr großen Widerstand R_1 vernachlässigt werden kann.

Nun ist bei der Kombination: Kapazität parallel Widerstand:

$$\frac{S}{\cos\alpha} = R \text{ und } \frac{S}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\omega C} \tag{4}$$

und bei der Kombination: Kapazität und Widerstand in Serie:

$$S\cos\alpha = R \text{ und } S\sin\alpha = -\frac{1}{\omega C}. \tag{5}$$

Zur Bestimmung von R_1 wird Gleichung (1) mit $\cos\alpha_1$ erweitert:

$$S_1 \cos\alpha_1 \frac{S_4}{\cos\alpha_1} = S_2 S_3.$$

Nach Gleichung (2) ist aber $\cos\alpha_1 = -\sin\alpha_4$, also

$$-S_1 \cos\alpha_1 \frac{S_4}{\sin\alpha_4} = S_2 S_3.$$

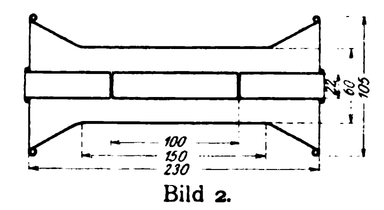


Bild 2.

Unter Berücksichtigung von Gleichung (4) und (5) ergibt sich

$$\frac{R_1}{\omega C_4} = \frac{R_3}{\omega C_2},$$

$$R_1 = R_3 \frac{C_4}{C_2}. \tag{6}$$

Erweitert man Gleichung (1) in derselben Weise mit $\sin\alpha_1$, so findet man

$$C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \tag{7}$$

Alsdann ergibt sich aus den Gleichungen (2), (3), (5) und (6)

$$P = \frac{E^2}{R_3} \cdot \frac{C_2}{C_4} \sin^2\delta.$$

Bei sehr kleinem δ kann man $\sin\delta = \operatorname{tg}\delta = -R_4\,\omega\,C_4$ setzen, bei größerem δ wurde $\sin\delta = f \cdot \operatorname{tg}\delta = -f \cdot R_4\,\omega\,C_4$ unter Zuhilfenahme einer Kurve für $\frac{\sin\delta}{\operatorname{tg}\delta} = f$ berechnet.

Der verlustfreie Kondensator C_2 war ein Zylinderkondensator nach der von Petersen[1]) angegebenen Bauart mit Luft als Dielektrikum (siehe Bild 2). Der äußere Zylinder, der an die Hochspannung gelegt wurde, hatte trompetenartig erweiterte Enden, die durch einen Wulst abgerundet waren, um Sprühverluste zu vermeiden. Der innere Zylinder hing koaxial im äußeren und trug an seinen Enden isoliert je einen geerdeten koaxialen „Schutzzylinder" von gleichem Radius, um ein gleichförmiges Feld im Kondensator zu erreichen. Die Enden der Schutzzylinder waren ebenfalls mit einem metallischen Wulst abgeschlossen. Die Kapazität eines solchen Kondensators läßt sich nach Petersen[1]) genau berechnen, und zwar ist die Kapazität in cm, wenn $\frac{r_2}{r_1} = e$ (e = Basis der natürlichen Logarithmen), gleich

[1]) **Petersen**, Hochspannungstechnik, 1911, S. 16 ff.

der halben Länge des inneren Zylinders des Meßkondensators, in diesem Falle also

$$C_1 = 50 \text{ cm} = 5{,}56 \cdot 10^{-5} \mu\text{F}.$$

Ein solcher Zylinderkondensator bietet den großen Vorteil, daß sein elektrisches Feld nicht durch andere Felder gestört werden kann. Der Kondensator konnte bis über 100 kV gebraucht werden, ohne daß ein Überschlag eintrat. Bei den benutzten Spannungen bis 100 kV war kein Sprühen oder Glimmen sichtbar. Die Zuleitung von dem inneren Zylinder nach Punkt G verlief koaxial in einem geerdeten Rohr von 70 mm Durchmesser, um eine Beeinflussung durch elektrische Felder zu vermeiden, und war möglichst kurz gehalten. Die Kapazität der Leitung gegen das geerdete Rohr, die parallel zu Zweig 4 lag, war so gering, daß sie gegen C_4 vernachlässigt werden konnte. Parallel zu Zweig 3 lag eine Überspannungssicherung in Form eines durchlochten Glimmerblattes zwischen zwei Metallscheiben, um bei einem Durchschlag des Verlustkondensators die Hochspannung zu erden und so den Beobachter und die Apparatur zu schützen. Die Verbindung vom Verlustkondensator nach Punkt D wurde durch ein Panzerkabel hergestellt, dessen metallische Umhüllung aus demselben Grunde, wie bereits oben erwähnt, geerdet war. Wie eine Rechnung ergab, konnte auch die Kapazität dieses Zuleitungskabels vernachlässigt werden. Die variable Kapazität C_4 war ein Dreidekadenkurbelkondensator mit maximal 1 μF der Firma Siemens & Halske, dem bei höheren Werten ein Glimmerkondensator von ½ bzw. 1 μF parallel geschaltet wurde. Als Nullinstrument diente ein Vibrationsgalvanometer nach Schering und Schmidt[1]). Bei einer Versuchsreihe wurde R_3 konstant gelassen und R_4 und C_4 so lange verändert, bis das Galvanometer Null anzeigte. R_3 betrug bei den meisten Versuchen 200 Ω, R_4 maximal 6000 Ω, während C_4 höchstens 1,6 μF war.

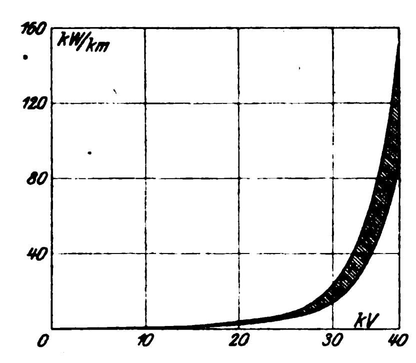


Bild 3. Die Leerlaufverluste des Drehstromkabels als Funktion der Spannung (1 Leiter gegen 2 Leiter und Mantel).

Mit dieser Methode wurden zwei Prüfungsaufgaben erledigt, die bei der Reichsanstalt beantragt waren. Bei der ersten sollten die Leerlaufverluste eines Drehstromkabels für 15 kV Betriebsspannung in Abhängigkeit der Zeit und der Spannung bestimmt werden. Zur Verfügung stand ein 5 m langes Kabelstück. Die drei Adern wurden an beiden Enden trichterförmig auseinandergebogen und in einer Papiertüte mit Vergußmasse vergossen, um einen Überschlag von Ader zu Ader oder nach dem Bleimantel zu verhüten. Sämtliche Messungen wurden mit einer Wechselspannung von 50 per/s ausgeführt. In einem Vorversuche wurde festgestellt, daß die drei Adern elektrisch sich gleichartig verhielten. Bei Bestimmung der Leerlaufverluste in Abhängigkeit der Spannung zeigte sich, daß die Verluste mit der Zeit zunahmen. Es wurde deshalb so verfahren, daß die Spannung alle 10 Minuten schrittweise gesteigert und die Verlustmessung zu Anfang und Ende eines solchen Zeitabschnittes ausgeführt wurde (siehe Bild 3, wo die obere Kurve einer zehnminutlichen Beanspruchung entspricht). Die Verluste sind umgerechnet auf $\frac{\text{kW}}{\text{km}}$.
Unter „Spannung“ ist hier stets die effektive gemeint; sie wurde aus der primär am Transformator gemessenen und dem Übersetzungsverhältnis berechnet.

Höchstädter[2]) fand bei seinen Untersuchungen an Drehstromkabeln, daß die Verluste eines Leiters gegen die beiden anderen + Mantel rund dreimal kleiner

[1]) Schering und Schmidt, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1918, S. 1.
[2]) ETZ., 1910, S. 509.



waren als bei der Schaltung: drei Leiter gegen Bleimantel. Bei dem hier untersuchten Kabel waren die Verhältnisse anders; die Verluste betrugen in der Schaltung:

	Nach 0 Minuten	Nach 30 Minuten
	Beanspruchungsdauer bei 30 kV	
1 Leiter gegen 2 Leiter und Mantel	8,5 $\frac{kW}{km}$	35,5 $\frac{kW}{km}$
2 Leiter gegen 1 Leiter und Mantel	11,1 „	47,0 „
3 Leiter gegen Mantel	12,0 „	32,6 „

Die Verluste änderten sich also verschieden mit der Zeit. Dies ist deutlicher aus Bild 4 ersichtlich. Die Kurven zeigen, daß bei längerer Beanspruchungsdauer die Verluste dauernd weiter steigen und schließlich den Durchschlag herbeiführen würden. Die gleichen Kurven für die Spannungen 15, 20 und 30 kV sind in Bild 5 dargestellt.

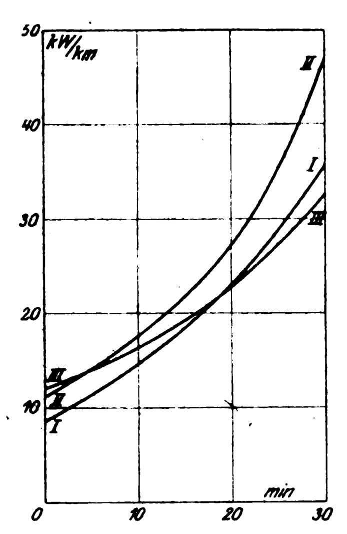


Bild 4. Die Leerlaufverluste des Drehstromkabels als Funktion der Beanspruchungsdauer bei E = 30 kV.
I 1 Leiter gegen 2 Leiter und Mantel,
II 2 Leiter gegen 1 Leiter und Mantel,
III 3 Leiter gegen Mantel.

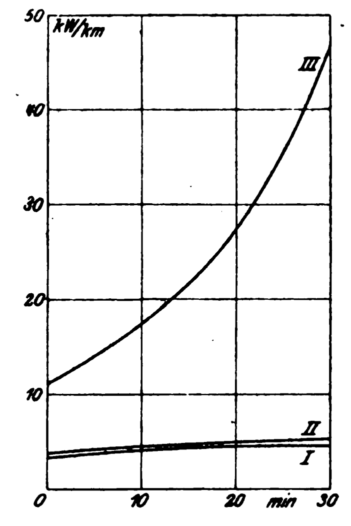


Bild 5. Die Leerlaufverluste des Drehstromkabels als Funktion der Beanspruchungsdauer (2 Leiter gegen 1 Leiter und Mantel).
I Spannung E = 15 kV,
II „ E = 20 kV,
III „ E = 30 kV.

Bei E = 15 und 20 kV stellte sich nach 20 bis 30 Minuten ein stationärer Zustand ein, während bei E = 30 kV die Verluste schnell zunahmen, so daß voraussichtlich bei genügend langer Dauer ein Durchschlag eingetreten wäre. Das Tränköl wurde bereits an den Enden herausgedrückt. Die Verluste dieses Kabels waren ungewöhnlich hoch, es handelte sich um eine Kriegsqualität.

Die Vorschriften des Verbandes Deutscher Elektrotechniker haben für Kabel die höchst zulässige Stromstärke und damit die obere Grenze der Kupferverluste festgelegt, sie schreiben ferner eine halbstündige Prüfung mit dem Doppelten der Betriebsspannung vor, Bestimmungen über die zulässigen dielektrischen Verluste gibt es indes noch nicht. Die vorstehenden Versuche zeigen, daß auch hier Normalien wünschenswert erscheinen.

Aus diesem Beispiel läßt sich ersehen, wie man mit Hilfe der beschriebenen Methode die Spannung ermitteln kann, bei der die Leerlaufverluste eines Kabels so groß werden, daß bei längerer Beanspruchung mit dieser Spannung ein Durchschlag erfolgen würde, ohne daß bei der Untersuchung das Kabel durchschlagen wird.

Als zweites Beispiel für die Anwendung der genannten Methode sei folgendes angeführt:

Es war der Verdacht geäußert worden, Isolatoren aus organischem Material (Hartpapier) könnten durch die vom Verband Deutscher Elektrotechniker vorgeschriebene halbstündige Prüfung mit dem Doppelten der Betriebsspannung insofern Schaden leiden, als dadurch die Lebensdauer bei der Betriebsspannung selbst verringert würde.

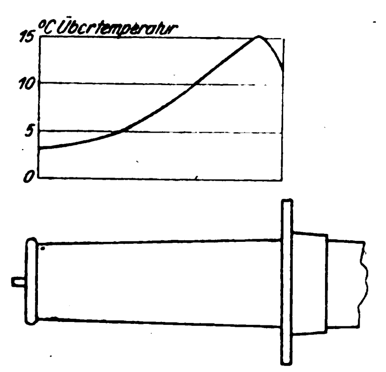


Bild 6. Die Oberflächentemperatur des Durchführungsisolators nach einer Beanspruchung von 72 Stunden mit 100 kV, längs einer Geraden gemessen.

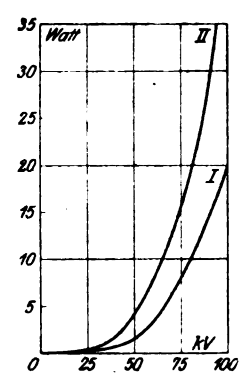


Bild 7. Die dielektrischen Verluste des Durchführungsisolators als Funktion der Spannung.
I Vor der Beanspruchung.
II Nach 154 Stunden Beanspruchung mit 100 kV.

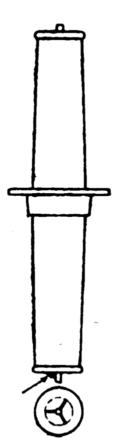


Bild 8.

Die Versuche wurden an einem Durchführungsisolator für 50 kV Betriebsspannung vorgenommen.

Zur Prüfung wurde der Isolator einer Dauerbeanspruchung mit der doppelten Betriebsspannung unterzogen. Mit zunehmender Beanspruchungsdauer zeigte sich eine Erwärmung des Isolators (die Temperaturverteilung auf der einen Hälfte des Isolators nach 72 Stunden der Beanspruchung ist in Bild 6 dargestellt).

Die dielektrischen Verluste wurden zu Beginn und nach 154 Stunden in Abhängigkeit der Spannung bis zu 100 kV bestimmt. Die Anordnung war so getroffen, daß die Verluste nur im Innern des Isolators gemessen wurden. Wie Bild 7 zeigt, hatten die Verluste beträchtlich zugenommen. Erst nach 277 Stunden trat an einer der beiden Endscheiben ein Funkenübergang in der in Bild 8 gezeichneten Weise ein. Das Durchschmelzen einer dünndrähtigen Sicherung in der Primärleitung des Transformators verhütete ein Ausbrennen der schadhaften Stelle. Trotz des Überschlags konnte der Isolator noch bis nahezu 90 kV beansprucht werden, ohne daß Funken überschlugen.

Nach einer Pause wurde nunmehr der Isolator bei der Betriebsspannung selbst dauernd beansprucht. Die Verluste änderten sich dabei nicht wesentlich und blieben auch während 600 Stunden nahezu konstant. Erst nach einer nochmaligen starken Beanspruchung mit 100 kV, verbunden mit lebhaftem Funkenübergang, setzte auch bei 50 kV eine Entladung in langsamer Funkenfolge ein.

Die Versuche zeigen also, daß eine Schädigung des Isolators durch eine halbstündige Prüfung mit der doppelten Betriebsspannung nicht zu erwarten ist.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 2. u. 3. Heft. 1920.

Das asynchrone Anlaufmoment der Synchronmaschine.

Von

Dr.-Ing. **Ludwig Dreyfus.** Ludvika (Schweden).

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Formulierung des Problems.

Legt man die Arbeitswicklungen einer mehrphasigen Synchronmaschine bei Stillstand an (reduzierte) Spannung, so wird in den massiven Teilen des magnetischen Kreises eine Wirbelströmung induziert, die mit den Ankeramperewindungen ein Drehmoment ausbildet. Teils in der Absicht, diese Wirkung zu unterstützen, teils zur Stabilisierung des synchronen Betriebes versieht man die Polschuhe häufig noch mit einer Dämpfervorrichtung, die aus einem Gitter massiver Kupferstäbe besteht. Bei richtiger Wahl der Verhältnisse kann das resultierende Moment zum Anlassen der Maschine ausgenützt werden: Die Synchronmaschine läuft als Synchronmotor an, beschleunigt sich und fällt schließlich ohne eine besondere Schaltvorrichtung von selbst in Synchronismus.

Diese Start-Methode bezeichnet man als das „asynchrone Anlassen synchroner Maschinen“. Sie besitzt bereits für die Gegenwart eine große Bedeutung, die in der Zukunft — soweit man die Verhältnisse beurteilen kann — eher steigen als fallen wird. Denn während man sich bisher auf dem Kontinent damit begnügte, nur unbelastete Synchronmaschinen, namentlich Einankerumformer, auf die angegebene Weise „in Tritt zu bringen“, geht man jetzt nach dem Vorbild der Amerikaner dazu über, auch den belasteten Anlauf auf demselben Wege zu versuchen. — Damit ist die Methode



in ein Stadium getreten, in welchem sie der Theorie nicht mehr zu entbehren vermag. Denn bei belastetem Anlauf gilt es, mit jedem Prozent des Anlaufstromes zu geizen, und doch die größtmögliche Wirkung mit den geringsten Mitteln, den einfachsten Konstruktionen zu erzielen.

Wenn ich soeben bemerkt habe, daß die wachsende Bedeutung des asynchronen Anlaufes gebieterisch auf eine theoretische Behandlung des Problemes hinweise, so wollte ich damit nicht den Wert etwa schon vorhandener, an praktischen Ausführungen gewonnener Erfahrungen herabsetzen. Denn es muß von vornherein offen ausgesprochen werden: Das Problem ist zu kompliziert, als daß es sich in allen Teilen exakt behandeln ließe, und der Einfluß der zuweilen nicht unerheblichen Vernachlässigungen bedarf einer quantitativen Sicherstellung durch das Experiment. Wie stets in der Technik müssen sich auch hier Theorie und Praxis die Hände reichen.

Mannigfach sind die Schwierigkeiten, die sich der analytischen Behandlung entgegenstellen und es bedurfte nicht weniger als vier vorbereitender Untersuchungen, um diese Hindernisse schrittweise aus dem Wege zu räumen. Ich beziehe mich auf Veröffentlichungen in früheren Heften dieser Zeitschrift, betitelt:

I. „Die Feldverteilung und Wirbelstrombildung in den Ankern von Dynamomaschinen bei Ummagnetisierung durch hochperiodige Wechsel- und Drehfelder" (IV. Band, 1915, 4. Heft, S. 99).

II. „Über die Erregung eines massiven magnetischen Kreises durch Wechselstrom" (IV. Band, 1916, 10. Heft, S. 314).

III. „Über die Leitung eines Wechselflusses durch massive Joche und Polkerne von Dynamomaschinen" (V. Band, 1916, 6. Heft, S. 175)..

IV. „Das Feld im Luftraum beim asynchronen Anlauf synchroner Maschinen" (VII. Band, 1918, 3. u. 4 Heft, S 57).

Die Ergebnisse dieser theoretischen Arbeiten wollen wir jetzt benutzen, um das praktische Problem selbst zu lösen, das wir wie folgt präzisieren:

Wie berechnet man das asynchrone Anlaufmoment einer Synchronmaschine für die verschiedenen Bauformen des magnetischen Kreises, die sich in der Praxis eingeführt und behauptet haben, und auf welchem Wege erhält man die günstigsten Bedingungen für belasteten Anlauf?

Diese Fragestellung ist nicht so umfassend, als man es vielleicht wünschen möchte. Zunächst spreche ich nur von dem Anlaufmoment, nicht von der Veränderlichkeit des Momentes zwischen Stillstand und Synchronismus. Zwar setzen uns die zitierten Arbeiten in den Stand, auch diese Kurve vorauszuberechnen, und man würde so namentlich hinsichtlich des Verhaltens bei halbem Synchronismus interessante Aufschlüsse erhalten. Doch könnte man dabei die stark entwickelten Oberfelder schwerlich berücksichtigen, und so räume ich hier lieber von vorneherein der experimentellen Untersuchung das Feld.

Aber auch bei der Diskussion der günstigsten Anlaufverhältnisse habe ich mir einige Beschränkung auferlegt. Ein tüchtiger Berechner wird nämlich die Anlaufschaltung ziemlich verschieden dimensionieren, je nachdem die Synchronmaschine für stark oder schwach belasteten Anlauf bestimmt ist. Im ersten Falle ist mit Rücksicht auf die Ankererwärmung ein gewisser Maximalstrom vorgeschrieben, und es handelt sich darum, mit diesem Strom das höchste überhaupt erreichbare Drehmoment zu erzielen. — Dagegen sollte man bei schwach belastetem Anlauf mehr auf die Bedürfnisse der Zentrale Rücksicht nehmen und danach trachten, das verlangte kleine Moment mit einem geringen Aufwand von KVA zu erhalten. — Ähnlich liegen die Verhältnisse beim asynchronen Anlassen von Einankerumformern. Nur spricht hier — insbesondere bei Wendepolumformern — noch eine weitere Überlegung mit, das ist die Rüchsicht auf die Funkenbildung an den Kollektorbürsten.



Diese Funkengefahr ist unter sonst gleichen Umständen um so geringer, je tiefer man die Anlaufspannung herabdrücken kann. Es gibt daher sicher Fälle, in denen diese Rücksicht für die Auslegung der Anlaufschaltung entscheidend wird. Denn das Beispiel Amerikas, die Bürsten beim Anlauf abzuheben, hat man meines Wissens in Europa noch nicht nachgeahmt.

Immerhin ist man bei schwach belastetem Anlauf nicht so unbedingt an die Einhaltung der günstigsten Bedingungen gebunden, wie das die Erzielung eines hohen Anlaufmomentes erforderlich macht; und da ich mit Rücksicht auf den Umfang dieser Arbeit nicht alle 3 Gesichtspunkte vertreten kann, so beschränke ich mich auf den schwierigsten Fall, den hoch belasteten Anlauf.

Die Ankerrückwirkung und das normale Moment.

Im Gegensatz zu vielen anderen Problemen der Tecknik bietet beim asynchronen Anlauf die qualitative Behandlung keine Schwierigkeiten. Wer sich mit Wirbelstromerscheinungen auch nur oberflächlich beschäftigt hat, der kann sich mit Hilfe von Analogieschlüssen leicht ein ungefähres Bild des ganzen Vorganges entwerfen. Die Anlaufschaltung ist ja auch einfach genug. Mittels eines Anlaßtransformers reduziert man die normale Netzspannung gewöhnlich auf $^1/_3$ oder irgend einen Wert dieser Größenordnung und drückt dieses reduzierte, symmetrische Spannungssystem den Klemmen der Arbeitswicklung auf. Sobald sich die Maschine unter der Wirkung des Anlaufmomentes ein wenig dreht, verteilt sich der Strom der Netzfrequenz symmetrisch auf alle Phasen. Es ist jedem Elektroingenieur geläufig, die magnetomotorische Kraft dieses Mehrphasensystemes durch Drehamperewindungen auszudrücken, welche längs des Ankerumfanges sinusförmig verteilt sind und gegen die Arbeitswicklungen mit der synchronen, gegen die Pole mit der Schlüpfungsgeschwindigkeit ω (in elektr. Graden) rotieren. Ihre Amplitude $\hat{AW}$ ist leicht anzugeben. Es bezeichne bei:

Wechselstromwicklungen

- J den Effektivwert des Phasenstromes
- $\mathfrak{a}$ die Zahl der parallelen Kreise
- $\mathfrak{z}_0$ die Zahl der Nuten pro Polteilung
- $\mathfrak{z}$ die Zahl der Nuten pro Pol und Phase
- $\mathfrak{w}$ die Zahl der Leiter einer Nut

$$f = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_0}}{\mathfrak{z}\sin\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathfrak{z}_0}}$$ den Wicklungsfaktor einer Phase

t_p die Polteilung in cm

$$\overline{AS} = J\frac{\mathfrak{z}_0\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\cdot\frac{1}{t_p}$$ die effektive Ampereleiterzahl pro cm des Ankerumfanges.

Gleichstromwicklungen

- J den Effektivwert de Phasenstromes
- $2a$ die Zahl der parallelen Kreise
- s die Zahl der Wicklungselemente
- γ das Verhältnis $\frac{\text{Spulenbreite}}{\text{Polteilung}}$
- b die Zahl der Leiter eines Wicklungselementes

$$f = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\gamma}{\frac{\pi}{2}\gamma}$$ den Wicklungsfaktor einer Phase

R den Ankerradius in cm

$$\overline{AS} = J\cdot\frac{sb}{a}\cdot\frac{1}{2R\pi}$$ die effektive Ampereleiterzahl pr ocm des Ankerumfanges.

Dann besitzt die Grundwelle der spezifischen Ampereleiterzahl die Amplitude

$$\hat{AS} = \sqrt{2}\,f\cdot\overline{AS} \tag{1}$$

und daraus folgt für den Scheitelwert der sinusförmig verteilten Drehamperewindungen

$$\hat{AW} = \hat{AS}\,\frac{tp}{\pi}. \tag{2}$$

Um zu den Symmetrieverhältnissen der Induktionsströmung zu gelangen, zerlegen wir die „Drehamperewindungen" in zwei einusförmige Wellenzüge von „Wechselstromamperewindungen" (Bild 1). Diese sind nach den Achsen des Polkernes und Polzwischenraumes fest orientiert. Ihre Amplitude stimmt mit dem Scheitelwert der Drehamperewindungen überein, aber ihre Phase differiert um 90 Grade.

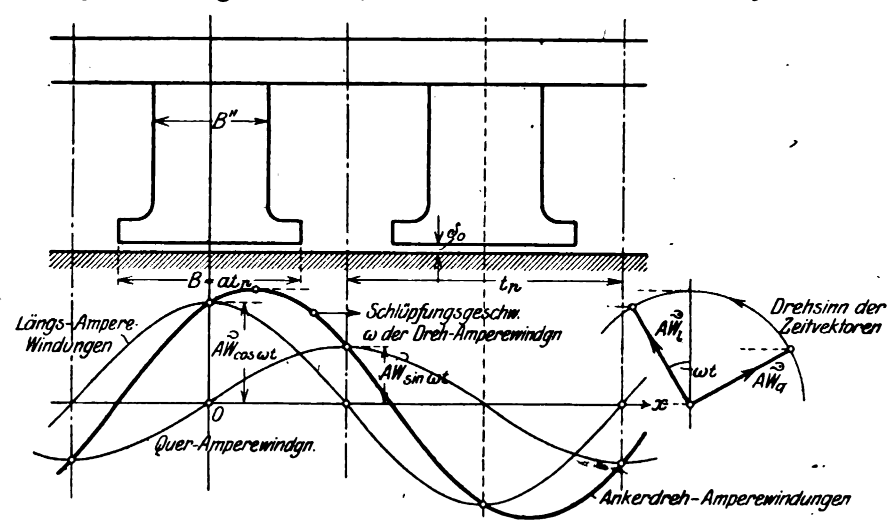


Bild 1. Auflösung der Ankererregung in Längs- und Queramperewindungen.

Die Längsamperewindungen

$$a\,w_l = \hat{AW}\cos\frac{\pi}{tp}x\cos\omega t$$

suchen einen Wechselfluß durch den magnetischen Kreis des Hauptfeldes zu lancieren, nehmen also auch Polkern und Joch für dessen Leitung in Anspruch. — Ihm fügen die Queramperewindungen

$$a\,w_q = \hat{AW}\sin\frac{\pi}{tp}x\sin\omega t$$

ein Querfeld hinzu, welches sich in der Hauptsache schon durch den Polschuh und der benachbarten Teile des Polkernes schließt, den Luftspalt rechts und links von der Polmitte in entgegengesetzter Richtung überbrückend. Daß wir diese beiden Teilfelder getrennt untersuchen, ist die erste Vernachlässigung, die wir uns erlauben. Denn die nachträgliche Superposition bei den Feldformen wäre eigentlich nur für konstante Eisenpermeabilität zulässig. Da aber die erregenden Wechselstromamperewindungen zeitlich in Quadratur stehen, so ist der begangene Fehler nicht groß.

Um die Rechnung noch weiter zu erleichtern, vereinfachen wir die Formgebung des magnetischen Kreises: Wir nehmen den Luftspalt über dem Polbogen

$$B = \alpha\,tp \ldots.\ \alpha = \text{Polbedeckungsfaktor}$$

von konstanter Größe δ_0 an und lassen die Kraftlinien ihn senkrecht überbrücken. Den magnetischen Widerstand der Zähne und des Ankers berücksichtigen wir durch einen kleinen Zuschlag zum Luftspalt, was umsoeher gestattet ist, als während der Anlaufperiode keine hohen Sättigungen auftreten. Den so definierten reduzierten Luftspalt des Längsfeldes unter dem Polbogen bezeichnen wir mit δ. Er ist wesentlich kleiner als der reduzierte Gesamtluftspalt $\bar{\delta}$, welcher der normalen Gleichstrom-Sättigung im synchronen Betrieb entspricht.

Im Polzwischenraum

$$C = (1-\alpha)\,t_p$$

darf man das Längsfeld vernachlässigen. Das Querfeld schätzen wir, indem wir die resultierende magnetomotorische Kraft durch einen reduzierten Luftspalt δ_c dividieren. — Die übrigen Vernachlässigungen hier anzuführen, ist überflüssig, da sie nur im Zusammenhang mit den zitierten Spezialarbeiten verstanden werden können.

Die Ausdrücke „Längs- und Queramperewindungen" erinnern an die gleiche Zerlegung der Amperewindungen bei synchronem Betrieb. Der einzige Unterschied ist, daß hier die Drehamperewindungen gegenüber den Polen eine feste Lage einnehmen, die nur von der inneren Phasenverschiebung zwischen Strom und EMK. der Drehung im Erregerfeld abhängt. Bei gegebenem Strom erhält man das größte Moment, wenn die Längsamperewindungen vollkommen verschwinden, die ganzen Ankerleiter also in der Achse des Querfeldes magnetisieren. — Ich zweifle natürlich nicht, daß diese Verhältnisse dem Leser durchaus geläufig sind. Doch liegt mir daran, für das Vollastmoment eine bequeme Schreibweise zu finden, um sie später als Maß für das synchrone Anlaufmoment gebrauchen zu können.

In Bild 2 bedeutet

$$\overline{B}_e = \frac{0{,}4\pi}{\delta}\,\overline{AW}_e$$

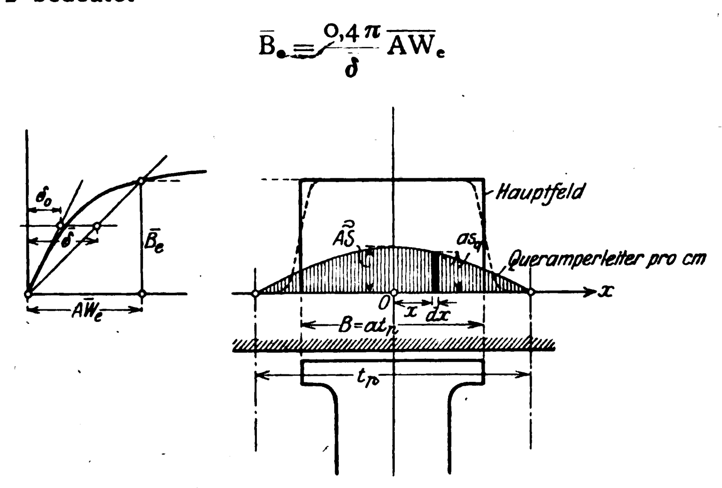


Bild 2. *Zur Berechnung des normalen Momentes.*

das durch die Erregerwicklung erzeugte Gleichfeld unter dem Polschuh; $\hat{AS}_q = \hat{AS}$ den Maximalwert der spezifischen Queramperelеiter, der diesmal mit dem Maximalwert $\hat{AS}$ der gesamten spezifischen Ankerleiter übereinstimmt. Auf das Stromvolumen $as_q \cdot dx$ üer dem Bogendifferential dx und der Längê L wirkt das Hauptfeld mit einer Kraft

$$dP = \overline{B}_e \cdot as_q\, dx \cdot L \cdot \frac{10^{-6}}{9{\cdot}81}\,\mathrm{kg}.$$

Summiert man diese Beiträge unter allen 2p-Polen und multipliziert mit dem Ankerradius R, so erhält man das Vollastmoment:

$$\left.\begin{aligned} D'^{\,\mathrm{mkg}}_{\mathrm{norm}} &= 2p \cdot RLB \cdot \overline{B}_e \cdot \hat{AS}\,\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \frac{10^{-8}}{9{,}81} \\ &= 4p \cdot RL \cdot \overline{B}_e \cdot \hat{AW} \sin\frac{\pi a}{2} \cdot \frac{10^{-8}}{9{,}81} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

oder mit Einführung des reduzierten Luftspaltes $\bar{\delta}$

$$D_{\text{norm}}^{\text{mkg}} = 1{,}6\pi \frac{10^{-8}}{9{,}81} \cdot p \frac{RL}{\bar{\delta}} \cdot \overline{AW}_e \cdot \hat{AW} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \qquad 4)$$

Das sind die Formeln, nach denen wir später das asynchrone Anlaufmoment bewerten müssen. Da hierin B_c bzw. $\bar{\delta}$ der Sättigungskurve zu entnehmen sind, so wird jedenfalls auch der Charakter dieser Funktion eine wichtige Rolle spielen.

A. Die leistungsfähige Bauart der Synchronmaschine: Magnetischer Kreis vollkommen lamelliert.

Ehe man spezielle Ausführungsformen der Synchronmaschine unter dem Gesichtspunkte des asynchronen Anlaufes kritisieren kann, muß man zuvor eines klar wissen, und das ist:

Welches größte Anlaufmoment könnte man einer Synchronmaschine mit ausgeprägten Polen entnehmen, wenn man in ihrer Konstruktion vollkommen freie Hand hätte?

Denn wissen wir dies, so besitzen wir einen Maßstab, an dem wir die Güte der gebräuchlichen Konstruktionen messen können.

Wie diese ideale Maschine auszulegen wäre, darüber können wir nicht lange im Zweifel sein. Unsere Startmethode ist dem Anlauf eines Mehrphaseninduktionsmotors nachgeahmt. Je näher wir daher diesem Vorbilde kommen, um so günstigere Verhältnisse dürfen wir erwarten. Müssen wir schon die ausgeprägten Pole beibehalten, so würden wir doch auf alle Fälle den ganzen magnetischen Kreis lamellieren und in den Polschuhen eine mehrphasige — am besten 2phasige — Wicklung unterbringen. Die erste Phase, die „Längsfelddämpfung" kann aus einer einzigen Kurzschlußwindung bestehen, welche den Polbogen umschließt. Die Querfelddämpfung hingegen würde man besser als fein verteilte Wicklung in besonderen Polschuhnuten unterbringen. Bei dieser Bauart verzögert die Kurzschlußwindung die Phase des Längsfeldes, so daß es mit den Queramperleitern des Ankers ein Drehmoment auszubilden vermag. Desgleichen hält die Querfelddämpfung die Phase des Querfeldes zurück, das so mit den Längsamperleitern zu beiden Seiten des Polzwischenraumes kontrastieren muß. Beide Drehmomente wirken im selben Sinne und wir haben die Anordnung so zu treffen, daß der Gesamteffekt möglichst groß ausfällt.

Dafür gäbe es offenbar kein wirksameres Mittel, als den Luftspalt δ_0 so klein als möglich zu halten. Denn dann könnte der Anker mit geringer Stromaufnahme schon ein starkes Treibfeld erzeugen, und gleichzeitig würde die Streuung zwischen den Stator- und Rotorwicklungen so vermindert, daß auch auf eine günstige Ausnutzung dieses Treibfeldes zu rechnen wäre. Leider hat die Sache einen Haken in der entmagnetisierenden Wirkung der Gegenamperewindungen, welchen der wattlose Anteil des Ankerstromes im normalen Betrieb ausbildet. Denn wenn man verlangt, daß diese ein gewisses Maß nicht überschreiten dürfe, so wird dadurch der magnetische Widerstand des Hauptfeldes, vornehmlich also der Luftspalt vorgeschrieben.

Trotzdem läßt sich die Situation retten, wenn wir, ohne den Widerstand des Längsfeldes herabzusetzen, das Querfeld soweit verstärken, als es bei Generatoren die Rücksicht auf den Spannungsabfall, bei Motoren die Rücksicht auf das Kippmoment erlaubt. Dafür sehe ich zwei Möglichkeiten: Die eine ist die Anbringung eines Hilfspoles im Polzwischenraum, so wie ihn etwa Wendepolumformer besitzen. Nur werden wir jetzt den Luftspalt möglichst klein ausführen, während man ihn bei Konvertern eher groß zu halten trachtet. — Das zweite Verfahren beruht auf einer Unterteilung des für das Längsfeld als notwendig erkannten Luftspaltes. Mein Vorschlag ist, auf Kosten des Luftraumes zwischen

Polschuh und Anker einen 2. Spalt an der Berührungsfläche von Polkern und Joch einzufügen (Bild 3). Vertrat also bisher δ den gesamten Widerstand des magnetischen Kreises — d. h. des Eisenweges und des Luftraumes δ_0 — so würde jetzt δ' nur die verkleinerten Luftspalt (δ_0') und den auf einen Luftweg umgerechneten

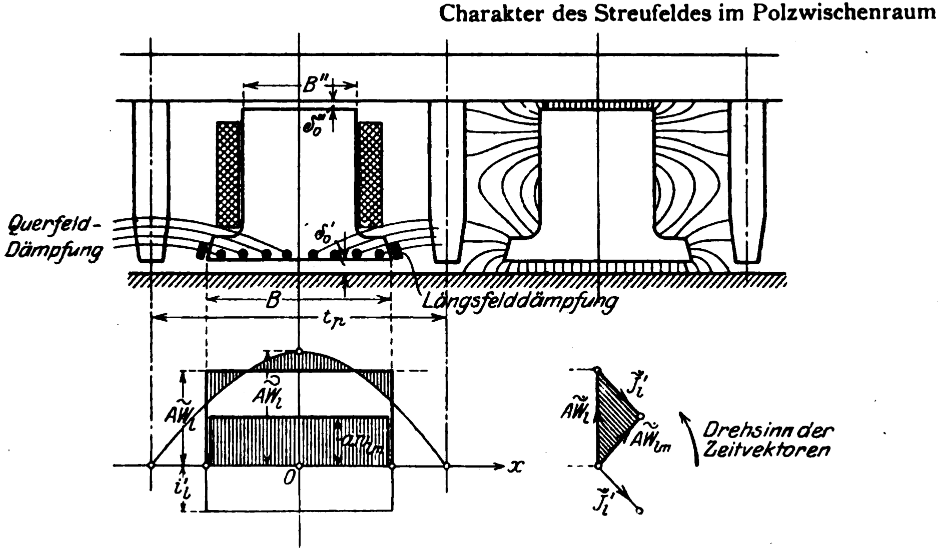


Bild 3. Sychronmaschine mit unterteiltem Luftspalt. Zusammensetzung der Längsamperewindungen.

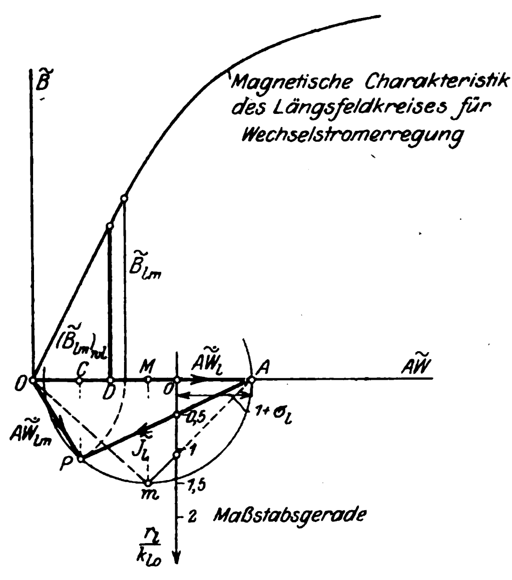


Bild 4. Kreisdiagramm der Längsamperewindungen.

Widerstand der Zähne und des Ankers umfassen. Hingegen verstehen wir unter δ'' den neu eingeführten Luftraum δ_0'' einschließlich der hierauf reduzierten Widerstände von Polkern und Joch.

Beliebig viele Kombinationen zwischen δ_0, δ_0' und δ_0'' sind möglich, ohne daß deshalb die Rückwirkung der Gegenamperewindungen im Synchronismus anders ausfiele als bei einem einzigen Luftspalt δ_0. Es braucht nur auf die Nebenbedingung

$$\delta_o = \delta_o' + \delta_o'' \frac{BL}{B'L''} \qquad 5)$$

geachtet werden. Je kleiner δ_o', um so wirksamer wird das Querfeld verstärkt, da nur die Längsfeldlinien den Luftspalt δ_o'' zu passieren haben. Bemerkenswert ist, daß durch die Unterteilung des Luftspaltes auch die magnetische Streuung im Polzwischenraum vermindert wird und das selbst bei einer etwaigen Verkürzung der Streulinien infolge eines eingebauten Hilfspoles (Bild 3).

Zum Schlusse haben wir noch zu überlegen, in welchem Verhältnis die Unterteilung des Luftspaltes am besten vorzunehmen ist. Hier sind vor allem konstruktive Rücksichten maßgebend. Es wird nämlich praktisch nicht gut augehen, den normalen Luftspalt δ_o auf weniger als die Hälfte bis ein Drittel zu reduzieren. In elektrischer Hinsicht sind das aber auch gerade recht glückliche Grenzen. Denn damit läßt sich erreichen, daß die Grundwellen des Längs- und Querfeldes genau oder nahezu gleich groß ausfallen und sich zu einem einzigen synchron gegen den Anker rotierenden Drehfeld vereinigen.

Das ist nicht unwichtig. Denn nur in diesem Falle führt die Arbeitswicklung ausschließlich eine symmetrische Stromverteilung der Netzfrequenz. In jedem anderen Falle hingegen liefert die Maschine einen parasitären Mehrphasenstrom ans Netz zurück, dessen Periodenzahl ν_p der des Netzes, vermindert um das Doppelte, der Schlüpfungsfrequenz ν_s gleichkommt. Also:

$$\nu_p = \nu - 2\,\nu_s.$$

Die Rückwirkung dieses parasitären Stromes äußert sich in einem starken Bremsmoment und bei zu großen Unsymmetrien kann es vorkommen, daß selbst der unbelastete Rotor in der Gegend des halben Synchronismus kleben bleibt. Bekanntlich liefert der Drehstrommotor mit einphasigem Rotor eine ganz ähnliche Erscheinung, die unter der Bezeichnung der „einachsigen Schaltung" in der Literatur beschrieben worden ist[1]).

Hat man den Luftspalt nach den erörterten Gesichtspunkten unterteilt und die Dämpferstreuung durch geeignete Wicklungsanordnung auf ein Mindestmaß beschränkt, dann bleibt nur noch eines übrig, nämlich: die Widerstände der Dämpferwicklungen auf ein Maximum ihrer Wirksamkeit zu dimensionieren. Das ist eine Aufgabe, die wir bei jedem Mehrphaseninduktionsmotor mit Anlaßanker zu lösen haben, und die uns daher weder begriffliche noch rechnerische Schwierigkeiten verursachen kann.

Das Längsfeld[2]).

Auf den magnetischen Kreis des Längsfeldes wirkt der Anker mit sinusförmig verteilten Amperewindungen, die unter dem Polbogen den Scheitelwert $\hat{\hat{AW}}_l = \hat{\hat{AW}}$ und den Mittelwert

$$\dot{\hat{AW}}_l = \dot{\hat{\hat{AW}}}_l \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} \qquad 6)$$

[1]) Vergleiche: Dreyfus, „Die Theorie der einachsigen Schaltung des Drehstromasynchronmotors". Berlin 1909. Verlag Ernst v. Sohn.

[2]) Zeichenerklärung: Mit aw, B, i, e . . . bezeichne ich Augenblickswerte.
„ $\tilde{AW}$, $\tilde{B}$, $\tilde{J}$, $\tilde{E}$ . . zeitliche Maximalwerte von Sinusfunktionen.
„ $\widehat{AW}$, $\widehat{B}$ . . . . örtliche Maximalwerte.
„ $\hat{\hat{AW}}$, $\hat{\hat{B}}$ . . . . Maxima der Zeit und des Ortes.
Soll eine Wechselstromgröße als Zeitvektor gedeutet werden, so wird über dem Zeichen ein Punkt beigefügt, also:

$$\dot{AW},\ \dot{\hat{AW}}\ \text{usw.}$$



aufweisen (siehe Bild 3). Ihnen setzt die Längsfelddämpfung ihre einzige Windung mit einem Stromvolumen $\dot{J}_1'$ entgegen. Unter der Summenwirkung beider Stromkreise entwickelt sich ein Feld, dessen mittlere Induktion unter dem Polschuh, d. i.

$$\dot{B}_{1m} = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\dot{AW}_{1m} = \frac{0.4\,\pi}{\delta}\,(\dot{AW}_1 + \dot{J}_1) \qquad 7)$$

so gut wie ausschließlich von der Größe des reduzierten Gesamtluftspaltes δ abhängt. Nur in der Feldform macht sich die Unterteilung des Luftspaltes fühlbar, und daran wird man denken müssen, wenn man zu einem gegebenen Anlaufstrom die Anker-Klemmspannung berechnen soll. Man wird dann nur mit der ersten Harmonischen des Längsfeldes und später auch des Querfeldes operieren, aus ihnen die resultierende Drehfeldspannung der Netzfrequenz ableiten und dazu die Spannungsabfälle der Streuung und des Ohmschen Widerstandes addieren. Diese Rechenoperationen will ich jedoch nicht weiter ausführen. Sie sind einfach, sobald man durch die Bestimmung der Dämpferströme die Untersuchung auf eine feste Grundlage gestellt hat, und damit will ich mich hier begnügen[1]).

Für die Induzierung der Dämpferwindung kommt nur die im ganzen umfaßte Kraftlinienzahl und daher der Feld-Mittelweg $\dot{B}_{1m}$ in Frage. Durch ihn wird eine EMK.

$$\dot{E}_{1o}' = j\,\omega\,\dot{B}_{1m}\cdot BL\cdot 10^{-8}\ \text{Volt} \qquad 8)$$

ins Leben gerufen, welche durch die Spannungsabfälle der Streuung

$$\dot{E}_{1\sigma}' = j\,\dot{J}_1'\,K_{1\sigma}\ \ldots\ldots\ K_{1\sigma} = \text{Streureaktanz}\,^{2)}$$

und des Ohmschen Widerstandes

$$\dot{E}_{1r}' = -\,\dot{J}_1'\,r_1$$

kompensiert werden muß. Es ist also einerseits

$$\dot{E}_{1o}' = \dot{J}_1'\,(r_1 - j\,K_{1\sigma}),$$

andererseits aber auch nach Gleichung (7) und (8)

$$\dot{E}_{1o}' = j\,(\dot{AW}_1 + \dot{J}_1')\cdot K_{1o},$$

wenn

---

[1]) Für den Scheitelwert der ersten Längsfeldharmonischen erhält man die Vektorgleichung

$$\hat{\dot{B}}_{1\mathrm{I}} = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\hat{\dot{AW}}_{1\mathrm{I}} \qquad 7\text{a})$$

mit

$$\hat{\dot{AW}}_{1\mathrm{I}} = \hat{\dot{AW}}_1\,\alpha\left[\left(1 + \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)\frac{\delta}{\delta'} - 2\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\right] + \dot{J}_1'\,\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}. \qquad 7\text{b})$$

Daraus würde sich z. B. für den gebräuchlichsten Polbedeckungsfaktor $\alpha = \frac{2}{3}$ ableiten:

$$\dot{AW}_{1m} = 0{,}827\,\hat{\dot{AW}}_1 + \dot{J}_1'$$

aber

$$\hat{\dot{AW}}_{1\mathrm{I}} = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\left[\left(0{,}828 + 0{,}030\,\frac{\delta}{\delta'}\right)\hat{\dot{AW}}_1 + \dot{J}_1'\right].$$

Die Grundwelle $\hat{\dot{B}}_{1\mathrm{I}}$ nimmt also mit der Verkleinerung des Luftspaltes δ_o' zwischen Anker und Polschuh ein wenig zu und eilt in ihrer Phase dem Mittelwerte $\dot{B}_{1m}$ ein wenig vor.

[2]) In dieser „symbolischen" Schreibweise bezeichnet ${}_j\dot{J}$ einen Vektor gleicher Größe wie $\dot{J}$, der jedoch gegen die Richtung von $\dot{J}$ um 90° elektrische Grade nacheilt. Man kann dem Symbol j die Bedeutung $\sqrt{-1}$ beilegen und die Rechenregeln für imaginäre bzw. komplexe Größen anwenden.

$$K_{1o} = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\omega\,BL \cdot 10^{-8}\ \text{Ohm} \qquad 9)$$

die Selbstreaktanz der Dämpferwindung abzüglich der Streureaktanz

$K_{1\sigma} = K_{1o} \cdot \sigma_1$ . . . . . σ_1 Streukoeffizient

bezeichnet. Aus den beiden letzten Spannungs-Gleichungen folgt zunächst der Dämpferstrom

$$\dot{J}_1' = -\dot{AW}_1 \frac{1}{(1+\sigma_1) + j\frac{r_1}{K_{1o}}} = -\dot{AW}_1 \frac{(1+\sigma_1) - j\frac{r_1}{K_{1o}}}{(1+\sigma_1)^2 + \left(\frac{r_1}{K_{1o}}\right)^2} \qquad 10)$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (7)

$$\dot{AW}_{1m} = \dot{AW}_1 \left[1 - \frac{1+\sigma_1}{(1+\sigma_1)^2 + \left(\frac{r_1}{K_{1o}}\right)^2} + j \frac{\frac{r_1}{K_{1o}}}{(1+\sigma_1)^2 + \left(\frac{r_1}{K_{1o}}\right)^2} \right]. \qquad 11)$$

In Bild 4 habe ich nach diesen Ansätzen das Diagramm der Amperewindungen konstruiert: Mit der Veränderlichkeit des Dämpfungswiderstandes r_1 wandert der Endpunkt des Vektors der resultierenden Amperewindungen $\dot{AW}_{1m}$ auf einem Halbkreis. Sein Mittelpunkt M liegt auf dem Vektor $\dot{AW}_1$, sein Radius beträgt

$$\overline{MA} = \tilde{AW}_1 \frac{0{,}5}{1+\sigma_1}. \qquad 12)$$

Gleichzeitig schneidet der Vektor des Dämpferstroms $\dot{J}_1'$ das charakteristische Verhältnis $\frac{r_1}{K_{1o}}$ auf einer Maßstabsgeraden ab, die im Abstande $1 + \sigma_1$ von seinem Ursprung A die Richtung von AW_1 senkreeht kreuzt. So kann man sich jederzeit auf die einfachste Weise im Kreisdiagramm der Amperewindungen orientieren.

Worauf es ankommt ist, die wattlose komponente $(B_{1m})_{wl}$ des mittleren Luftfeldes möglichst groß zu erhalten. Denn sie allein bildet mit den Queramperleitern ein Drehmoment aus. Also gilt es, auf der Kreisperipherie in der Nähe des Scheitelpunktes m zu arbeiten. Dorthin führt ein Widerstand

$$r_1 = K_{1o}\,(1+\sigma_1) \qquad 13)$$

und wenn man hiernach die Dämpferwindung dimensioniert, so ereicht man mit

$$(\dot{B}_{1m})_{wl} = j\,\frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\dot{AW}_1 \frac{0{,}5}{1+\sigma_1} \qquad 14)$$

das Maximum der wattlosen Feldkomponente bei ungesättigter Maschine.

Jetzt ist es ein leichtes, auch das zugeordnete Drehmoment zahlenmäßig anzugeben. Die Grundwelle des wattlosen Feldanteiles

$$(\hat{\dot{B}}_{11})_{wl} = (\dot{B}_{1m})_{wl} \frac{4}{\pi} \sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

kontrastiert mit der ersten Harmonischen der Querampereleiter des Ampers, d. i.

$$\hat{AS}_q = \hat{AW} \cdot \frac{\pi}{t_p}.$$

Demgemäß entfällt auf jede Polteilung eine Umfangskraft:

$$P^{kg} = \frac{1}{4}(B_{11})_{wl} \cdot \hat{AS}_q \cdot t_p\,L \cdot \frac{10^{-6}}{9{,}81}$$

und das schafft ein gesamtes Längsfeldmoment von:



$$\left.\begin{aligned} D_l^{mkg} &= p \cdot R L B \cdot (\tilde{B}_{lm})_{wl} \hat{A S} \frac{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}{\frac{\pi \alpha}{2}} \frac{10^{-8}}{9{,}81} \\ &= 2 p \cdot R L \cdot (\tilde{B}_{lm})_{wl} \hat{A W} \sin \frac{\pi \alpha}{2} \cdot \frac{10^{-8}}{9{,}81} \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

oder wenn die Voraussetzungen zur Anwendung von Gleichung (14) gegeben sind:

$$D_l^{mkg} = 0{,}4 \pi \cdot \frac{10^{-8}}{9{,}81} \cdot p \frac{R L}{\delta} \cdot \hat{A W}^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi \alpha}{2}}{\frac{\pi \alpha}{\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \sigma_l} \cdot \quad 16)$$

Ob das viel oder wenig ist, wird der Vergleich mit dem Synchronen-Vollastmoment lehren. Um hierfür eine bequeme Zeichensprache zu erhalten, führe ich mit

$$\overline{A W}_g = (\hat{A W})_{norm} \frac{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}{\frac{\pi \alpha}{2}} \quad 17)$$

die vollen Ankergegenamperewindungen ein, d. i. denjenigen Mittelwert der Ankerrückwirkung unter dem Polschuh, den ein wattloser Vollaststrom im synchronen Betrieb erzeugen würde. Je nachdem wir dann die Formeln 3 und 15, oder 4 und 16 zusammennehmen, ergibt sich folgendes Verhältnis

$$\frac{D_l}{D_{norm}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\tilde{B}_{lm})_{wl}}{B_e} \cdot \frac{\tilde{J}_{Anlauf}}{J_{norm}} \quad 18a)$$

oder

$$\frac{D_l}{D_{norm}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\tilde{J}_{Anlauf}}{J_{norm}}\right)^2 \cdot \frac{\overline{A W}_g}{\overline{A W}_e} \cdot \frac{\delta}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \sigma_l} \cdot \quad 18b)$$

Von diesen Formeln zeigt die letzte besonders klar, was beim Entwurf einer Maschine für hohes Anlaufmoment erstrebt werden muß. Am einfachsten und wirksamsten wäre es natürlich, mit recht großem Anlaufstrome zu arbeiten. Denn das prozentuale Moment steigt quadratisch mit $\left(\frac{\tilde{J}_{Anlauf}}{\tilde{J}_{norm}}\right)$. Doch ist man hierin von dem guten Willen der Elektrizitätswerke abhängig, und mehr als den 3 fachen Normalstrom wird man auch selbst mit Rücksicht auf die Ankererwärmung nicht gerne zulassen. — Der nächste Faktor $\frac{\overline{A W}_g}{\overline{A W}_e}$ charakterisiert die Größe der Ankerrückwirkung. Wir werden somit aufgefordert, Maschinen mit großer Ankerrückwirkung zu bauen, d. h. eine hohe spezifische Amperebelastung AS einem starken Treibfeld $\overline{B}_e$ vorzuziehen. Wie weit man hiermit gehen kann hängt freilich auch von anderen Überlegungen ab, und so will ich auf dieses Glied nicht übermäßig viel Gewicht legen. Was man aber wohl stets in der Hand hat, ist der 3. Faktor $\frac{\delta}{\delta}$. Um ihn recht hoch zu schrauben, muß man die Synchronmaschine im normalen Betrieb stark sättigen, also einen großen Teil des magnetischen Widerstandes in das Eisen legen. Außerdem soll aber auch das Knie der magnetischen Charakteristik möglichst stark ausgeprägt sein, und man kann viel gewinnen, wenn man mit



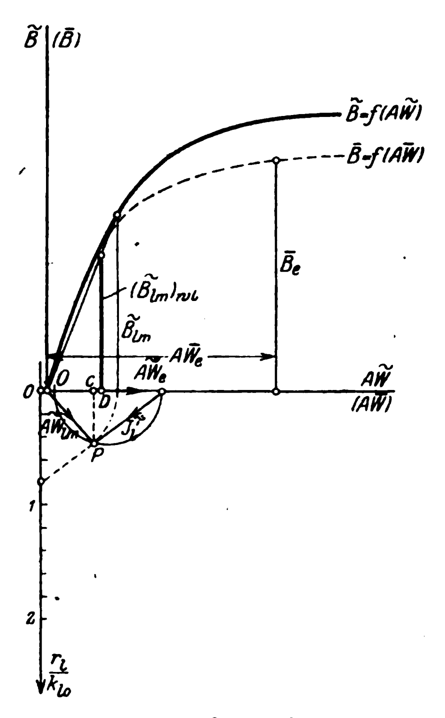


Bild 5a. $\tilde{J}_{Anl.} = \tilde{J}_{norm.}$

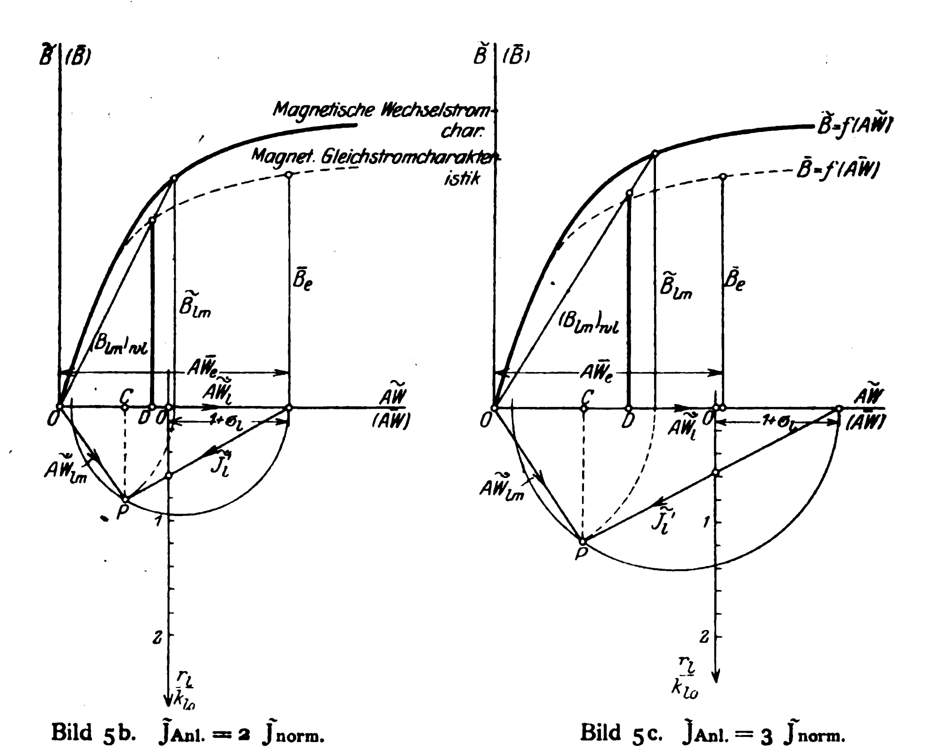


Bild 5b. $\tilde{J}_{Anl.} = 2\ \tilde{J}_{norm.}$

Bild 5c. $\tilde{J}_{Anl.} = 3\ \tilde{J}_{norm.}$

Bild 5a—c. Zur Berechnung des Längsfeldmomentes bei asynchronem Anlauf ($A\tilde{W}_g = A\bar{W}_e$).

Rücksicht hierauf die Zähne und Polkerne dimensioniert[1]). Neben diesen Hauptgesichtspunkten spielt die Streuung eine minder wichtige Rolle; denn der letzte Faktor $\frac{1}{1+\sigma_l}$ kann bei nur einigermaßen vernünftigen Konstruktionen nicht viel von der Einheit verschieden sein.

Wenn man sich nun alle diese Folgerungen zu nutze macht, welches Längsfeldmoment ist dann zu erreichen? Ein Zahlenbeispiel mag uns die Antwort geben. Die Diagrammserie 5 enthält die Sättigungskurven einer günstig dimensionierten Maschine für Gleich- und Wechselstromerregung[2]). Die erste Kurve, welche die Grundwellen der Luftinduktion und der Erregeramperewindungen verknüpft, liegt im gekrümmten Teil bis zu 20% höher als die zweite. Die vollen Ankergegenamperewindungen $\overline{AW}_g$ sind zu 50% der resultierenden Gleichstromerregung $\overline{AW}_e$ angenommen. Die Dämpfertrennung beträgt $\sigma_l = 0{,}05$. Mit diesen Annahmen wurden folgende Resultate erzielt.

Bild	$\frac{\tilde{J}_{Anl.}}{J_{norm}}$	$\frac{\delta}{\delta}$	$\frac{\tilde{B}_{lm}}{B_e}$	$\frac{D_l}{D_{norm}}$	$\frac{r_l}{K_{lo}}$
5a)	1	2,5	0,6	0,3	0,8
5b)	2	2,0	0,8	0,8	0,6
5c)	3	1,5	0,93	1,4	0,56.

Das sind gewiß befriedigende Werte, die einerseits durch Zugrundelegung einer übertrieben stark gekrümmten Sättigungskurve, andererseits durch richtige Auslegung des Dämpferkreises erreicht worden sind.

Was den letzten Punkt betrifft, so wird man bemerken, daß die ausgeführten Verhältnisse $\frac{r_l}{K_{lo}}$ sämtlich unter der Einheit liegen. Daß dabei die erzielten Drehmomente trotzdem ein wenig höher liegen als man sie für $\frac{r_l}{K_{lo}} = 1$ erhalten würde, ist der Krümmung der magnetischen Charakteristik zuzuschreiben. Aber viel wichtiger als diese Feinheiten ist die Größenordnung des Dämpferwiderstandes, die ungleich viel höher liegt, als man sie zur Beruhigung mechanischer Pendelungen im Parallelbetrieb wählen würde. Selbst wenn man die Dämpferwicklung in genuteten Polschuhen unterbringt und ihren Widerstand bei Anlauf mit Hilfe des Steineffektes künstlich erhöht, muß doch das Kupfergewicht der Längsfelddämpfung erheblich unter dem normaler Dämpfergitter bleiben.

Das Querfeld.

Im Gegensatz zu der einen Kurzschlußwindung in der Achse des Längsfeldes nahm ich die Querfeldwicklung über den ganzen Polbogen gleichmäßig verteilt an. Das Diagramm ihrer Amperewindungen besitzt also Trapezform (Bild 6), und wenn $\tilde{J}_Q'$ der Maximalwert des Dämpferstromes, w_q die Leiterzahl pro halbe Polteilung bedeckt, so wird die Trapezhöhe:

$$\tilde{AW}_Q' = \tilde{J}_Q' \, w_q.$$

Es wäre aber umständlich, diese neue Verteilung mit der Sinuswelle der Anker-

[1]) Mit der Krümmung der Sättigungskurve nimmt das Verhältnis $\frac{\tilde{B}_{lm}}{B_e}$ zu. Um diesen Vorteil deutlich hervortreten zu lassen, habe ich in den Bild 5 (und 10) die Krümmung stark übertrieben.

[2]) Über die Berechnung der magnetischen Wechselstromcharakteristik aus der Gleichstromcharakteristik siehe Dreyfus, „Über die Erregung eines massiven magnetischen Kreises durch Wechselstrom".

queramperewindungen zusammenzusetzen. Darum reduzieren wir auch diese zuvor auf eine ähnliche Trapezform und richten es so ein, daß ihre erste Harmonische gerade mit der ursprünglichen Sinuswelle $(\hat{AW}_q)$ übereinstimmt. Mit anderen Worten: Wir machen die Höhe des Ersatztrapezes gleich:

$$\hat{AW}_Q = \hat{AW}_q \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{\pi a}{2}}{\sin \frac{\pi a}{2}}. \qquad 19)$$

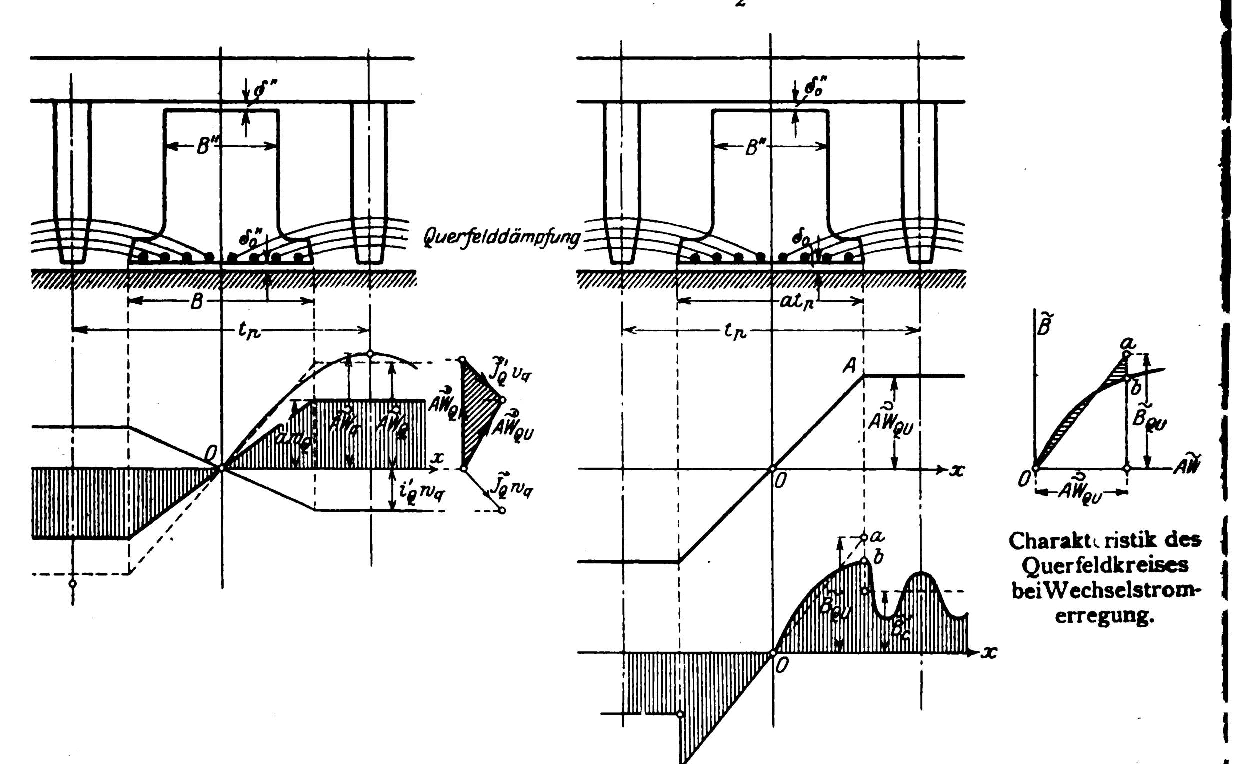


Bild 6. Zusammensetzung der Queramperewindungen.

Bild 7. Queramperewindungen und Querfeldverteilung.

Unter diesen Voraussetzungen liefern schließlich auch die resultierenden Amperewindungen eine Trapezwelle von der Amplitude:

$$\hat{AW}_{QU} = \hat{AW}_Q + \hat{J}_Q' w_q. \qquad 20)$$

Ich schlug diesen Weg ein, weil er die Bestimmung des Querfeldes und seiner Induktionswirkungen wesentlich erleichtert. Jetzt entspricht nämlich dem geradlinigen Anstieg o A der Trapezerregung ein ganz bestimmter Abschnitt $\overline{ob}$ in der magnetischen Wechselstromcharakteristik der Luftspalt-Zähne-Schicht, den wir von dort unmittelbar in das Felddiagramm übertragen können (Bild 7). Wir werden freilich nicht mit ihm rechnen; denn dazu müßte uns sein analytisches Gesetz bekannt sein. Aber wir können ihn nach Gefühl ziemlich sicher durch eine gleichwertige[1]) Gerade $\overline{oa}$ ersetzen, die von der Polmitte gegen die Polspitze ansteigt und dort die Höhe

[1]) Der wirklichen Feldkurve „gleichwertig" ist diejenige Verteilung, welche der Dämpferwicklung dieselbe Spannung induziert. Es sollte also streng genommen sein:

$$\tilde{B}_{QU} = \frac{12}{B^3} \int_0^{\frac{B}{2}} \tilde{B}_Q \cdot x \, dx.$$

$$\dot{B}_{QU} = \frac{0,4\pi}{\delta'} \hat{A}W_{QU} \qquad 21)$$

erklimmt. Diesem Anstieg folgt im Polzwischenraum zunächst ein jäher Abfall. Dank dem Einbau des Hilfspoles erholt sich das Feld jedoch ziemlich rasch, so daß seine mittlere Höhe

$$\dot{B}_c = \frac{0,4\pi}{\delta_c} \hat{A}W_{QU} \qquad 22)$$

immer noch erhebliche Werte besitzt. Wir müssen später die beiden Mittelwerte $\tilde{B}_{QU}$ und $\tilde{B}_c$ tatsächlich aufsuchen, denn ihre Kenntnis verschafft uns die beiden reduzierten Luftspalte δ' und δ_c, mit denen wir in der Folge beständig operieren[1]. Vorerst jedoch kennen wir die erregenden Amperewindungen $\hat{A}W_{QU}$ noch gar nicht, da wir den Dämpferstrom noch nicht berechnet haben. Das müssen wir also vor allem nachholen.

Der Dämpferstrom $\dot{J}_Q'$ folgt aus dem Gleichgewicht der Spannungen im Dämpferkreis. Führt man durch die Gleichung

$$K_{qo} = \frac{0,4\pi}{\delta'} \cdot 10^{-8} \cdot \omega\, w_q^2 B L \left(\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right) \qquad 23)$$

die Selbstreaktanz der Dämpferwicklung abzüglich ihrer Streureaktanz

$$K_{q\sigma} = K_{qo} \cdot \sigma_q$$

ein, so beträgt die durch das Querfeld induzierte EMK.

$$\dot{E}_{qo} = j\left(\dot{J}_Q' + \frac{\hat{A}W_Q}{w_q}\right) K_{qo}.$$

Da außerdem die Bedingung

$$\dot{E}_{qo} = \dot{J}_Q'(r_q - j K_{q\sigma})$$

zu Recht bestehen muß, so ergibt sich eine ganz ähnliche Gleichungsserie wie seinerzeit für das Längsfeld. Es ist nämlich:

$$\dot{J}_Q' w_q = -\hat{A}W_Q \cdot \frac{1}{(1+\sigma_q) + j\frac{r_q}{K_{qo}}} = -\hat{A}W_Q \frac{(1+\sigma_q) - j\frac{r_q}{K_{qo}}}{(1+\sigma_q)^2 + \left(\frac{r_q}{K_{qo}}\right)^2} \qquad 24)$$

und daraus:

$$\hat{A}W_{QU} = \hat{A}W_Q \left[1 - \frac{1+\sigma_q}{(1+\sigma_q)^2 + \left(\frac{r_q}{K_{qo}}\right)^2} + j\frac{\frac{r_q}{K_{qo}}}{(1+\sigma_q)^2 + \left(\frac{r_q}{K_{qo}}\right)^2}\right]. \qquad 25)$$

[1] Für das Diagramm der Ankerspannungen kommt nur die Grundwelle $\dot{B}_{q1}$ der Querfeldverteilung in Betracht. Legt man auch hier die geradlinige Ersatz-Feldkurve zugrunde, so erhält man für den Scheitelwert der 1. Harmonischen:

$$\dot{B}_{q1} = \frac{0,4\pi}{\delta'} \cdot \hat{A}W_{q1} \qquad 21\,a)$$

mit

$$\hat{A}W_{q1} = \left(\hat{A}W_q + \frac{4}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} \dot{J}'_Q w_q\right)\cdot\left(1 - \frac{\delta_c - \delta'}{\delta_c}\cdot\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}}\right)$$

$$\approx \hat{A}W_{QU}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right). \qquad 21\,b)$$

Daraus würde für $\alpha = \frac{2}{3}$ folgen:

$$\hat{A}W_{q1} = \left(\hat{A}W_q + 1{,}053\, \dot{J}_Q' w\right)\left(0{,}395 + 0{,}605\frac{\delta'}{\delta_c}\right).$$

Aus der Analogie der Gleichungen (10, 11) und (24, 25) folgt aber, daß auch die Konstruktion des Kreisdiagrammes und einer Maßstabsgeraden direkt übernommen werden kann. Ich habe mich daher damit begnügt, in Bild 8 die Gleichungen der Bestimmungsstücke einzutragen. Der günstigste Dämpferwiderstand liegt bei ungesättigter Maschine in der Nähe von:

$$r_q = K_{qo}(1 + \sigma_q) \tag{26}$$

und hierfür erreicht die wattlose Feldkomponente ihr Maximum:

$$(\dot{\tilde{B}}_{QU})_{wl} = \dot{\tilde{B}}_{QU} \frac{0,5}{1 + \sigma_q}. \tag{27}$$

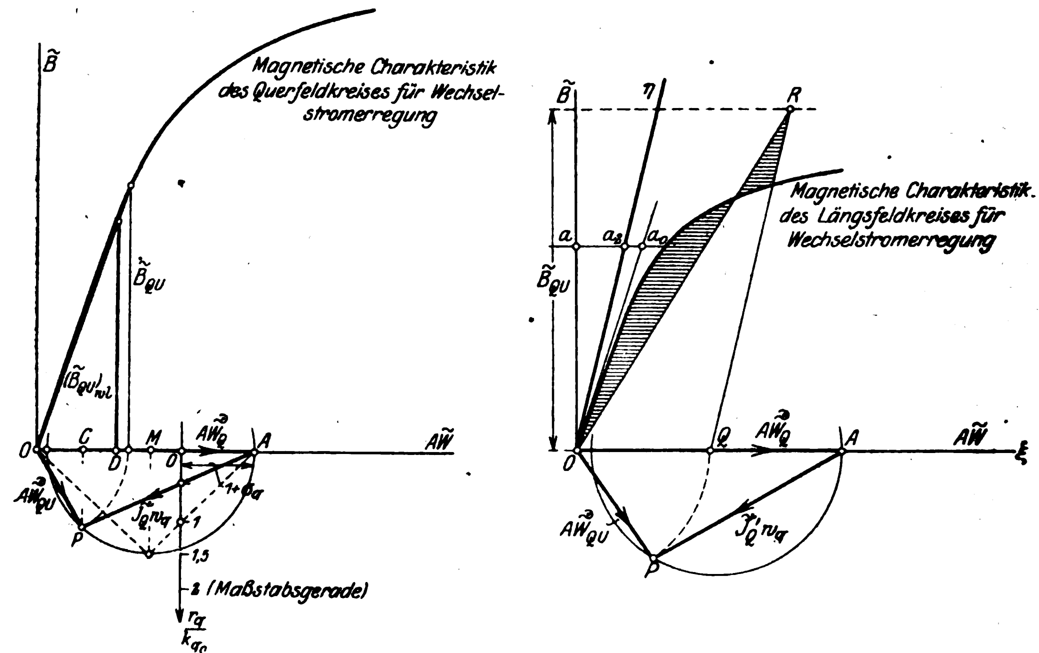


Bild 8. Kreisdiagramm der Queramperewindungen.

$\overline{OA} = \hat{A}W_Q$ $\overline{MA} = \hat{A}W_Q \frac{0,5}{1+\sigma_q}$ $\overline{OD} = \overline{PC}$.

Bild 9. Zur Bestimmung der Luftspaltunterteilung.

Bleibt nur noch festzustellen, welches Drehmoment diese wattlose Querfeldkomponente mit den Längsampereleitern entwickelt. Um die Formel nicht unnötig kompliziert zu machen, ersetze ich auch die Sinuswelle der spezifischen Ankerbelastung $a s_l$ durch ein Trapez von der oberen Breite B und der Höhe

$$\hat{A}S_L = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{\pi \alpha}{2}}{\sin \frac{\pi \alpha}{2}} \cdot \hat{A}S. \tag{28}$$

Das liefert pro Pol eine Umfangskraft

$$P_q^{Kg} = \frac{1}{2} (\tilde{B}_{QU})_{wl} \cdot \hat{A}S_L \cdot t_p \cdot L \left(\frac{\alpha}{3} + (1 - \alpha) \frac{\delta'}{\delta_c}\right) \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}$$

und damit gewinnt die Gleichung des Querfeldmomentes die einfache Form:

$$\left.\begin{aligned} D_q^{mKg} &= p \cdot R \cdot LB \cdot (\tilde{B}_{QU})_{wl} \cdot \hat{A}S \left(\frac{\pi}{4} \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right) \cdot \frac{10^{-8}}{9,81} \\ &= 2p \cdot RL \cdot (\tilde{B}_{QU})_{wl} \cdot \hat{A}W \left(\frac{\pi}{4} \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right) \cdot \frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right)\frac{10^{-8}}{9,81}. \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

Arbeitet man auf dem Amperewindungskreise in der Nähe des Scheitelpunktes, so kann man die wattlose Feldkomponente auch noch auf die Ankeramperewindungen zurückführen und erhält dann nach Gleichung (27) und (21)

$$D_q^{mKg} = 0,4\pi \cdot \frac{10^{-8}}{9,81} \cdot p \frac{RL}{\delta'} \hat{A}W^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_s}\right) \cdot \frac{1}{1-\sigma_q}. \quad 30)$$

Die gewonnenen Formeln würden uns in den Stand setzen, das Querfeldmoment aus den Maschinenkonstanten zu berechnen. Tatsächlich liegt der Fall jedoch gerade umgekehrt. Wir kennen bereits das Querfeldmoment, aber wir kennen noch nicht alle Maschinenkonstante, sondern haben über die Unterteilung des Luftspaltes noch zu verfügen.

Ich sagte, das Querfeldmoment sei uns im voraus bekannt. Wie ist das zu verstehen? Nun ganz einfach so: Wir haben uns schon früher darauf geeinigt, daß sich die Grundwellen des Längs- und Querfeldes zu einem einzigen synchronen Drehfeld konstanter Amplitude vereinigen sollten. Das ist aber genau genug der Fall, wenn wir in den Kreisdiagrammen der Längs- und Querfeldamperewindungen auf ähnlich gelegenen Kreispunkten arbeiten, und wenn dabei diese Feldkomponenten mit den Drehamperewindungen des Ankers gleiche Drehmomente entwickeln. Wollen wir also die hierfür nötige Luftspaltunterteilung berechnen, so haben wir einfach die Drehmomente D_l und D_q gleichzusetzen und die Konsequenzen zu ziehen.

Das kann jetzt leicht geschehen. Für ähnlich gelegene Kreispunkte darf man das Verhältnis der Momente nach den Gleichungen (16) und (30) berechnen. Dabei stellt sich heraus:

$$\frac{D_q}{D_l} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\frac{\delta}{\delta'} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta}{\delta_c}\right)\frac{1+\sigma_l}{1+\sigma_q}$$

oder, da die Drehmomenten übereinstimmen sollen und σ_l und σ_q sicher nicht viel verschieden sind:

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{48}{\pi^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^4 - \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{3\delta}{\delta_c}. \quad 31)$$

Darin ist δ ein eindeutiger Wert, nämlich derjenige reduzierte Luftspalt, den wir aus dem Anlaufdiagramm für das Längsfeld entnehmen. Die obige Gleichung setzt also jetzt auch den reduzierten Luftspalt δ' des Querfeldes während der Anlaufperiode endgiltig fest.

Damit ist allerdings noch nicht gesagt, daß man dieses Teilverhältnis auch wirklich ausführen kann. Denn δ und δ' bezeichnen ideelle Luftspalte, und wir



haben hieraus erst das Verhältnis der geometrischen Luftspalte δ_0' und δ_0 abzuleiten. Das scheint vielleicht auf den ersten Blick etwas schwierig. Es läuft aber genau auf dasselbe hinaus als wenn ich sage: Wir kennen bereits die Ersatzgerade $\overline{Oa}$ der Feldverteilung in Bild 7 und müssen dazu die magnetische Wechselstromcharakteristik des Längsfeldes um einen solchen Luftspalt δ'' scheren, daß ihr die

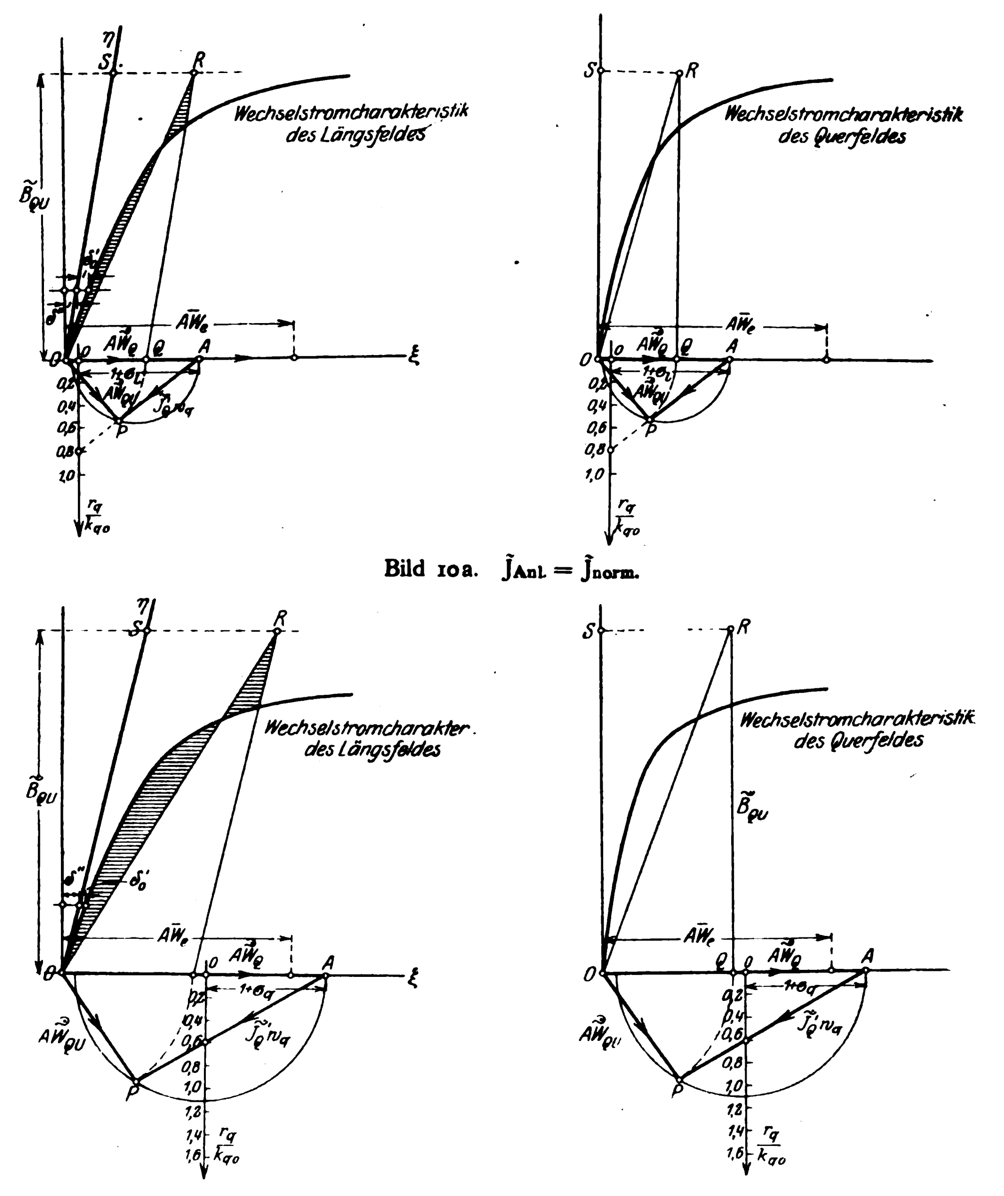


Bild 10a. $\tilde{J}_{Anl.} = \tilde{J}_{norm.}$

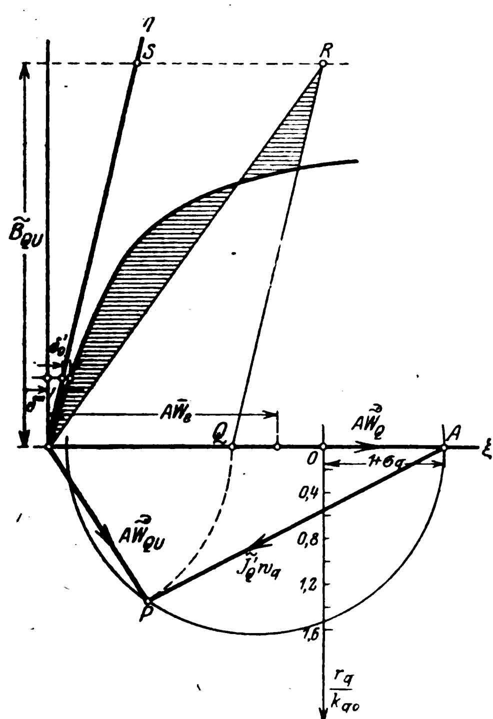
Bild 10b. $\tilde{J}_{Anl.} = \tilde{J}_{norm.}$

vorgebene Gerade als gute Interpolation genügt. Diese Aufgabe lautet wesentlich einfacher und läßt sich am schnellsten auf folgendem Wege lösen:

Man konstruiert unter der magnetischen Wechselstromcharakteristik des Längsfeldes das Diagramm der Queramperewindungen und macht $\overline{OQ} = \hat{A}W_{QU}$ (Bild 9). Zu diesen Amperewindungen berechnen wir mit Hilfe des eben gefundenen Luftspaltes δ' die Querfeldinduktion

$$\tilde{B}_{QU} = \frac{0{,}4\pi}{\delta'} \hat{AW}_{QU}$$

und ziehen in diesem Abstande eine Parallele zur Abszissenachse. Dann haben wir auf dieser Geraden einen Punkt R so zu bestimmen, daß in dem stark aus-



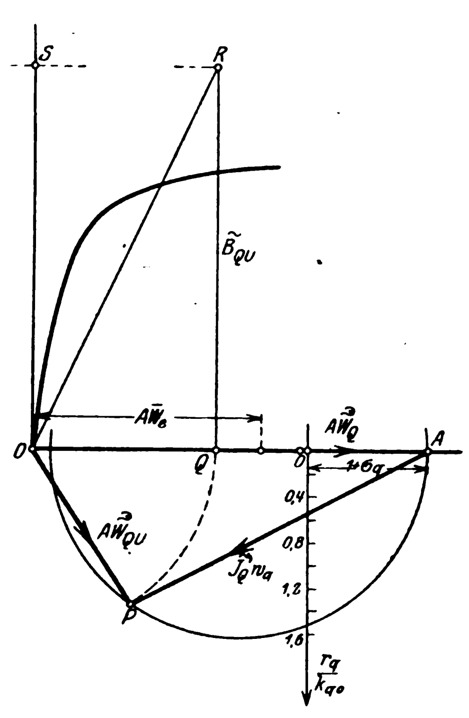


Bild 10c. $\tilde{J}_{Anl.} = \tilde{J}_{norm.}$

Bild 10a—c. Bestimmung der Luftspaltunterteilung für die Zahlenbeispiele des Bildes 5. $(A\overline{W}_g = \frac{1}{2} A\overline{W}_e)$.

gezogenen Koordinaten-System $\eta\xi$ (dessen η-Achse parallel zu $\overline{QR}$ zu legen ist) die Gerade $\overline{OR}$ die Sättigungskurve befriedigend interpoliert. Ist dieser Punkt gefunden, so ist die η-Achse die gesuchte Scherungsgerade und daher:

$$\frac{\delta''}{\delta_0} = \frac{a\,a_2}{a\,a_0}$$

bzw.

$$\frac{\delta_0'}{\delta_0} = \frac{a_2\,a_0}{a\,a_0}.$$

Die Diagrammserie 10a bis c zeigt die Anwendung der Konstruktion auf jenes Zahlenbeispiel, mit dem wir seinerzeit so günstig Längsfeldmomente erzielten. Dabei fand ich:

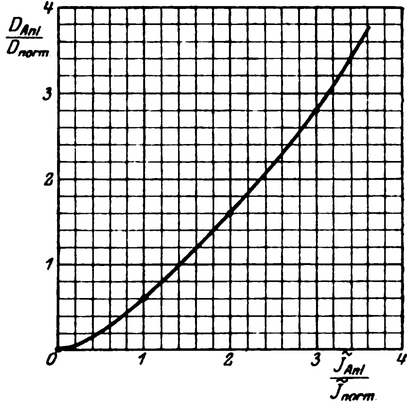


Bild 11. Anlaufmoment als Funktion des Funktion des Anlaufstromes $(A\overline{W}_g = \frac{1}{2} A\overline{W}_e)$.

Für $\frac{\tilde{J}_{Anl.}}{\tilde{J}_{norm}} = 1$ und $\frac{\delta}{\delta_c} = 1{,}1$ ein Teilungsverhältnis $\frac{\delta_0'}{\delta_0} = \frac{1}{2}$

2	1,0	$\frac{1}{3}$
3	1,0	$\frac{1}{3}$.

Das sind Werte, deren praktische Ausführung in der Regel möglich sein wird. Wir wären also tatsächlich imstande als gesamtes Anlaufmoment den doppelten Betrag des Längsfeldmomentes zu erzielen, d. h.

$$\text{Für } \frac{\tilde{J}_{Anl.}}{\tilde{J}_{norm}} = 1 \qquad \frac{D_{Anl.}}{D_{norm}} = 0{,}6$$
$$2 \qquad 1{,}6$$
$$3 \qquad 2{,}8.$$

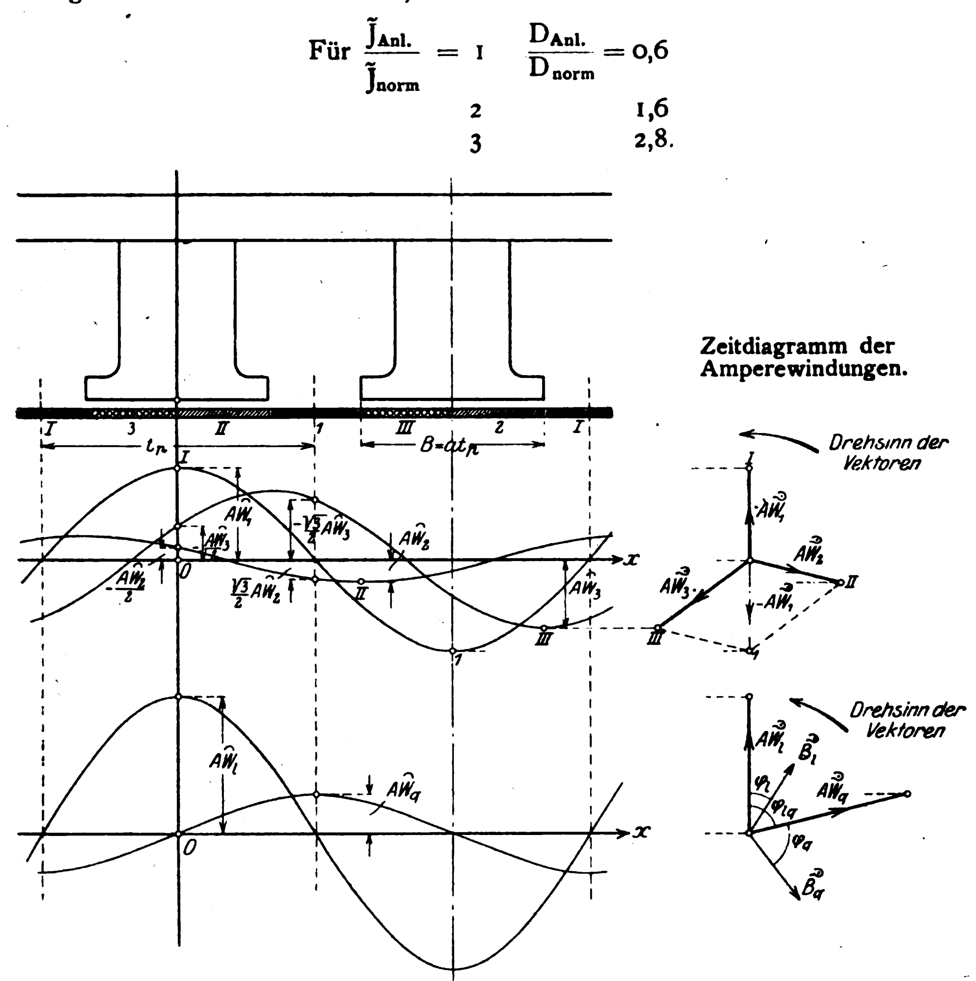


Bild 12. Längs- und Queramperewindungen bei unsymmetrischer Stromaufnahme.

Aus diesen Werten habe ich in Bild 11 die Kurve des Anlaufmomentes als Funktion des Anlaufstromes abgeleitet. Wie außerordentlich günstig sie liegt, brauche ich nicht auseinanderzusetzen[1]). Wer einmal im Prüffeld mit den gebräuchlichen Konstruktionen versucht hat, auch nur annähernd soweit zu kommen, der hat sich schon den richtigen Vergleichsmaßstab angeeignet. Wer ihn aber noch nicht besitzt, den wird der folgende Abschnitt aufklären.

B. Die für hochbelasteten Anlauf ungeeignetste Bauart der Synchronmaschine. Joch und Pole massiv[1]).

Wir wissen jetzt, was sich bestenfalls erreichen ließe und haben gehört, daß es mehr, weit mehr ist, als was erfahrungsgemäß mit den üblichen Konstruktionen

[1]) Vergleiche jedoch die Anmerkung zu S. 16.

[1]) Manches in diesem Abschnitt wird erst durch das Studium der Arbeiten III und IV voll verständlich. Deren Inhalt durch einen kurzen Auszug wiederzugeben, erwies sich als unmöglich, und einen längeren Auszug glaubte ich der vorliegenden Arbeit nicht einverleiben zu können.

erzielt wird. Aber mit dieser oberflächlichen Einsicht dürfen wir uns nicht begnügen. Erst, wenn wir nicht nur das Erreichbare, sondern auch das Erreichte genau präzisiert haben, erst dann haben wir festen Boden, auf dem sich Konstrukteure und Berechner in einem rationellen Kompromiß begegnen können. Welches also ist das asynchrone Moment, das man der heute dominierenden Bauart, dem massiven Polrad oder Polgehäuse, abgewinnen kann?

I. Längs- und Queramperewindungen.

Das Anlaufmoment läßt sich nur auf Grund der Feldverteilung ermitteln, und um hier nicht ganz im Dunkeln zu tappen, muß man einen Begriff haben, welchen Gesetzen die Stromaufnahme der Ankerphasen gehorcht. Dieser Punkt machte im vorigen Kapitel keine Schwierigkeiten. Denn dort besprachen wir eine Konstruktion, durch die wir schon im Stillstande eine symmetrische Stromaufnahme erzwingen konnten. Jetzt aber haben wir uns dieses Mittels begeben. Darum ist es mehr als unwahrscheinlich, daß trotzdem der Anker ein symmetrisches Drehstromsystem führen sollte. Vermutlich werden vielmehr auch die Längs- und Queramperewindungen weder in Quadratur stehen noch gleiche Größe besitzen. So wird hinfällig, was bislang der Rechnung als Unterlage diente und es gilt, etwas Neues an seine Stelle zu setzen.

Dieses neue Gesetz wird durch das Gleichgewicht der Spannungen in den Arbeitsphasen diktiert, ein Gleichgewicht, das sich mit der Drehung des Polrades ein wenig verschiebt. So werden z. B. in einem Augenblick die Achsen einer Phase gerade mit den Mittellinien der Kerne zur Deckung kommen, während $\frac{1}{6}$ Polteilung weiter die Wicklungsachsen einer anderen Phase die Lücken zwischen den Polen halbieren. Von diesen beiden Symmetrielagen werden wir jedoch nur die erste untersuchen. Und weil wir dabei nicht gut einen geraden Kurs steuern können, so wollen wir unser Endziel, das ist die Ermittelung der Längs- und Queramperewindungen, erst recht fest im Auge behalten.

Wer Abb. 12 mit ihrer etwas willkürlich angenommenen Amperewindungsverteilung betrachtet, dem wird sich wahrscheinlich von selbst die Frage aufdrängen: Welche Amperewindungen magnetisieren denn nun das Längsfeld und welche das Querfeld? Das läßt sich sofort entscheiden, wenn man wie gewöhnlich nur mit der ersten Harmonischen der Amperewindungsverteilung operiert. Offenbar liegen dann die vollen Amperewindungen der Phase I in der Achse des Hauptfeldes, während die beiden anderen Phasen nur eine Komponente von der halben Größe ihrer jeweiligen Amplitude beisteuern. Insgesamt ist also:

$$\hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_l = \hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_1 - \frac{1}{2}\left(\hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_2 + \hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_3\right).$$

Da aber wegen

$$\dot{\mathrm{J}}_1 + \dot{\mathrm{J}}_2 + \dot{\mathrm{J}}_3 = 0$$

auch zwischen den Zeitvektoren der Amperewindungen die Beziehung

$$\hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_2 + \hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_3 = -\hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_1$$

zu Recht besteht, so ist schließlich genau wie bei symmetrischer Stromverteilung:

$$\hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_2 = 1{,}5\,\hat{\dot{\mathrm{A}}}\mathrm{W}_1. \qquad 32)$$

Dagegen lassen sich die Querfeldamperewindungen nicht auf den Strom einer Phase zurückführen. Sie werden vielmehr jederzeit durch das Zusammenwirken der Phasen II und III ausgebildet, wobei wieder nicht die vollen Amplituden, sondern nur das $\frac{1}{2}\sqrt{3}$-fache dieser Werte zur Geltung kommt. Hier ist somit



$$\dot{\bar{A}}W_q = \frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{\bar{A}}W_2 - \dot{\bar{A}}W_3). \qquad 33)$$

Im übrigen werden weder die Längs- noch die Queramperewindungen direkt zur Erzeugung des Luftspaltfeldes ausgenützt. Zuvor müssen ja die Gegenamperewindungen der Dämpfer und vor allem der Wirbelströmung in Pol und Joch aufgehoben werden. So kommt es, daß schließlich die Grundwellen $\dot{\bar{B}}_l$ und $\dot{\bar{B}}_q$ des Längs- und Querfeldes in den meisten Fällen ganz kläglich ausfallen, wenn sie auch durch ihre Phasenverspätung φ_l und φ_q gegen die Amperewindungen $\dot{\bar{A}}W_l$ und $\dot{\bar{A}}W_q$ wenigstens die Möglichkeit eines asynchronen Anlaufs gewähren. — Doch ich darf nicht vorgreifen. Der nächste Abschnitt wird sich mit diesen Verhältnissen noch eingehend beschäftigen müssen. Hier wollte ich seine Ergebnisse nur so weit vorwegnehmen, als es mir zum Verständnis der Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{B}}_l &= \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\dot{\bar{A}}W_l \cdot z_l \\ \text{bzw.}\qquad \dot{\bar{B}}_q &= \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\dot{\bar{A}}W_q \cdot z_q \end{aligned}\right\} \qquad 34)$$

notwendig erschien. Ich bezeichne also mit

$$\left.\begin{aligned} z_l &= x_l + j\,y_l \\ z_q &= x_q + j\,y_q \end{aligned}\right\} \qquad 35)$$

dimensionslose komplexe Zahlen, deren Tensoren $|z_l|$ und $|z_q|$ stets sehr viel kleiner als eins, ja in der Regel kleiner als $^1/_4$ sind. Sie charakterisieren den Prozentsatz der Amperewindungen, der für die Luftspalt-Zähne-Schicht mit einem reduzierten Luftspalt δ zur Verfügung steht. Wenn dieser Prozentsatz klein ist, sind auch die Zahnsättigungen gering. Zwischen δ und dem unter Berücksichtigung der Ankernutung berechneten effektiven Luftspalt besteht daher meist kein nennenswerter Unterschied.

Sobald man die Glieder in den Feldgleichungen 34) kennt, kann man daran gehen, die Spannungsdiagramme der 3 Phasen aufzuzeichnen. Für Phase 1 ist das besonders einfach, denn ihre Leiter werden nur durch die Welle des Längsfeldes induziert. Dadurch entsteht die EMK:

$$\dot{E}_{1l} = j\,\omega \cdot \left(\frac{2\,R\,L}{p}\,\dot{\bar{B}}_e\,z_e\right) \cdot \frac{\mathfrak{z}\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}} \cdot p\,f\,10^{-8}$$

oder wenn man mit Hilfe der Ankerreaktanz

$$k_o = 1{,}6\,\pi\,m\,v\,\frac{R\,L}{\delta}\left(\frac{\mathfrak{z}\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\,f\right)10^{-8} \qquad 36)[1]$$

die Spannung auf den Phasenstrom bezieht:

$$\dot{E}_{1l} = j\,\dot{J}_1\,k_o \cdot z_l.$$

Auch die beiden Nachbarphasen werden durch das Längsfeld induziert. Wie sie aber zuvor nun die Hälfte ihrer Amperewindungswelle zur Erzeugung des Längsfeldes beitrugen, so erleiden sie jetzt auch nur die Hälfte der vollen Induktionsspannung, nämlich:

$$\dot{E}_{2l} = \dot{E}_{3l} = -\frac{\dot{E}_{1l}}{2}.$$

Dafür werden sie durch das Querfeld um so stärker induziert; denn sie liegen beide nur je 30° aus seiner Achse entfernt und empfangen so:

[1]) Bei Gleichstromwicklungen ist statt $\frac{\mathfrak{z}\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}$ der Ausdruck

$$\gamma \cdot \frac{s\,b}{4\,a\,p}$$

einzuführen. Die Erklärung der Bezeichnungen findet sich im einleitenden Abschnitt.

$$\ddot{E}_{2q} = j\,\omega\left(\frac{2RL}{p}\ddot{B}_q z_q\right)\frac{\mathfrak{z}\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\,p\,f\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,10^{-8}$$

$$= \ddot{J}\,(J_2 - \ddot{J}_3)\,\frac{K_o}{2}\,z_q$$

bzw. $$\ddot{E}_{3q} = -\ddot{E}_{2q}.$$

Hat man diese Feldspannungen eingetragen, so braucht man nur noch die Abfälle der Streuung

$$\ddot{E}_\sigma = j\,\ddot{J}\,K_\sigma = j\,\ddot{J}\,K_o\cdot\sigma$$

und des Ohmschen Widerstandes

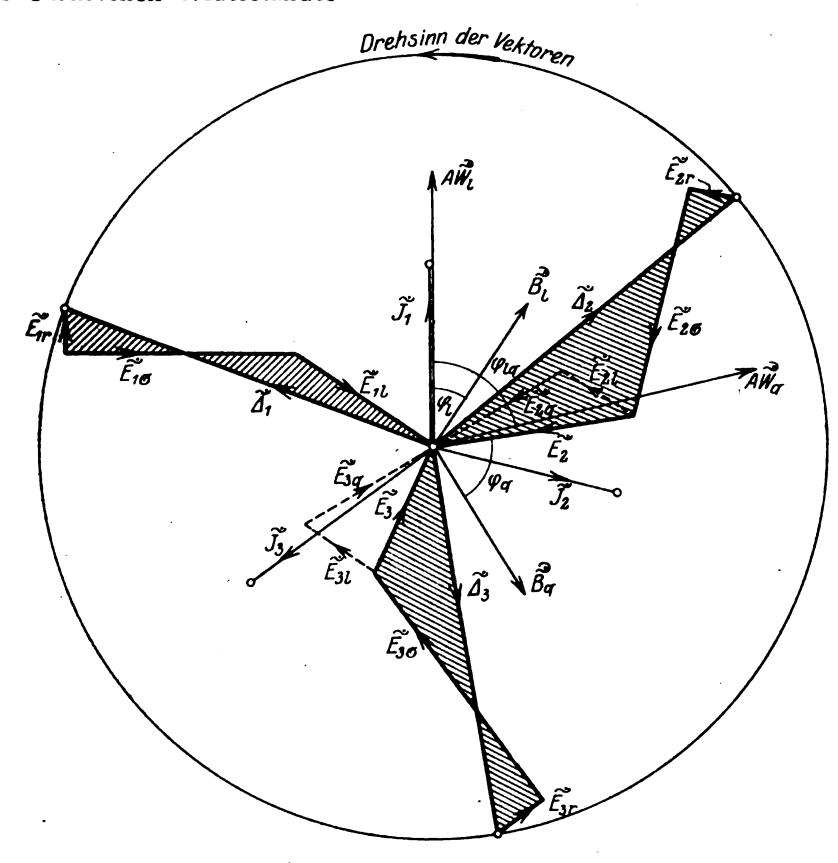


Bild 13. Zeitdiagramm für Anker-Spannungen, -Ströme und -Felder bei unsymmetrischer Stromaufnahme.

$$\ddot{E}_r = -\ddot{J}r$$

hinzuzufügen. Dann erhält man als Schlußseiten der EMK-Polygone die Netzspannungen $\ddot{\varDelta}_1$, $\ddot{\varDelta}_2$ und $\ddot{\varDelta}_3$ (Bild 13).

Aber man wird vielleicht einwenden, diese Vektoren seien nicht unabhängig voneinander. Denn ein modernes Netz liefere uns ein symmetrisches Spannungssystem, in dem die Vektoren gleiche Größe und eine Phasenverschiebung von je 120° besäßen. Kennten wir also auch nur $\ddot{\varDelta}_1$, so wären uns damit doch schon $\ddot{\varDelta}_2$ und $\ddot{\varDelta}_3$ vorgeschrieben. Das ist alles ganz richtig. Aber wir warteten auch nur auf eine Nebenbedingung dieser Art. Denn aus ihr heraus können wir nun endlich jene

Unsymmetrie der Längs- und Queramperewindungen berechnen, um derentwillen dieser ganze Abschnitt der Theorie eingefügt werden mußte.

Der Weg führt über die Gleichungen der Spannungsdiagramme: Zuerst bilden wir für das Spannungsdiagramm der Phase I:

$$\dot{\Delta}_1 + \dot{E}_{1l} + \dot{E}_{1\sigma} + \dot{E}_{1r} = 0$$

oder

$$\dot{\Delta}_1 = \dot{J}_1 (r - j K_\sigma - j K_0 z_l). \qquad 37)$$

Analog liefern die beiden andern Phasen

$$\dot{\Delta}_2 + \dot{E}_{2l} + \dot{E}_{2\sigma} + \dot{E}_{2r} + \dot{E}_{2q} = 0$$

bzw.

$$\dot{\Delta}_3 + \dot{E}_{2l} + \dot{E}_{3\sigma} + \dot{E}_{3r} - \dot{E}_{2q} = 0.$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\dot{\Delta}_2 - \dot{\Delta}_3 = j \dot{\Delta}_1 \sqrt{3} = (\dot{E}_{3\sigma} - \dot{E}_{2\sigma}) + (\dot{E}_{3r} - \dot{E}_{2r}) - 2 \dot{E}_{2q}$$

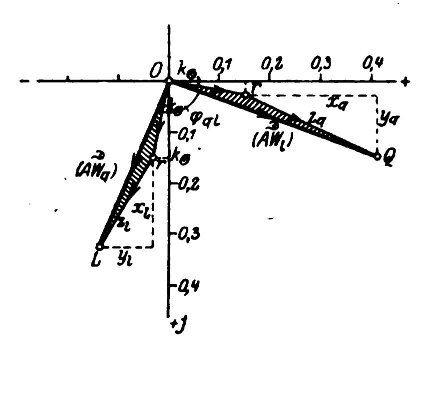


Bild 14a. 100 KW-Type.

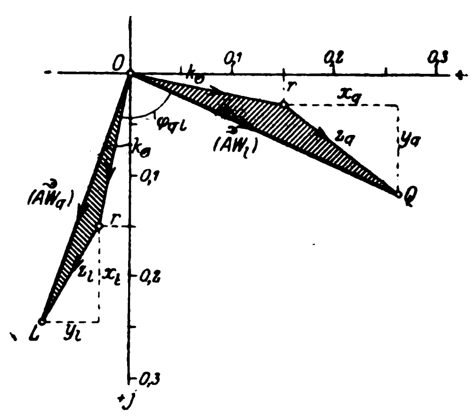


Bild 14b. 1000 KW-Type.

Bild 14. Zur Bestimmung der Längs- und Queramperewindungen.

oder

$$j \dot{\Delta}_1 \sqrt{3} = (\dot{J}_2 - \dot{J}_3)(r - j k_\sigma - j k_0 z_q). \qquad 38)$$

Die letzte Formel legt einen Vergleich mit 37) nahe, und man erhält so:

$$\frac{\dot{J}_2 - \dot{J}_3}{j \dot{J}_1 \sqrt{3}} = \frac{r - j k_\sigma - j k_0 z_l}{r - j k_\sigma - j k_0 z_q}.$$

Damit haben wir aber gerade, was wir suchen. Denn jenes Verhältnis der Ströme stimmt mit dem der Quer- und Längsamperewindungen überein. Beachtet man dies und führt für z_l und z_q seine Komponenten ein, so folgt endgültig:

$$\frac{\dot{AW}_q}{\dot{AW}_l} = j \cdot \frac{(x_l + \sigma) + j\left(y_l + \frac{r}{k_0}\right)}{(x_q + \sigma) + j\left(y_q + \frac{r}{k_0}\right)}. \qquad 39)$$

Das ist eine überaus einfache Beziehung und es erhöht ihren Wert, daß sie nicht nur für die erste, sondern auch für die zweite Symmetrielage von Wicklung und Polrad, und nicht nur für Drehstrom-, sondern auch für Zweiphasenmaschine Gültigkeit besitzt. Am besten deutet man ihren Inhalt graphisch, wie das in Bild 14 geschehen ist. Hier bezeichnet OL den Zähler, OQ den Nenner des Verhältnisses auf der rechten Seite von Gleichung 39). Es ist also

$$\dot{AW}_q : \dot{AW}_l = \overline{\dot{OL}} : \overline{\dot{OQ}},$$

d. h., $\overline{\dot{O}L}$ und $\overline{\dot{O}Q}$ können direkt mit der Amperewindung $\hat{AW}_q$ und $\hat{AW}_l$ identifiziert werden, wenn man sich nur den richtigen Maßstab dazu denkt.

Vielleicht ist bei der letzten Abb. dem Leser eines aufgefallen: Ich habe den Streukoeffizienten σ von gleicher Größenordnung oder sogar größer als die Komponenten x und y angenommen. Das geschah mit Absicht und entspricht, wie wir später erfahren werden, den wirklichen Verhältnissen. Denn im massiven magnetischen Kreise vermag sich das Längs- und Querfeld so wenig zu entfalten, daß der Hauptsitz der Gegenspannung gar nicht mehr in diesen Feldern, sondern im Streufeld zu suchen ist. — Für die Vorausberechnung der Koeffizienten z_l und z_q ist das ein kleiner Vorteil. Denn da man — wenigstens bei symmetrischen Wicklungen — für alle Phasen gleiche Streukoeffizienten voraussetzen darf, so müssen z_l und z_q schon sehr verschieden sein, damit auch zwischen Längs- und Queramperewindungen größere Unsymmetrien auftreten. Es wird daher erlaubt sein, zuerst für $\hat{AW}_l$ und $\hat{AW}_q$ gleiche Werte anzunehmen und mit ihnen z_l und z_q zu berechnen. Dann benutzt man das Resultat, um nachträglich den Unterschied zwischen Längs- und Queramperewindungen festzustellen und ihn auf beide Vektoren zu verteilen. Die dadurch bedingte Änderung in dem Sättigungszustand des massiven Kreises wird selten so groß sein, daß sich deshalb eine Neuberechnung der Werte z_l und z_q lohnte.

II. Synchronmaschine ohne Dämpfervorrichtung.

Die vorausgeschickten Überlegungen gelten allgemein für Maschinen beliebiger Konstruktion, die im ersten Kapitel behandelte Ausführungsform nicht ausgeschlossen. Jetzt müssen wir sie zum Studium spezieller Fälle nutzbar machen, und da beginne ich mit der einfachsten Bauart der Synchronmaschine, die ihr Anlaufmoment nur der Wirbelstrombildung in den massiven Polen und Jochstücken, nicht irgend einer künstlichen Dämpfervorrichtung verdankt. Den Weg, der uns zum Ziele führen wird, habe ich eben zuvor mit wenigen Strichen skizziert.

a) Das Längsfeld.

Von den Längsamperewindungen des Ankers greifen wir wie immer nur die Grundwelle heraus. Ihre Amplitude $\hat{AW}_l$ haben wir seinerzeit durch die Gleichungen 2) und 32) ausgedrückt. Nach Abzug der Amperewindungen für Joch und Pole

$$\dot{AW}_{s+j} = \hat{AW}_l \cdot t\,(\cos\tau + j\sin\tau) \tag{40}$$

bleibt ein Rest, der in der Luftspaltzähneschicht längs eines reduzierten Luftraumes δ verbraucht wird (Bild 15). Darunter unterscheiden wir zwei Komponenten: Die erste, das ist

$$\dot{AW}_c = \hat{AW}_l \cos\frac{\pi\alpha}{2} - \dot{AW}_{s+j} \qquad 41)^{1)}$$

besitzt unter dem Polbogen konstante Größe und Phase. Hingegen gleicht der zweite Anteil einer cos-Linie von der halben Wellenlänge B und kann auch mit guter Annäherung durch eine solche ersetzt werden. Ihre Amplitude ist dann:

$$\hat{AW}_v = \hat{AW}_l \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right). \qquad 42)^{1)}$$

[1]) Wie man diese Komponenten tatsächlich ermittelt, habe ich am Ende der Längsfeldtheorie (Arbeit IV) in einem kurzen Kapitel zusammengestellt, das sich auch außer Zusammenhang mit den theoretischen Ableitungen verstehen und anwenden läßt.

Das Zusammenwirken dieser beiden so ungleichartigen Komponenten erzeugt das resultierende Längsfeld unter dem Polbogen. Doch seine Verteilung gleicht nicht der der erregenden Amperewindungen. Denn die Wirbelströme im Polschuh suchen das Feld zu unterdrücken. Wir mußten uns daher nach einer Hilfsgröße umsehen, durch die wir den Grad der Feldverzerrung schnell und einfach charakterisieren könnten. Diese fanden wir in einer dimensionslosen Größe, und weil sie in dem wirklichen Polbogen direkt proportional war, bezeichneten wir sie als die reduzierte Polschuhbreite β_0 B. In ihr vereinigten sich der Einfluß der magnetischen und elektrischen Leitfähigkeit des Polschuheisens, der Periodenzahl der Magnetisierung, der Größe des Luftspaltes und des Polbogens. Konstruktionen der verschiedensten Art ergaben ähnliche Anlaufverhältnisse, wenn sie nur vor diesem neuen Maßstabe gleich erschienen.

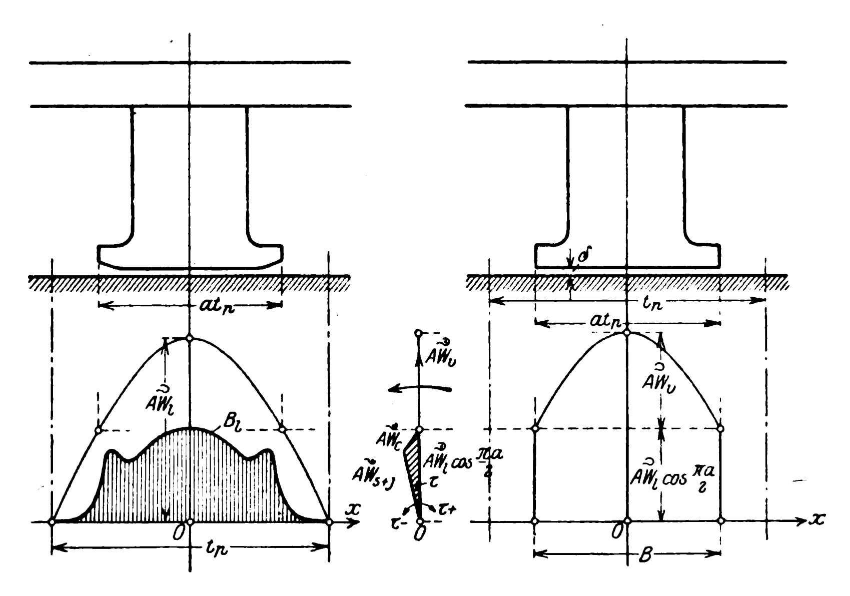


Bild 15. Zur Zerlegung der Längsamperewindungen.

Mit Hilfe der reduzierten Polbreite konnten wir dann auch die wichtigsten Daten der resultierenden Feldverteilung ausdrücken, das ist ihren Mittelwert unter dem Polschuh und ihre Grundwelle, bezogen auf den Polbogen als halbe Wellenlänge. — Für den Mittelwert fanden wir:

$$\dot{B}_{l\,m} = \frac{1}{B \cdot L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \dot{B}\, dx = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\, \dot{A}W_{l\,m} \tag{43}$$

mit

$$\dot{A}W_{l\,m} = \dot{\hat{A}}W_l \left[\left(\frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\frac{\pi a}{2}} - \cos\frac{\pi a}{2} \right) \Psi_l + \cos\frac{\pi a}{2}\, \Phi_l \right] - \dot{A}W_{s+J}\, \Phi_l. \tag{43a}$$

Die Grundwelle liefert:

$$\dot{B}_{l\,1} = \dot{\hat{B}}_{l\,1} \cos\frac{\pi}{B} x \tag{44}$$

mit

$$\overset{\vdots}{B}_{l\,i} = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\left[\overset{\vdots}{AW}_l\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \dot{AW}_{S+J}\,\frac{4}{\pi}\right]\Psi_l. \qquad 44\,a)$$

Dabei sind

$$\Phi_l = \Phi_{l\,r} + j\,\Phi_{l\,i} \qquad 45)$$

und

$$\Psi_l = \Psi_{l\,r} + j\,\Psi_{l\,i} \qquad 46)$$

gewisse komplexe Funktionen der reduzierten Polbreite β_0 B und des Seitenverhältnisses $\frac{L}{B}$ der Polschuhes. Man braucht sie indessen für praktische Fälle nicht erst zu berechnen, da Arbeit IV sorgfältig gezeichnete Kurven zur Verfügung stellt, aus denen sie leicht interpoliert werden können.

Wenn man hiernach die Aufteilung der Ankeramperewindungen durch ein einziges Vektordiagramm darzustellen sucht, so kommt man in einige Verlegenheit. Denn die Verteilung der Wirbelströmung im Polschuh ist äußerst kompliziert. Man muß sich schon damit begnügen, nur die Mittelwerte der Amperewindungen in Beziehung zu setzen, also die mittlere Höhe der Ankeramperewindungen

$$\dot{AW}_l = \overset{\vdots}{AW}_l\,\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} \qquad 46\,a)$$

mit dem eben definierten Mittelwerte der Luftspaltamperewindungen $\dot{AW}_{l\,m}$ und dem Vektor $\dot{AW}_{S+J}$ für Schenkel und Joch. Dann bleibt am Schluß ein Vektor $\dot{AW}_{l\,p}$ übrig, der, wenn auch in sehr roher Form, die Rückwirkung der Wirbelströme des Polschuhes charakterisiert (Bild 16). In ihm haben wir daher das Gegenstück des früher künstlich erzeugten Dämpferstromes $\dot{J}_l$ zu erblicken.

Indes, so anschaulich diese Darstellung auch sein mag, so kann sie doch zur genauen Ermittelung des Längsfeldmomentes wenig nützen. Denn hierfür spielt auch die Verteilung des Feldes, die Bild 16 vernachlässigt, eine gewisse Rolle. Es kommt da weniger auf den Mittelwert als auf die erste Harmonische an, wenigstens solange wir auch Ampereleiterverteilung am Ankerumfang durch ihre Grundwelle ersetzen. Und das ist ja der allgemeine Gebrauch, dem wir uns anschließen.

Wenn ich jetzt von einer ersten Harmonischen spreche, so beziehe ich sie natürlich auf die ganze Polteilung als halbe Wellenlänge. Ich verstehe also unter der Grundwelle des Längsfeldes nicht mehr den Wert $\overset{\vdots}{B}_{l\,i}$, sondern das Integral

$$\overset{\vdots}{B}_l = \frac{2}{tp}\int_{-\frac{tp}{2}}^{\frac{tp}{2}} \dot{B}_l \sin\frac{\pi}{tp}\,x\,d\,x \qquad 47)$$

oder da wir das Feld im Polzwischenraum vernachlässigen:

$$\overset{\vdots}{B}_l = \frac{2}{tp}\int_{-\frac{\alpha\,tp}{2}}^{\frac{\alpha\,tp}{2}} \dot{B}_l \sin\frac{\pi}{tp}\,x\,d\,x.$$

Zwischen diesen neuen Grenzen können wir aber die Sinuslinie zerlegen, und zwar in eine konstante Komponente $\cos\frac{\pi\alpha}{2}$ und eine übergelagerte cos-Linie von der halben Wellenlänge B und der Amplitude



$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Es gilt also auch:

$$\tilde{\dot{B}}_l = \frac{2}{tp}\int_{-\frac{\alpha tp}{2}}^{\frac{\alpha tp}{2}} \dot{B}_l \left[\cos\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cos\frac{\pi}{B}x\right] dx.$$

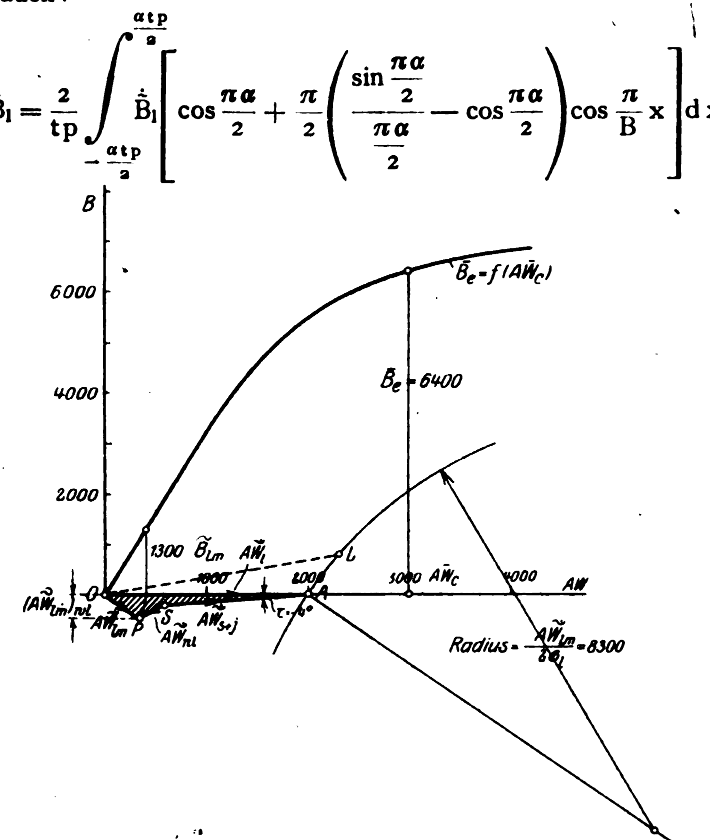


Bild 16a. 100 KW-Type ($\sigma_1 = 0{,}005$).

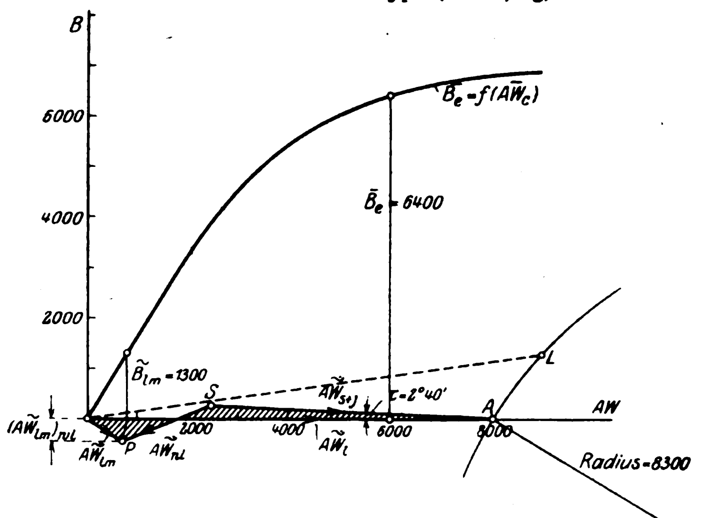


Bild 16b. 1000 KW-Type ($\sigma_1 = 0{,}05$).

Bild 16. Diagramm der mittleren AW-Komponenten des Längsfeldes.

Dabei bezeichnet $\dot{B}_1$ bereits einen Mittelwert, den das Feld für eine bestimmte Abszisse x längs der ganzen Ankerbreite L besitzt.

Die angewandte Aufteilung der Sinuswelle ist deshalb so vorteilhaft, weil nun offenbar die konstante Komponente nur mit dem mittleren Längsfeld $\dot{B}_{1m}$, die cos-Welle auch nur mit der Grundwelle $\dot{B}_{1I}$ einen Integralwert liefert. Daraus folgt sogleich:

$$\ddot{B}_1 = \ddot{B}_{1m} \cdot 2\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2} + \ddot{B}_{1I}\frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

oder wenn man den Feldkomponenten die schon früher ermittelten Werte gibt:

$$\ddot{B}_1 = \frac{0{,}4\pi}{\delta}\ddot{A}W_1 \cdot 2\alpha\left\{\Psi_1\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left(\frac{\pi^2}{8}\,\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} + \left(2 - \frac{\pi^2}{8}\right)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \Phi_1 \cos^2\frac{\pi\alpha}{1}\right\}$$

$$- \frac{0{,}4\pi}{\delta}\dot{A}W_{S+J} \cdot 2\alpha\left\{\Psi_1\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \Phi_1\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right\}. \qquad 48)$$

Man darf sich nicht daran stoßen, daß diese Gleichung etwas lang und unbequem aussieht. Das liegt nur daran, daß wir sie allgemein für beliebige Polbedeckungen aufgestellt haben. Beschränken wir sie jetzt auf den gebräuchlichen Mittelwert $\alpha = \frac{2}{3}$, so erhalten wir schon einen sehr viel einfacheren Ausdruck:

$$\ddot{B}_1 = \frac{0{,}4\pi}{\delta}\ddot{A}W_1 \cdot \{0{,}611\,\Psi_1 + 0{,}333\,\Phi_1\} - \frac{0{,}4\pi}{\delta}\dot{A}W_{S+J}\{0{,}423\,\Psi_1 + 0{,}667\,\Phi_1\}. \qquad 49)$$

Zwei Zahlenbeispiele mögen zeigen, wie niedrig hiernach die Ausnutzung der Ankeramperewindung bei massiven Polrädern einzuschätzen ist. In den zitierten Arbeiten III und IV habe ich bereits die Induktionsströmungen des Längs- und Querfeldes für eine 100- und 1000-KW-Type bestimmt. Davon will ich jetzt Gebrauch machen. Beide Typen waren Langsamläufer von 375 Touren, die erste in allen Teilen gerade halb so groß als die zweite. Von ihren Abmessungen interessieren jetzt nur die Werte:

Für die	100 KW-Type	1000 KW-Type
Polzahl 2p	16	16
Ankerradius . . . . R	50	100
Ankerbreite L	22,5	45
Polteilung . . . . tp	19,5	39
Polbedeckungsfaktor . . . . α	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
Polbogen . . . . $B = \alpha tp$	13	26
Luftspalt mit Zuschlag für Nuten: . . δ	0,4	0,8

Über die Ausnützung der Modelle im normalen Betrieb mögen folgende Werte einen Überblick geben:



Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Resultierende Felderregung	$\overline{AW}_e$	3000	6000
Dazu: Luftinduktion unter dem Polschuh	$\bar{B}_e$	6400	6400
Effektive Ampereleiterzahl pro cm .	$\overline{AS}_{norm}$	153	191
Maximale Ampereleiterzahl pro cm .	$\hat{AS}_{norm}$	206,5	258
Volle Ankergegenamperewindungen .	$\overline{AW}_g$	1060	2650
Also im Verhältnis zu den Erreger-AW	$\frac{\overline{AW}_g}{\overline{AW}_e}$	0,353	0,442
Normales Drehmoment	D^{mkg}_{norm}	260	2600

Um diese beiden Maschinen mit einem mittleren Längsfelde von nur $\tilde{B}_{lm} = 1300$ anzulassen, mußte man der 100 KW-Type nicht weniger als den 1,9fachen, der 1000 KW-Type sogar den 3 fachen Normalstrom zubilligen. Wir erhalten sonach:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Als Scheitelwert der Ankeramperewindungen	$\hat{AW}_l = \hat{AW}$	2420	9680
Und als Mittelwert unter dem Polbogen . .	$\tilde{AW}_l$	2000	8000
Davon entfällt aber auf Joche und Pole allein schon der Vektor	$\tilde{AW}_{S+J}$	1420	5540
Also im Verhältnis zu den Gesamtamperewindungen	$\frac{\tilde{AW}_{S+J}}{\hat{AW}_l} = t$	0,590	0,573
Außerdem ist $\dot{A}W_{S+J}$ gegen $\dot{\hat{A}}W_l$ verspätet um einen Winkel	τ	-4°	$2^\circ\,40'$

Man sieht nur eine verhältnismäßig kleine Komponente der Ankererregung wird für die Erregung des Treibfeldes nutzbar gemacht und selbst diese nur sehr unvollkommen. Denn sie vermag keine erhebliche wattlose Feldkomponente zu erzeugen. Das kommt daher, daß auch die charakteristischen Funktionen Φ_l und Ψ_l nur eine kleine Phasenverschiebung gegen die reelle Achse besitzen, und zwar ist:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Die für das mittlere Feld $\dot{B}_{lm}$ maßgebende Funktion .	Φ_l	0,710 + j 0,214	0,410 + j 0,195
Während sich die Grundwelle $\dot{B}_{lI}$ ableitet aus	Ψ_l	0,650 + j 0,255	0,300 + j 0,210

Unter dem Zusammenwirken so vieler ungünstiger Einflüsse ergibt sich schließlich

ein Längsfeld von der Grundwelle . . .	$\dot{\hat{B}}_l = \frac{0,4\pi}{\delta} \dot{\hat{A}}W_l z_l$	1360 + j 830	1440 + j 850
entsprechend einem Koeffizienten . . .	$z_l = x_l + j y_l$	0,179 + j 0,110	0,095 + j 0,056
der Absolutwert der Amplitude ist . .	$\hat{B}_l$	1600	1670
die Phasenverschiebung gegen $\hat{A}W_l$ . .	φ_l	$31^\circ\,30'$	$30^\circ\,30'$

b. Das Querfeld.

Wenn auch der magnetische Schließungskreis des Querfeldes mit dem des Längsfeldes dieselben prinzipiellen Mängel gemein hat, so treten diese doch nicht in so verhängnisvoller Stärke auf. Wohl absorbiert z. B. auch diesmal der massive Eisenweg einen nicht zu vernachlässigenden Anteil der Ankererregung; aber sein Widerstand ist doch nicht zu vergleichen mit dem der Polkerne und Jochstücke beim Längsfeld. Ebenso ist auch beim Querfeld der Polschuh der Sitz erheblicher Wirbelstrombildungen; aber ihre Rückwirkung ist viel geringer, weil sie nicht mehr um einen Mittelpunkt — die Polmitte — sondern um 2 Zentren rechts und links von ihr kreisen und darum eine kleinere mittlere Windungsfläche besitzen. Diese quantitativen Unterschiede — ich möchte nicht sagen „Vorteile", denn „geringere Nachteile" wäre wohl richtiger —. Diese Unterschiede also kommen der Ausbildung

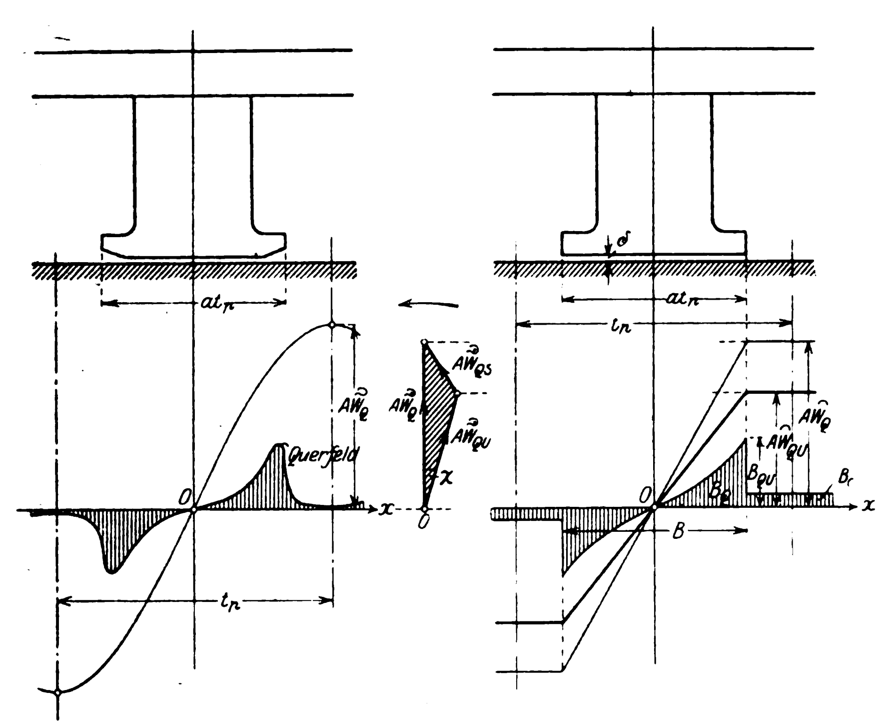


Bild 17. Zur Zerlegung der Queramperewindungen.

des Querfeldes so zustatten, daß seine Kraftwirkung trotz der empfindlichen Störung durch den Polzwischenraum kaum hinter der des Längsfeldes zurückbleibt, ja sie häufig sogar übertrifft.

Die vollständige Theorie des Querfeldes habe ich im 2. Teil der Arbeit IV. niedergelegt. Hier will ich nur das Notwendigste herausgreifen: Wir ersetzen die Queramperewindungen

$$\tilde{AW}_q = \hat{\tilde{AW}}_q \sin \frac{\pi}{t_p} x$$

wie seinerzeit im Abschnitt A durch eine Trapezwelle von der oberen Breite $B = \alpha t_p$ und der Höhe

$$\hat{\tilde{AW}}_Q = \hat{\tilde{AW}}_q \frac{\pi}{4} \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}. \qquad 19)$$

Davon wird ein nicht unbeträchtlicher Anteil $\hat{AW}_S$ schon im Polkern verbraucht, wo er den Querflux teils der Bohrungsfläche entlang, teils auf dem Umweg über die Seitenflächen des Kernes auf die andere Seite der Polmittelebene hinüberleitet. Erst der Rest, das ist die Trapezwelle von der Höhe

$$\hat{AW}_{QU} = \frac{\hat{AW}_Q}{ü} (\cos \chi + j \sin \chi) \tag{50}$$

kommt für die Durchflutung der Zähne und des Luftraumes, oder sagen wir kurz: für den reduzierten Luftspalt δ in Frage (Bild 17).

Die obenerwähnten Schenkelamperewindungen $\hat{AW}_S$ sind allerdings kein reiner Verlust. Insofern sie dazu dienen die Phase τ der Luftspaltamperewindungen $\hat{AW}_{QU}$ und damit auch des Querfeldes zu verzögern, könnte man sie eher als einen Gewinn buchen. Aber wenn wir eine gleich große Amperewindungskomponente durch eine Dämpferwicklung absorbieren ließen, so könnten wir eine sehr viel größere Phasenverspätung erzielen, ganz abgesehen davon, daß wir die Größe von AW_S nicht in der Hand haben.

Bleibt schon die Randinduktion

$$\dot{B}_{QU} = \frac{0{,}4\pi}{\delta} \hat{AW}_{QU} \tag{51}$$

hinter der Phase der Ankeramperewindungen etwas zurück, so bewirken nun noch die Wirbelströme in den massiven Polschuhen, daß auch das mittlere Querfeld seinerseits wieder hinter der Randinduktion verspätet ist. Das ist abermals prinzipiell günstig: denn je größer die Phasenverzögerung, um so größer das zu erwartende Drehmoment. Aber es ist auch abermals nicht günstig genug; denn die Größe der Wirbelstrom-Gegenamperewindungen steht in keinem Verhältnis zu der dadurch erreichten geringfügigen Phasenverschiebung.

Im übrigen ist es mir hier nicht um Feinheiten der Feldverteilung zu tun, sondern ich will mich wie beim Längsfeld mit der Formulierung der Grundwelle begnügen. Den Mittelwert, den das Querfeld an irgend einer Stelle der Ankerperipherie über die ganze Länge L besitzt, bezeichne ich jetzt kurzerhand mit $\dot{B}_q$. Dann versteht man unter der ersten Harmonischen des Querfeldes das Integral:

$$\hat{\dot{B}}_q = \frac{4}{t_p} \int_0^{\frac{t_p}{2}} \dot{B}_q \sin \frac{\pi}{t_p} x \, dx. \tag{52}$$

Aber nach diesem Schema wäre die Rechnung noch sehr umständlich. Darum benützen wir besser einen kleinen Kunstgriff und setzen auch diesmal die Sinus-Funktion genau wie zuvor die Welle der Queramperewindungen durch ein möglichst gleichwertiges Trapez. Es ist dann zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\alpha t_p}{2}$:

$$\sin \frac{\pi}{t_p} x \approx \frac{\pi}{4} \frac{\frac{\pi \alpha}{2}}{\sin \frac{\pi \alpha}{2}} \cdot \frac{2x}{B}$$

und darüber hinaus im Polzwischenraum:

$$\sin \frac{\pi}{t_p} x \approx \frac{\pi}{4} \frac{\frac{\pi \alpha}{2}}{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}.$$

Damit wird nunmehr:



$$\dot{\hat{B}}_q = \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\alpha t p}{2}} \dot{\hat{B}}_q \frac{2x}{B} \cdot d\left(\frac{2x}{B}\right) + \frac{2}{B} \int_{\frac{\alpha t p}{2}}^{\frac{tp}{2}} \dot{\hat{B}}_q \, dx \right\}.$$

Beide Integrale haben eine einfache Bedeutung: Das zweite bezeichnet den Fluß des Polzwischenraumes pro cm Ankerlänge, eine Größe, die wir mit Hilfe der mittleren Induktion

$$\dot{\hat{B}}_c = \dot{\hat{B}}_{QU} \cdot \frac{\delta}{\delta_c} \tag{53}$$

kürzer auszudrücken gewohnt sind (siehe auch Formel 22). — Dagegen bedeutet das erste Integral einen größeren Mittelwert des Querfeldes unter dem Polschuh

$$\dot{\hat{B}}_{Qm} = \dot{\hat{B}}_{QU} \cdot \frac{1}{3} \Psi_q \tag{54}$$

von dem wir in der Arbeit IV bereits ausgiebig Gebrauch gemacht haben. Wir formulierten damals die Hilfsgröße Ψ_q als Funktion der reduzierten Polbreite $\beta_0 B$ und des Seitenverhältnisses $\frac{L}{B}$ des Polschuhes und illustrierten sie durch zahlreiche Kurven. So ist also auch die Grundwelle selbst sofort anzugeben, indem wir sie durch die Schreibweise

$$\dot{\hat{B}}_q = \frac{\dot{\hat{B}}_{QU}}{3} \cdot \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \left[\Psi_q + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{3\delta}{\delta_c}\right] \tag{55}$$

$$= \frac{0{,}4\pi}{\delta} \dot{\hat{A}W}_q \cdot \frac{2\alpha}{3} \left(\frac{\pi}{4} \frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \left[\Psi_q + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{3\delta}{\delta_c}\right] \cdot \frac{\cos\chi + j\sin\chi}{ü} \tag{55 a}$$

auf die frühere Arbeit beziehen.

Freilich, wer diese Arbeit nicht studiert hat, dem wird die Formel an sich noch wenig sagen. Doch wird ihm hoffentlich die Fortsetzung der beiden Zahlenbeispiele wenigstens einen allgemeinen Überblick verschaffen. Da wir hierbei die genaue Stromaufnahme der Ankerphasen noch nicht kennen, so sind wir vorerst darauf angewiesen, Längs- und Queramperewindungen gleich groß anzunehmen. Das hat ja auch nach den Schlußfolgerungen des Abschnittes B I keinerlei Gefahr. Wir verwenden also:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Als Amplitude der sinusförmig verteilten Queramperewindungen	$\dot{\hat{A}W}_q$	2420	9680
Sodann entnehmen wir aus Arbeit IV das Verhältnis	$ü = \frac{\hat{A}W_Q}{\hat{A}W_{QU}}$	1,57	2,65
und die Phasenverzögerung der Luftspaltamperewindungen	χ	18° 40′	26° 50′
Die Wirbelströmung im Polschuh verzögert die Feld-Phase noch weiter gemäß der Funktion	Ψ_q	0,865 + j 0,115	0,675 + j 0,175

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Daraus bezeichnet sich für $\delta_c = 6\,\delta$			
ein Querfeld von der Grundwelle .	$\hat{B}_q = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta}\,\hat{AW}_q\,z_q$	1980 + 905	1720 + j 1260
entsprechend einem Koeffizienten .	$z_q = x_q + j\,y_q$	0,260 + j 0,119	0,113 + j 0,087
Der Absolutwert der Amplitude ist	$\hat{B}_q$	2180	2170
und die Phasenverschiebung gegen $\hat{AW}_q$	φ_q	24° 30′	37° 30′

Das sind indes erst Näherungswerte, die wir zur Korrektur der angenommenen Längs- und Queramperewindungen ausbeuten müssen. Mit

$$\sigma = 0{,}15 \text{ und } \frac{r}{K_0} = 0{,}03$$

ergibt sich nach Gleichung (39)

Für die	100 KW-Type	1000 KW-Type
$\frac{\hat{AW}_q}{\hat{AW}_l}$	$j\,\frac{0{,}329 + j\,0{,}140}{0{,}410 + j\,0{,}149} = -0{,}043 + j\,0{,}82$	$j\,\frac{0{,}245 + j\,0{,}086}{0{,}263 + j\,0{,}117} = 0{,}083 + j\,0{,}895$
d. h. $\frac{\hat{AW}_q}{\hat{AW}_l}$	0,82	0,90
und $\sphericalangle\,(\hat{AW}_q, \hat{AW}_l) = \varphi_{ql}$	93°	85° 20′

Es ist daher am richtigsten, die Längsamperewindungen nachträglich um 10,5 % bzw. 5,3 % zu erhöhen, die Queramperewindungen um ebensoviel zu erniedrigen. Dann können wir dem endgiltigen Vergleich folgende korrigierten Werte unterlegen:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Amplitude der Längsfeldamperewindungen	$\hat{AW}_l$	2680	10 200
Grundwelle des Längsfeldes	$\hat{B}_l$	1770	1760
Phasenverzögerung gegen die $\hat{AW}_l$	φ_l	31° 30′	30° 30′
Amplitude der Querfeldamperewindungen	$\hat{AW}_q$	2190	9180
Grundwelle des Querfeldes	$\hat{B}_q$	1970	2060
Phasenverzögerung gegen die $\hat{AW}_q$	φ_q	24° 30′	37° 30′

c) Das Anlaufmoment.

Was wir bisher auch berechnet haben, die Unsymmetrie in den Längs- und Queramperewindungen, die Grundwellen der hierdurch erregten Felder, alles zielte letzten Endes nur darauf hin, der Berechnung des Anlaufmomentes als Basis zu dienen. Jetzt sind wir mit den Vorarbeiten fertig: Wir können das Vektordiagramm

der Amperewindungen und Felder aufzeichnen, wie es in Bild 18 und 19 für die behandelte 100- und 1000-KW-Type geschehen ist. Wir können daraus die Längsfeldkomponente

$$(\hat{\hat{B}}_l)_q = \hat{\hat{B}}_l \cos(\varphi_{ql} - \varphi_l) \tag{56}$$

abgreifen, welche in Phase mit den Querampereleitern pulsiert und demgemäß mit ihnen ein Drehmoment ausbildet. Wir können ebenso die treibende Querfeldkomponente

$$(\hat{\hat{B}}_q)_l = \hat{\hat{B}}_q \cos(\varphi_{ql} + \varphi_q) \tag{56a}$$

bestimmen, die mit den gleichphasigen Längsampereleitern kontrastiert. Wir könnten beide Komponenten sogar nach den abgeleiteten Gesetzen analytisch formulieren. Aber da dies zu unhandlichen Ausdrücken führen würde, so lassen wir es lieber und schreiben die Momentengleichungen in der einfachen Form:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Längsfeldmoment:} & D_l^{mkg} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{10^{-8}}{9{,}81} \cdot p R L \cdot (\hat{\hat{B}}_l)_q \hat{AW}_q \\ \text{Querfeldmoment:} & D_q^{mkg} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{10^{-8}}{9{,}81} \cdot p R L \cdot (\hat{\hat{B}}_q)_l \hat{AW}_l. \end{array}\right\} \tag{57}$$

Welches Urteil können wir jetzt an Hand der Theorie über die Zweckmäßigkeit massiver Polräder oder Polgehäuse abgeben? Bleiben wir bei unseren Zahlenbeispielen und rufen uns die Hauptdaten noch einmal ins Gedächtnis:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Die Ankerrückwirkung war nicht eben groß, sondern betrug	$\frac{\overline{AW}_g}{\overline{AW}_{e\,norm}}$	0,353	0,442
Als Mittelwert der Anlaufströme in den 3 Phasen hatten wir zugelasen	J_{Anl}	1,9	3,0
und erreichten damit eine Grundwelle der Längsamperewindungen	$\hat{AW}_l$	2680	10 200
und eine Grundwelle der Queramperewindungen	$\hat{AW}_q$	2190	9180
Dazu entnehmen wir jetzt Bild 18/19 die treibenden Komponenten	$(\hat{\hat{B}}_l)_q$	845	1015
und	$(\hat{\hat{B}}_q)_l$	910	1115
Im synchronen Betrieb mit $\cos\varphi = 1$ leistet die Maschine bei Vollast	D_{norm}	260	2600
Im asynchronen Anlauf erreicht sie nur ein Längsfeldmoment	D_l	26,6	537
und ein Querfeldmoment	D_q	35,1	655
insgesamt also ein Anlaufmoment	D_{Anl}	61,7	1192
Das entspricht einem Verhältnis der Momente .	$\frac{D_{Anl}}{D_{norm}}$	0,237	0,46

Neben diesen Resultaten erscheinen die entsprechenden Werte der lamellierten Ausführung (Bild 11) erst in ihrer vollen Bedeutung. Selbst wenn wir das dort

6*

angenommene Verhältnis von $\frac{\overline{AW_q}}{\overline{AW_e}} = 0{,}5$ auf die etwas geringeren Werte der vorliegenden Zahlenbeispiele herabsetzen, erhalten wir noch immer:

Für $J_{Anl.} = 1{,}9\ J_{norm}$ (100 KW-Type) : $D_{Anl.} = 1{,}3\ D_{norm}$

„ $J_{Anl.} = 3\ J_{norm}$ (1000 KW-Type): $D_{Anl.} = 2{,}7\ D_{norm}$.

Ich glaube es bedarf keines weiteren Wortes, um die gänzliche Ungeeignetheit der behandelten Konstruktion für hochbelasteten Anlauf in das rechte Licht zu setzen. Eher fühle ich, als ob ich mich entschuldigen müßte, daß ich soviele Mühe auf eine verlorene Sache verwandt habe. — Aber, hat man denn diese Sache vorher als eine verlorene betrachtet? Mir ist immer nur der entgegengesetzte Standpunkt

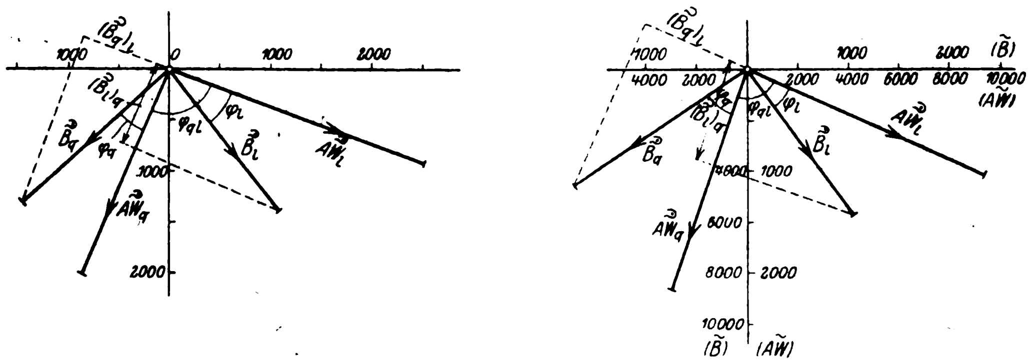


Bild 18. 100 KW-Type. 1000 KW-Type.
Zeitvektordiagramme für die Grundwellen der Felder und Amperewindungen.

entgegengetreten. Und weiter: Wenn auch die massive Bauart für hochbelasteten Anlauf auf die schwarze Liste gesetzt werden sollte, für Leerlauf wird sie immer die herrschende bleiben und auch hier empfand man es bitter, daß man bisher den Anlaufverhältnissen durch Rechnung so gar nicht beikommen konnte.

III. Die Synchronmaschine mit Dämpfervorrichtung.

Wenn die massive Konstruktion noch zu retten wäre, so könnte es nur durch eine Dämpfervorrichtung geschehen. Indessen zeigt sich, daß auch durch dieses Mittel das Fiasko nicht zu beheben ist, ja oft nicht einmal zu mildern ist. Man kann sich davon auf verschiedene Weise überzeugen, am einfachsten vielleicht auf dem imfolgenden beschrittenen Wege.

a) Die Längsfelddämpfung.

Angenommen, wir behalten das mittlere Längsfeld bei, legen aber um den Polschuh eine Kurzschlußwindung mit einem kleinen Streukoeffizienten σ_2 und einem möglichst günstigen Widerstandsverhältnis $\frac{\sigma_l}{k_{lo}}$. Denkbar günstig liegt dieses natürlich dann, wenn die Ausnützung der gesamten Anker-MMK. zur Erzeugung der treibenden Komponente des Längsfeldes ein Maximum wird. Streng genommen sollte also das Verhältnis der Längsamperewindungen zu derjenigen Komponente der 1. Längsfeldharmonischen, die in Phase mit den Queramperleitern pulsiert, ein Minimum werden. Aber diese Bedingung ist ein wenig kompliziert und hier, wo es sich nur um die Gewinnung eines überschläglichen Urteils handelt, kann man die Schärfe der Forderung getrost etwas mildern: Vor allem wird man nicht weit fehlgehen, wenn man den Mittelwert und die Grundwelle des Längsfeldes als proportionale Größen betrachtet und ihnen auch eine ungefähr gleiche Phasenver-



schiebung gegen die erregenden Amperewindungen beimißt. Sodann haben wir erfahren, daß der Zeitwinkel zwischen den Vektoren der Längs- und Queramperewindungen nicht viel von 90^0 abweichen kann. Nimmt man beides zusammen, so scheint es genügend, das Verhältnis aus der wattlosen Komponente des mittleren Längsfeldes zu dem mittleren Ankerlängsamperewindungen zu einem Maximum zu machen. Hiernach wollen wir also die Dämpferwicklung auslegen, gleichgültig wie hoch daher der Anlaufstrom ausfallen mag.

Das Vektordiagramm des Bildes 16 läßt sich zwanglos auf diesen Fall erweitern. In Bild 20 stellt $\overline{OPSAO}$ das ursprüngliche Amperewindungspolygon dar. Das Längsfeld induziert der Dämpferwindung eine EMK.

$$\dot{E}_{lo} = j\,A\dot{W}_{lm}\,K_{lo},$$

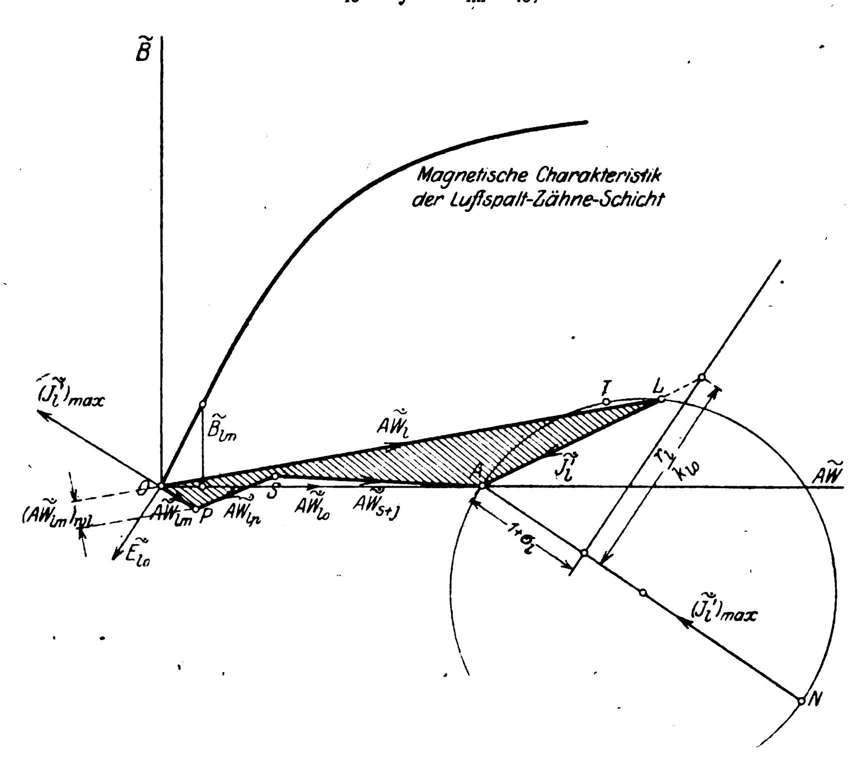


Bild 20. Diagramm der mittleren AW̃-Komponenten des Längsfeldes (Kurzschlußwindung um die Polschuhe).

die durch die Spannungsabfälle der Streuung und des Ohmschen Widerstandes kompensiert wird. Es ist also auch

$$\dot{E}_{lo} = \dot{J}_l'\,(r_l - j\,K_{l\sigma}).$$

Nehmen wir nun für einen Moment an, die Dämpferwindung besäße überhaupt keinen Widerstand ($r_l = 0$), dann wäre

$$(\dot{J}_l')_{max} = -\,A\dot{W}_{lm}\,\sigma_l$$

und das ist zugleich der größte Wert, den der Dämpferstrom überhaupt annehmen könnte. Reihen wir ihn durch den Vektor $\overline{NA}$ sogleich dem AW-Polygon an.

Weiter läßt sich aber zeigen, daß der Vektor des Dämpferstromes bei veränderlichem Widerstande r_l einen Kreis beschreiben muß. Dieser Kreis muß daher $\overline{AN}$ zum Durchmesser haben und damit ist seine Lage bekannt. Ich brauche also

jetzt nur irgend einen Punkt L seiner Peripherie mit A zu verbinden, so repräsentiert dieser Vektor den Dämpferstrom J_1' und auch das Widerstandsverhältnis $\frac{r_1}{k_{1o}}$ kann auf der bekannten Maßstabsgeraden (siehe Abb.) des Kreises unmittelbar abgelesen werden.

Fehlt mir noch, daß auch die mittleren Ankeramperewindungen unter dem Polschuh, d. i.

$$\dot{AW}_l = \hat{AW}_l \frac{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}{\frac{\pi \alpha}{2}}$$

dem Kreisdiagramm entnommen werden könnten. Ganz streng trifft das freilich nicht zu. Zwar änderten wir durch die Dämpferwindung weder $\dot{AW}_{lm}$ noch $\dot{AW}_{S+J}$; denn wir wollten ja den Feldmittelwert $\dot{B}_{lm}$ beibehalten. Aber die Verteilung der Induktion hat sich ein wenig verschoben und damit vielleicht auch der Vektor $\dot{AW}_p$, der die Rückwirkung der Wirbelströme im Polschuh kennzeichnet. Glücklicherweise zeigt jedoch die genauere Rechnung, daß hierauf keine Rücksicht zu nehmen ist. Mit anderen Worten: Wenn wir die Schlußseite $\dot{\overline{OL}}$ des neuen Amperewindungspolygons ziehen, so dürfen wir diesen Vektor nach Größe und Phase unbedenklich den mittleren Längsamperewindungen gleichsetzen.

Uns interessiert nur diejenige Kombination, für welche $\frac{(\dot{AW}_{lm})_{wl}}{\dot{AW}_l}$ im Maximum erreicht. Hierfür liegt L ein klein wenig unter dem Berührungspunkt T der Tangente aus dem Koordinatenursprung. Es ist der Punkt, den ich in den maßstäblichen Diagrammen 16a) und b) für die beiden behandelten Typen eingetragen habe. Darnach entspricht

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Eine Erhöhung des prozentualen Anlaufstromes von	$\frac{J_{Anl}}{J_{norm}}$ =	1,9 auf 2,2	3,0 auf 3,4
Nur eine Erhöhung der Amperewindungsausnützung von	$\frac{(\dot{AW}_{lm})_{wt}}{\dot{AW}_l}$ =	0,116 auf 0,123	0,053 auf 0,058

Hätten wir umgekehrt den Anlaufstrom konstant gelassen, so würde das Drehmoment etwa in diesem Verhältnis gestiegen sein. Das bedeutet für beide Maschinen ein so deutliches Fiasko, daß jedes weitere Wort zu viel wäre. Das beste ist, wir verzichten für unsere Zahlenbeispiele überhaupt auf die Längsfelddämpfung.

b) Die Querfelddämpfung.

Für eine Querfelddämpfung sind die Aussichten nicht ganz so ungünstig, wie sie eine Kurzschlußwindung in der Achse des Querfeldes vorfand. Diese wurde durch die viel zu großen Gegenamperewindungen der Wirbelströmung in Joch, Schenkel und Polschuh von Anfang an zur Wirkungslosigkeit verurteilt. Was für



die Luftspaltzone übrig blieb, war ja so wenig und besaß bereits eine solche Nacheilung, daß eine weitere Verzögerung der Phase auf Kosten der Amplitude der Luftspalt-MMK. nicht mehr von Erfolg begleitet sein konnte. Beim Querfeld dagegen pflegt die Wirbelströmung im Polschuh und Kern nicht gleich den Löwenanteil der Anker-MMK. zu verschlingen, wenigstens nicht bei kleinen und mittleren Typen. So kann man es hier immerhin mit einer Dämpfervorrichtung versuchen.

Man könnte diese wie im Abschnitt A als verteilte Wechselstromwicklung ausführen, und die soeben für das Längsfeld entwickelte Methode auf das Querfeld übertragen. Die gebräuchliche Bauart verwendet jedoch ein Dämpfergitter aus Messing- oder Kupferstäben, das, wenn es besonders wirksam sein soll, den Polzwischenraum überbrücken muß (Bild 21). Im 2. Hauptteil der Arbeit IV. habe ich die Theorie dieser Ausführung entwickelt und namentlich auch dargetan, wie man das Gitter auf ein Maximum seiner Wirksamkeit dimensionieren kann. Trotz alledem versagt es für die 1000 KW-Type, weil hier eben die Wirbelströmung doch

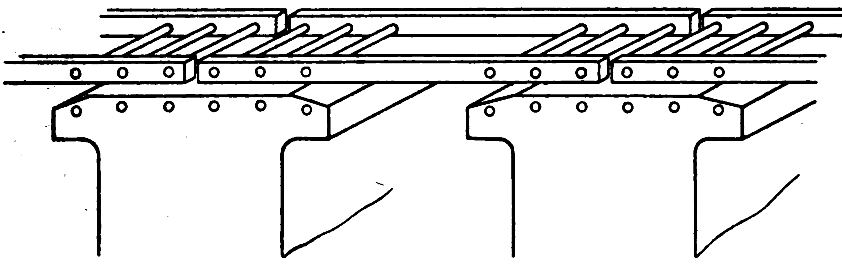


Bild 21. Stabgitter der Querfelddämpfung.

noch zu stark ist. Nur für die 100 KW-Maschine ließ sich ein kleiner Vorteil erringen, dessen Einfluß auf das Anlaufmoment aus der nachfolgenden Tabelle ersichtlich ist:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Aus Bild 26/27 in Arbeit IVa folgt für das charakteristische Verhältnis	$z_q = x_q + j y_q$	0,215 + j 0,162	0,088 + j 0,088
mit	$[z_q]$	0,27	0,125
und	φ_q	37° 10′	45°
Für das Längsfeld hingegen verwenden wir wie früher	$z_l = y_l + j y_l$	0,179 + j 0,110	0,095 + j 0,056
mit	$[z_l]$	0,210	0,110
und	φ_l	31° 30′	30° 30′
Daraus berechnet sich die Unsymmetrie zwischen Quer- und Längs-AW zu	$\frac{\hat{AW}_q}{\hat{AW}_l}$	0,071 + j 0,867	0,116 + j 0,942
mit	φ_{lq}	85° 20′	83°
Wir würden also aus den ursprünglich angenommenen Werten der Längs- und Queramperewindungen (d. i. 2420 bzw. 9680) ableiten	$\hat{AW}_q$	$\frac{2420}{1,072} = 2260$	$\frac{9680}{1,025} = 9450$
bzw.	$\hat{AW}_l$	2420·1,072 = 2600	9680·1,025 = 9850
Und finden weiterhin die Amplitude der Grundwelle des Querfeldes	$\hat{B}_q$	1920	1850
des Längsfeldes	$\hat{B}_l$	1720	1700
sowie die treibende Komponente des Querfeldes	$(\hat{B}_q)_l$	1030	1140
und des Längsfeldes	$(\hat{B}_l)_q$	1010	1040

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Damit können wir nun auch das Drehmoment berechnen. Wir finden für			
das Querfeldmoment	D_q^{mkg}	38,6	646
das Längsfeldmoment	D_l^{mkg}	32,9	564
Insgesamt also für das Anlaufmoment mit Querfelddämpfung	D_{Anl}^{mkg}	71,5	1210
Gegenüber einem Werte ohne Querfelddämpfung	D_{Anl}^{mkg}	61,5	1190

Man sieht: bei der 1000 KW-Type hat sich praktisch überhaupt nichts geändert, bei der 100 KW-Type ist das Anlaufmoment um 16% gestiegen, bleibt aber im Verhältnis zum normalen Moment (260 mkg) immer noch so gering, daß von einem wirklichen Erfolg nicht gesprochen werden kann. Was hätten wir erst zu erwarten gehabt, hätten wir nicht gerade die günstigste Dimensionierung getroffen. Es ist eben eine viel zu wenig bekannte Wahrheit, daß Dämpfer bei massiven Polen und Jochen selbst im günstigsten Falle das Anlaufmoment nur wenig erhöhen, daß sie aber um so mehr verderben können, wenn man — wie leider so häufig — bei der Auslegung „daneben haut".

c) Der voraussichtliche Kompromiß.

Das Ergebnis unserer bisherigen Untersuchungen läßt sich in den Sätzen zusammenfassen:

1. Die Synchronmaschine kann ein hohes Anlaufmoment entwickeln, wenn sie in allen Teilen zweckentsprechend dimensioniert wird.

2. Eine richtig ausgelegte Dämpferwicklung ist stets einem Kurzschlußkreis aus massivem Eisen überlegen.

3. Die normale Bauart der Synchronmaschine mit vollkommen massiven Polen und Jochen ist für die Erzielung eines hohen Anlaufmomentes nicht geeignet.

Ist die Möglichkeit mit Synchronmaschinen ein starkes Anzugsmoment zu erreichen, erst einmal in den Verbraucherkreisen bekannt, so wird zweifellos eine wachsende Nachfrage nach Synchronmaschinen mit asynchronem Anlauf einsetzen. Da diese hierfür günstigste Bauart, wie wir sie in Abschnitt A kennen lernten, erhebliche konstruktive Schwierigkeiten macht, andererseits aber die bisher gebräuchliche Bauart mit massiven Polen und Jochen nach unseren Untersuchungen in Abschnitt B nicht verwendet werden kann, so werden Konstrukteure und Berechner vor die Aufgabe gestellt sein, einen Kompromiß zwischen diesen beiden Bauarten zu schließen. — Wir wollen im folgenden versuchen, die Möglichkeiten abzuwägen, die sich einem derartigen Kompromiß eröffnen.

Zunächst könnte man Pole und Joche aus voneinander isolierten schmiedeeisernen Platten aufbauen und auf diese Weise sowohl den konstruktiven Schwierigkeiten der vollkommen lamellierten Bauart als auch den elektrischen Schwierigkeiten bei vollkommen massiver Bauart aus dem Wege gehen. In der Tat zeigen Theorie und Experiment, daß diese Konstruktion bei richtig gewählter Plattenstärke für schwach belasteten Anlauf, das heißt für Anzugsmoment bis zur Höhe des normalen Momentes, ausreicht. Auf die Berechnung der günstigsten Plattenstärke soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Sie liegt gewöhnlich zwischen 1 und 10 cm. Ein Vorzug gegenüber der vollkommen lamellierten Bauart ist der Fortfall eines besonderen Dämpferkreises in der Achse des Hauptfeldes. Es muß indessen betont werden, daß dieser Ersatz der Längsfelddämpfung durch die Wirbelströmung in den massiven Platten kein vollwertiger ist.

Eine zweite Möglichkeit ist die Lamellierung einzelner Teile des magnetischen Kreises, in erster Linie also der Pole. Behielte man hierbei das Joch in völlig massiver Ausführung bei, so könnte sich zwar das Querfeld frei ausbilden, für das Längsfeld wäre jedoch wenig gewonnen: Schaltet man aber dem massiven Joch einen lamellierten Nebenschluß parallel, so läßt sich fast dasselbe erreichen wie mit der völlig lamellierten Bauart. Wegen der Wichtigkeit dieser Anordnung werden wir auf den magnetischen Jochnebenschluß später noch ausführlicher eingehen.

Ob man das Querfeld durch Hinzufügen eines geblätterten Hilfspoles verstärken wird, erscheint mir zweifelhaft. Gegen die Unterteilung des Luftspaltes wird konstruktiv wohl weniger einzuwenden sein, und so dürfte sich diese Verbesserung mit der Zeit durchsetzen.

Am schwersten läßt sich voraussehen, welchen Lauf die konstruktive Ausbildung der Dämpfervorrichtung nehmen wird. Bisher verwandte man für Längs- und Querfelddämpfung ein und dasselbe Stabgitter, eine Ausführungsform, die ich in Arbeit IV ausführlich behandelt habe. Man hatte damit freilich mehr die Beruhigung mechanischer Pendelungen im Parallelbetrieb als die Bedürfnisse der Anlaufschaltung im Auge, nur so ist der Widerstand der meisten Dämpfervorrichtungen viel zu gering. Im Gegensatz dazu dachten wir nur unsere Mustermaschine mit 2

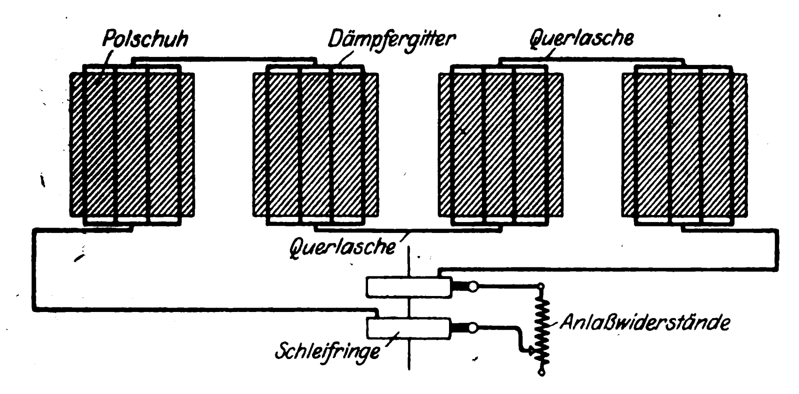


Bild 22. Längsfeld- und Querfelddämpfung kombiniert. Widerstand der Querfelddämpfung regelbar.

getrennten Dämpferkreisen versehen: einer Kurzschlußwicklung, die den Polschuh umschloß und einer verteilten Wicklung in der Achse des Querfeldes. Beide Kreise dimensionierte ich auf ein Maximum des Anlaufmomentes. Das führte zu riesigen Dämpferverlusten. War doch das Feld verschiedentlich so stark, daß es mehr als der normalen Netzspannung bedurft hätte, um den Anlaufstrom durch den Anker zu treiben. Bedenkt man, daß fast die ganze Anlaufleistung im Dämpferkreis vernichtet werden muß, so hat man einen Begriff, wie viel schwieriger die Verhältnisse gegenüber dem asynchronen Leeranlauf geworden sind. So wird man denn bis zur Erlangung eines abschließenden Urteiles noch viel zu denken und zu probieren haben, und ich kann wenig mehr tun, als einige der wichtigsten Gesichtspunkte namhaft machen.

Eines möchte ich gleich hier vorausschicken, obgleich der Beweis erst später folgt: Das Dämpfergitter kann etwa ebenso wirksam ausgenützt werden, wie die Dämpferwicklungen der oben beschriebenen Art. Daß ich solche im ersten Abschnitt zugrunde legte geschah nur um die Rechnung einfach zu halten. Sie sind jedoch etwas teuerer als die übliche Bauart. — Aber ganz abgesehen von Zweckmäßigkeit und Preis wird man sich fragen: Wenn nun irgend eine Dämpfervorrichtung nur mit Rücksicht auf das Anlaufmoment dimensioniert würde (wobei man zur Erhöhung des Anlaufwiderstandes den Shineffekt massiver Nutleiter zu Hilfe nehmen kann),

wäre es dann möglich, die Dämpferverluste ohne schädliche Erwärmung abzuführen? Und schließlich, wenn man selbst damit weit genug käme, dürfte man denn überhaupt ein starkes Anzugsmoment ganz plötzlich, stoßweise auf die mit dem Motor gekuppelte Maschine schalten?

Erst wenn man auf alle diese Fragen die Antwort gefunden hat, kann man zwischen den Forderungen der Theorie und der Praxis den richtigen Mittelweg einschlagen. Einstweilen will es mir scheinen, als könnte man unterhalb des Vollastmomentes die Dämpferverluste durch ein Dämpfergitter abführen, wofern die Anlaufzeit kurz, d. h. die zu beschleunigenden Massen gering sind. Dagegen glaube ich nicht, daß man mit isolierten Wicklungen die durch die Verbandsnormalien festgelegten Temperaturgrenzen einhalten könnte.

Die plötzliche Einschaltung des Vollastmomentes wird in der Regel zulässig sein; mehr aber werden wenige Anlagen aushalten. Und da bei Überschreitung dieser Grenze die Wärmeabfuhr schwierig wird, so wird man alsdann mindestens einen der beiden Kreise über Schleifringe zu regulierbaren Anlaßwiderständen führen (siehe z. B. Bild 22). Dabei gebührt der Querfelddämpfung der Vorzug. Denn als kurzgeschlossene Wicklung beruhigt sie im synchronen Betrieb etwaige Pendelungen ungleich wirksamer als eine Kurzschlußwicklung in der Achse der Hauptpole.

Wie man sich aber auch entscheiden mag, auf alle Fälle wird man die Maschine so auszulegen versuchen, daß sie für belasteten Anlauf mit voller Spannung anzulassen ist. In vielen Fällen wird das möglich sein, und bei den in Betracht kommenden Anlaufströmen und Leistungen ist die Ersparnis eines Anlaßtransformators ein Vorteil, den man sich nicht so leicht entgehen lassen kann.

Soviel über das Programm, das der praktische Ingenieur an Hand der entwickelten Theorie noch zu bewältigen hat. Während ich es in schneller Folge abrollen ließ, benützte ich 2 Argumente, deren Beweiskraft noch nicht erhärtet war: Ich sprach von der „Ungeeignetheit des massiven Joches für hoch belasteten Anlauf" und von der „Gleichwertigkeit von Dämpferwicklungen und Dämpfergittern". Mit Nachträgen über diese beiden Punkte kann ich daher meine Arbeit beschließen.

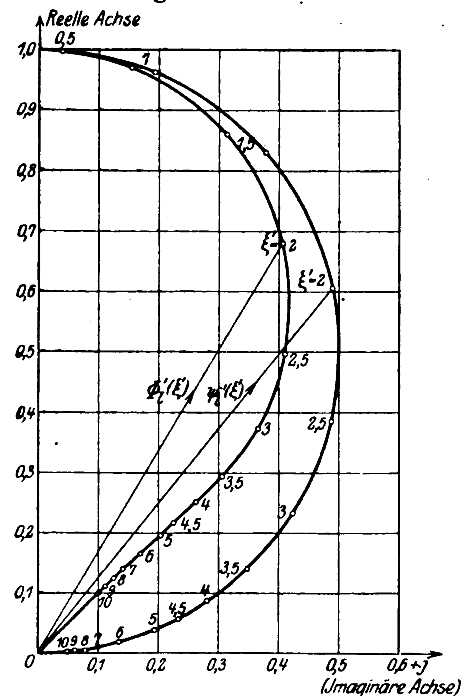


Bild 23. Vektordarstellung der Funktionen $\Phi_1'(\xi')$ und $(\Psi_1(\xi')$.

I. Dämpfergitter und Dämpferwicklung.

Bei richtiger Auslegung sind Dämpfergitter und Dämpferwicklung so gut wie ebenbürtig. Um das zu erkennen, muß man die beiden Bauarten für einen speziellen Fall miteinander vergleichen, und das mag hier an Hand der idealen Ausführung mit geblätterten Polen und Jochen in aller Kürze geschehen. Streufelder und Sättigungserscheinungen wollen wir vernachlässigen. Dagegen behalten wir die Luftspaltunterteilung bei. Außerdem möge für alle drei Phasen eine symmetrische Stromaufnahme vorausgesetzt werden. Dann liegen die Verhältnisse für die beiden Dämpferkreise wie folgt:

a) Längsfelddämpfung.

Die Wirkung des Dämpfergitters oder einer geschlitzten Dämpferplatte ist der eines massiven Polschuhes sehr ähnlich. Nur liefern die charakteristischen Funktionen Φ_1' und ψ_1' (siehe Gleichung 45 und 46) für streuungslose Stromkreise die viel günstigeren Werte:



$$\Phi_1'(\xi') = \frac{\mathfrak{Tg}\,(1-j)\frac{\xi'}{2}}{(1-j)\frac{\xi'}{2}} \qquad 58)$$

und

$$\Psi_1'(\xi') = \frac{1}{1 + j\frac{2}{\pi^2}\xi'^2}. \qquad 59)$$

In Bild 23 habe ich diese Vektorfunktionen in Abhängigkeit von der reduzierten Breite des Dämpfergitters, das ist

$$\xi' \approx \alpha' B \qquad 60)[1]$$

wiedergegeben, wobei

$$\alpha' = 2\pi\sqrt{v\cdot\frac{d}{\delta'}\cdot\frac{\lambda'}{1+k}\cdot 10^{-5}} \qquad 61)$$

zu setzen ist. λ' ist die Leitfähigkeit des Dämpfermaterials, d die Stärke einer äquivalenten Dämpferplatte, welche die ganze Polschuhfläche bedeckt und dasselbe Gewicht wie die Dämpferstäbe besitzt $1 + k$ ist etwas größer als 1 und berücksichtigt die Erhöhung des Dämpferwiderstandes durch die Verbindungslaschen längs des Polbogens und eventuell durch den Skineffekt massiver Dämpferstäbe.

Man kann mit diesen Funktionen Φ_1' und Ψ_1' unmittelbar in Gleichung (48) für die Grundwelle des Längsfeldes eintreten. Doch muß man berücksichtigen, daß jetzt die Schenkel- und Jochamperewindungen $A\tilde{W}_{S+J}$ lediglich aus den Amperewindungen $A\tilde{W}_1''$ zur Überwindung des reduzierten Teilluftspaltes δ'' bestehen. Hierfür ermittelt man zunächst

$$A\dot{\tilde{W}}_1'' = A\dot{\tilde{W}}_1 \frac{\frac{\delta-\delta'}{\delta'}}{1+\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\Phi_1'}\left[\Psi_1'\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \Phi_1'\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right] \qquad 62)$$

und berechnet sodann aus Gleichung (48) die erste Feldharmonische:

$$\dot{\tilde{B}}_{l_1} = \frac{0{,}4\pi}{\delta} A\dot{\tilde{W}}_{l_1} =$$

$$\frac{0{,}4\pi}{\delta'} A\dot{\tilde{W}}_1\cdot 2\alpha\left\{\left[\Psi_1'\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left(\frac{\pi^2}{8}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} + \left(2-\frac{\pi^2}{8}\right)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \Phi_1'\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{\delta-\delta'}{\delta'}}{1+\frac{\delta-\delta'}{\delta'}\Phi_1'}\left[\Psi'\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} - \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \Phi'\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right]^2\right\} \qquad 62)$$

oder für die gebräuchliche Polbildung $\alpha = \frac{2}{3}$ weit einfacher:

$$A\dot{\tilde{W}}_{l_1} = A\dot{\tilde{W}}_1\left\{\left[0{,}611\,\Psi_1' + 0{,}333\,\Phi_1'\right]\frac{\delta}{\delta'} - \frac{\frac{\delta-\delta'}{\delta'}}{\frac{\delta'}{\delta}+\frac{\delta-\delta'}{\delta}\cdot\Phi_1'}\left[0{,}377\,\Psi_1' + 0{,}577\,\Phi_1'\right]^2\right\} \qquad 62\,a)$$

---

[1] Genauer bei m Dämpferstäben und einer Nutteilung t:

$$(1-j)\frac{\xi}{2} = m\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left[(1\;\;j)\cdot\frac{\alpha' t}{2}\right].$$

Nach dieser Formel habe ich 2 Zahlenbeispiele durchgerechnet, eine Maschine ohne Luftspaltunterteilung $\delta' = \delta$, und eine zweite mit einem Teilverhältnis $\delta' = \frac{\delta}{2}$. Die Ergebnisse illustrieren die Bild 24 und 25. Hätte man statt eines Dämpfergitters nur einen einzigen Rahmen um den Polschuh gelegt, so würde $A\dot{W}_{l_1}$ den dünn eingezeichneten Halbkreis beschrieben haben. Er befolgt gemäß Gleichung (7 b) das Gesetz:

$\dot{OA} = 0{,}944\ A\dot{W}_1$

$\dot{AP}$ = Erste Harmonische der Dämpfergegenamperewindungen,

$$\dot{AM} = A\hat{W}_1 \left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{1+\sigma_l} = 0{,}455\ A\hat{W}_1$$

a) Dämpfergitter

b) Dämpferrahmen

Bild 24. Diagramme für die Grundwellen der Längsamperewindungen. (Kleine Luftspaltunterteilung: $\delta' = \delta$.)

$$A\dot{W}_{l_1} = A\dot{W}_1\,\alpha\left[\left(1+\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)\frac{\delta}{\delta'} - 2\left(\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2\left(\frac{\delta-\delta'}{\delta'} + \frac{1}{(1+\sigma_l)+j\,\frac{r_l}{k_{l0}}}\right)\right] \qquad 63)$$

und kann nebst seiner Maßstabsgeraden aus den in Bild 24b und 25b eingetragenen Bezeichnungen leicht konstruiert werden.

Doch diese Details sind jetzt Nebensache. Mir kam es nur darauf an zu zeigen, daß mit oder ohne Luftspaltunterteilung Dämpfergitter wie Dämpferrahmen fast genau das gleiche Maximum der wattlosen Amperewindungskomponente ergeben. Und das ist ja die Bedingung dafür, daß sie sich auch hinsichtlich des Anlaufmomentes gleich verhalten. — Vielleicht achtet der Leser darauf, wie niedrig



wieder die reduzierten Breiten der Dämpferplatte im günstigsten Arbeitsbereich ausfallen. Es wird wohl am besten sein, bei Dämpfergittern von vorneherein Widerstandsmaterial zu verwenden.

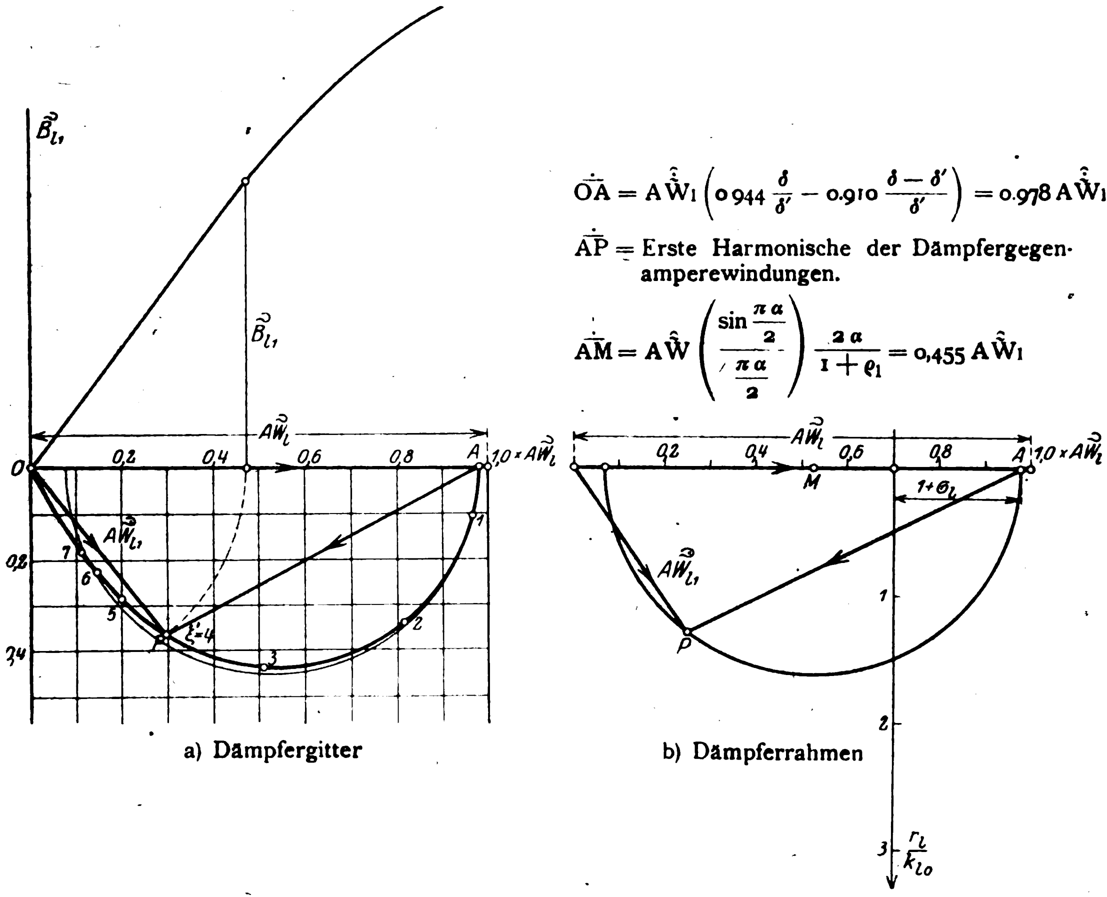


Bild 25. Diagramme für die Grundwellen der Längsamperewindungen $\left(\text{Luftspaltunterteilung: } \delta' = \frac{\delta}{2}\right)$.

b) Querfelddämpfung.

Die Querfelddämpfung benützt unter den Polen dasselbe Gitter wie die Längsfelddämpfung. Daher summieren sich hier die Längs- und Querströmungen. Außerdem wird aber noch ein beträchtliches Stromvolumen $\dot{J}_Q'$ durch die Querlaschen über den Polzwischenraum beiseite geleitet. Diese „Grundströmung", wie wir sie früher zu nennen pflegten, bildet sogar den wichtigsten Anteil des ganzen Ausgleiches. Denn nicht nur besitzt sie die größte Windungsfläche, wir können auch über ihren Widerstand verfügen, während wir hinsichtlich des Dämpfergitters an den für die Längsfeldströmung günstigsten Wert gebunden sind.

Um die Gesetzmäßigkeiten bequem formulieren zu können, muß ich einige Substitutionen einführen: Den Widerstand zweier Gitterhälften, die für die Querfelddämpfung in Serie geschaltet erscheinen, bezeichne ich mit R', die beiden Querlaschen mögen zusammen R_c Ohm besitzen. Dann beträgt der gesamte Ausgleichswiderstand

$$R = R' + R_c. \tag{64}$$

Wie bei allen Kurzschlußkreisen kommt es jedoch weniger auf den Widerstand allein als vielmehr auf das Verhältnis von Widerstand zu Selbstreaktanz an. Für Dämpfergitter ist diese Selbstreaktanz K_{qo} keine einfache Größe. Einer einzelnen Windung, welche die ganze Polteilung bei einem konstanten Luftspalt δ' überbrücken würde, käme die Reaktanz zu:

$$K = \frac{0{,}4\,\pi}{\delta'} \cdot \omega \cdot t_p\, L \cdot 10^{-8}. \tag{65}$$

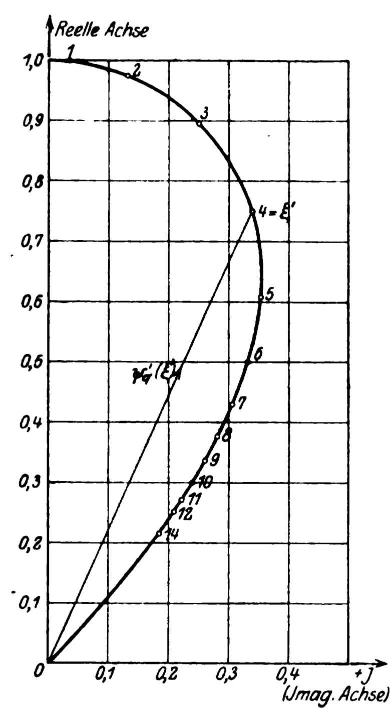


Bild 26. Vektordarstellung der Funktion $\Psi_q'(\xi')$.

Die Reaktanz K_{qo} ist wesentlich kleiner; einmal, weil das Dämpfergitter unter dem Polbogen gleichmäßig verteilt ist, und weiter, weil der Polzwischenraum die freie Ausbildung des Querfeldes hemmt, was wir durch die Reduktion des effektiven Luftspaltes von δ' auf δ_c zum Ausdruck gebracht haben. In Arbeit IV, wo wir auf diese Gesetzmäßigkeiten näher eingingen, berechneten wir daher nur:

$$K_{qo}(\cos\lambda_0 + j\sin\lambda_0) = K \cdot \alpha \left(\frac{\Psi_q'}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right). \tag{66}$$

Die Einführung des Winkels λ_0 war notwendig, weil auf der rechten Seite der Gleichung eine komplexe Größe steht. Denn Ψ_q' steht zur Abkürzung für eine Vektorfunktion

$$\Psi_q'(\xi') = 3\left(\frac{\mathfrak{Ctg}\,(1-j)\frac{\xi'}{2}}{(1-j)\frac{\xi'}{2}} + j\frac{2}{\xi'^2}\right) \tag{67}$$

die ich in Bild 26 in Abhängigkeit von der reduzierten Gitterbreite ξ' aufgetragen habe.

Sowie wir K_{qo} und λ_0 besitzen, können wir fast alle für die verteilte Querfeldwicklung gewonnenen Resultate auch auf das verteilte Dämpfergitter übertragen. Damals hatten wir die Spitze des Querfeldes unter den Polkanten aus den daselbst auftretenden Amperewindungen

$$\hat{AW}_{QU} = \hat{AW}_Q \cdot \frac{1}{1 - j\frac{k_{qo}}{r_q}} \tag{25a}$$

berechnet. Jetzt bilden wir für das Dämpfergitter ganz analog:

$$\left.\begin{aligned}\hat{AW}_{QU} &= \hat{AW}_Q \cdot \frac{1}{1 - j\frac{K_{qo}}{R}(\cos\lambda_0 + j\sin\lambda_0)} \\ &= \hat{AW}_Q \cdot \frac{1}{1 - j\frac{K}{R}\cdot\alpha\left(\frac{\psi_q'}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Damals hatten wir die erste Harmonische des Querfeldes

$$\hat{B}_{q1} = \frac{0{,}4\pi}{\delta'}\hat{AW}_{q1} \tag{21a}$$

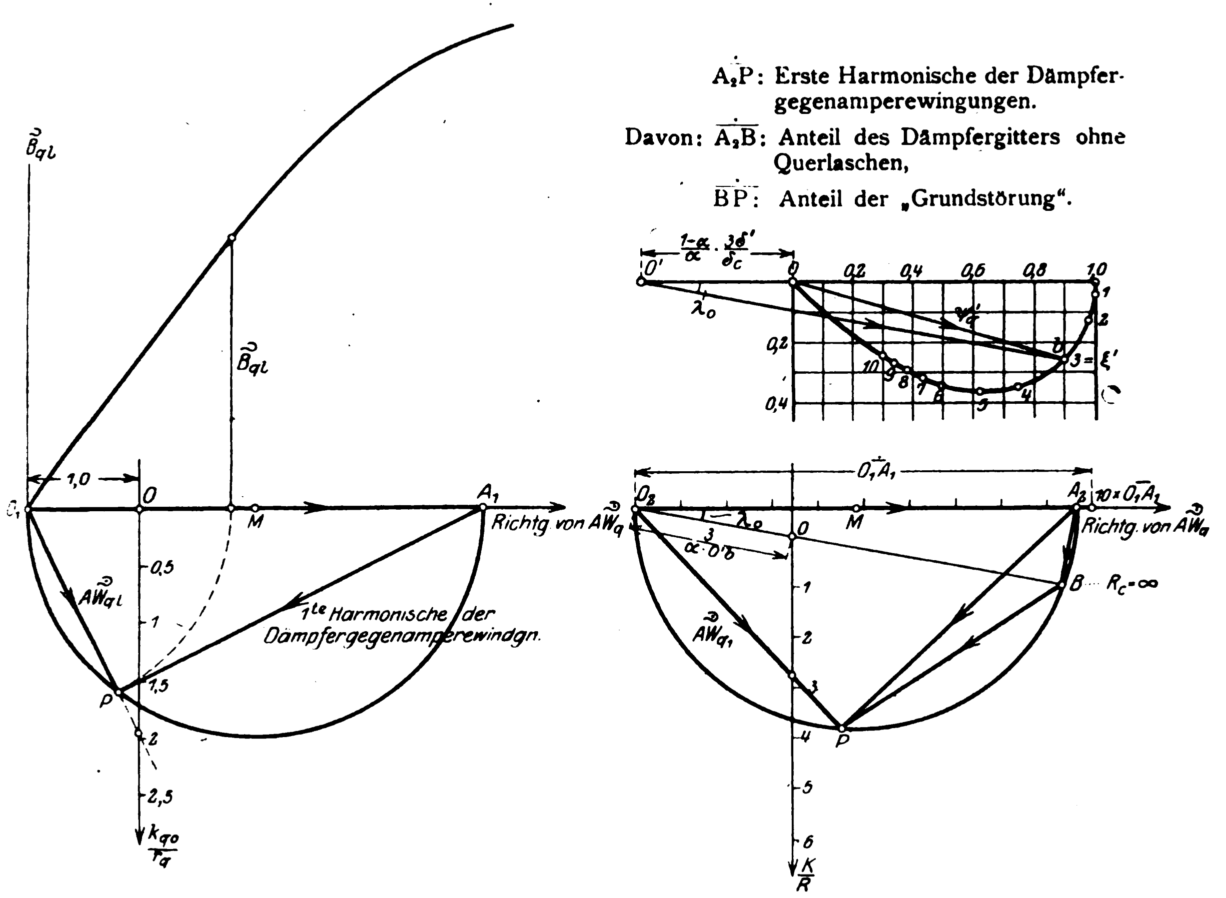
aus der Amperewindungsamplitude

$$\hat{AW}_Q \frac{\pi}{2}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\frac{K_{qo}}{K\cdot W_q^2} = \hat{AW}_{q1} = \hat{AW}_{QU}\frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\delta'}{\delta_c}\right) \tag{21b}$$

hergeleitet. So bilden wir nun auch für das Dämpfergitter ganz sinngemäß:

$$\begin{aligned}\hat{A}W_{q1} &= \hat{A}W_{QU}\cdot\frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\cdot\frac{K_{qo}}{K}(\cos\lambda_0 + j\sin\lambda_0)\\ &= \hat{A}W_{QU}\frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\Psi_q'}{3}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{\delta}{\delta_c}\right).\end{aligned} \qquad 69)$$

Kombinieren wir schließlich die Gleichungen (25 a) und (21 b) einerseits, (68) und (69) andererseits, so ergibt sich für die verteilte Dämpferwicklung



a) Verteilte Dämpferwicklung b) Dämpfergitter mit Querlaschen

Bild 27. Diagramme für die Grundwellen der Queramperewindungen.

$$\begin{aligned}\hat{A}W_{q1} &= \hat{A}W_q\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2\frac{1}{\frac{K\,w_q^2}{k_{qo}} - j\,\frac{K\,w_q^2}{r_q}} =\\ &\hat{A}W_q\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\frac{1}{\frac{\alpha}{3}+(1-\alpha)\frac{\delta'}{\delta_c}} - j\,\frac{K\,w_q^2}{r_q}}\end{aligned} \qquad 70)$$

und für das wirkliche Dämpfergitter mit Querlaschen:

$$\overset{\ddagger}{A}W_{q1} = \overset{\ddagger}{A}W_q \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \frac{1}{\frac{K}{K_{qo}}(\cos\lambda_0 - j\sin\lambda) - j\frac{K}{R}} =$$

$$\overset{\ddagger}{A}W_q \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\frac{\alpha}{3}\Psi_q' + (1-\alpha)\frac{\delta'}{\delta_c}} - j\frac{K}{R}} \qquad 71)$$

Damit haben wir genügend Vergleichsmaterial in Händen: Zunächst liefern beide Ansätze 70 und 71 bei veränderlichem Dämpferwiderstand Kreisdiagramme, und zwar Kreise, die den Koordinatenursprung o enthalten, und deren Mittelpunkte M auf der Abszissenachse, d. h. auf der Richtung des Vektors $\overset{\ddagger}{A}W_q$ gelegen ist (Bild 27). Aber die Kreisdurchmesser sind nicht ganz gleich, sondern die verteilte Dämpferwicklung übertrifft hierin ihre Rivalin. Sie liefert nämlich:

$$\overline{O_1 A_1} = \overset{\ddagger}{A}W_q \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{3} + (1-\alpha)\frac{\delta'}{\delta_c}\right) \qquad 72)$$

während das Dämpfergitter einen etwas kleineren Wert

$$\overline{O_2 A_2} = \overset{\ddagger}{A}W_q \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{3}\Psi_q' + (1-\alpha)\frac{\delta'}{\delta_c}\right)\cdot\frac{1}{\cos\lambda_0} \qquad 73)$$

liefert. Im selben Verhältnisse würden also auch die wattlosen Feldkomponenten und die Drehmomente der beiden Ausführungen stehen. Aber ganz abgesehen davon, daß man durch den Hilfspol diesen Unterschied ausgleichen könnte, ist er auch selbst gar nicht wesentlich. Denn solange man ξ' nicht größer wählt, als es mit einer günstigen Ausnützung der Längsfelddämpfung verträglich ist, solange weichen auch weder Ψ_q' noch $\cos\lambda_0$ erheblich von der Einheit ab. Man kann daher wohl sagen, daß erst bei starken Dämpfervorrichtungen, wie sie namentlich zur Beruhigung mechanischer Pendelungen angewandt werden, das Dämpfergitter der verteilten Wicklung unterlegen ist.

II. Der Einfluß des massiven Joches.

Beim massiven Joch handelt es sich weniger um den Nachweis, daß es für hochbelasteten Anlauf ungeeignet ist; — in dieser Hinsicht teilt es nur die Eigenschaft aller Kurzschlußkreise aus massivem Eisen. — Worum es sich handelt ist vielmehr die Bestimmung des Grades, in dem die Entwicklung des Anzugsmomentes beeinträchtigt wird, und die Erörterung der Frage, was dagegen geschehen kann. Als ich in Arbeit III die Leitung eines Wechselflusses durch massive Joche und Polkerne untersuchte, ging ich auf Details der Jochströmung nicht ein. Es wäre auch damals überflüssig gewesen. Denn die Polkerne drosselten den Kraftfluß so energisch, daß auf das Joch nur eine verschwindend kleine magnetomotorische Kraft entfiel. Jetzt aber, wo uns die Lamellierung der Schenkel auf einmal die Möglichkeit gibt, schon im Stillstand mit starken Treibfeldern zu arbeiten, liegt die Sache offenbar ganz anders. Vielleicht verzehrt jetzt das Joch sogar eine größere Komponente der Ankererregung, als irgend ein anderer Teil des Kraftlinienpfades, die Gegenwirkung der Dämpferwicklung nicht ausgenommen. Damit rückt die Induktionsströmung im massiven Joch sogar in den Vordergrund des Interesses.



Ich will indes hier nur die allernotwendigsten Informationen geben, unter Verzicht auf alles analytische Beiwerk. Einige gut gezeichnete Kraftlinienbilder werden der Vorstellungsgabe zu Hilfe kommen; einige Kurven, deren Ableitung uns nicht beschäftigen soll, ein schnelles quantitatives Urteil ermöglichen. Schließlich werden unsere oft bewährten Zahlenbeispiele auch diesmal die oberflächliche Erkenntnis zu einem wohlbegründeten praktischen Urteil verdichten.

a) Die Induktionsströmung im massiven Joch.

Zunächst erfordert der mechanische Aufbau des Polrades eine kurze Erläuterung: In Bild 28 habe ich eine Polteilung herausgeschnitten. Die Polkerne sind

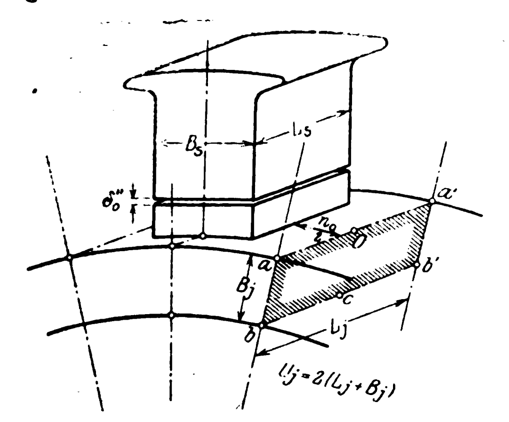


Bild 28. Massives Joch; Pol und Zwischenstück lamelliert.

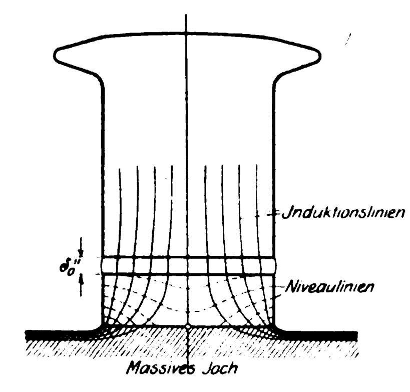


Bild 29. Induktionsverteilung im Zwischenstück (Mittelebene).

lamelliert wie im ersten Abschnitt; aber der Teilluftspalt δ_0'' bildet nicht mehr die Trennfuge zwischen Joch und Schenkel, sondern ist ein gutes Stück davon entfernt in den Schenkel selbst verlegt. Das hat seinen guten Grund, den das Kraftlinienbild der Bild 29 leicht erraten läßt. Im massiven Joch haben sich nämlich die

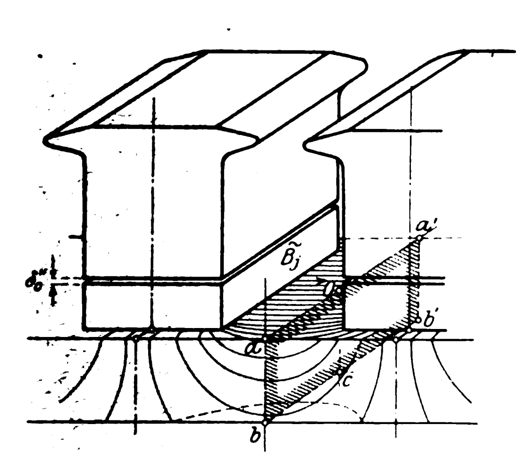


Bild 30. Induktionsverteilung längs der Jochoberfläche.

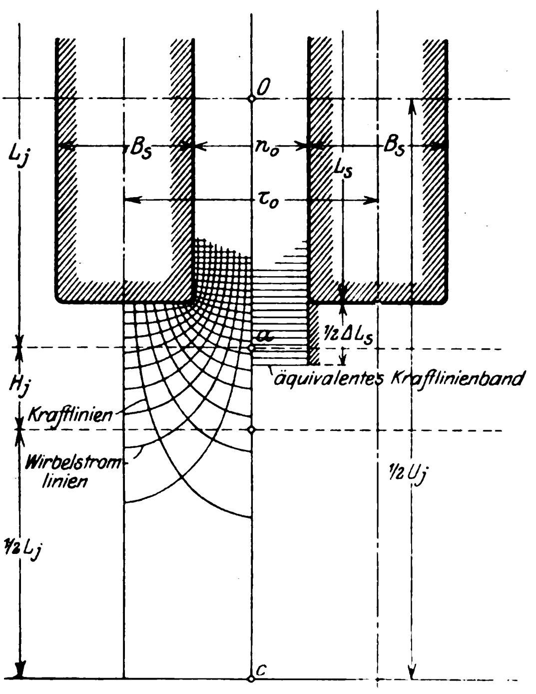


Bild 31. Induktions- und Wirbelströmung längs der Jochoberfläche einer breiten Innenpolmaschine (100- und 1000 KW-Type).

Induktionslinien auf die Randpartien zusammengezogen und würden ohne das eingeschaltete Zwischenstück auch den Luftspalt δ_0'' mit erhöhter Randdichte überschreiten. Das aber können wir nicht zulassen. Denn der größeren Randdichte entspräche eine unnütze Zunahme der verbrauchten magnetomatorischen Kraft. Wir

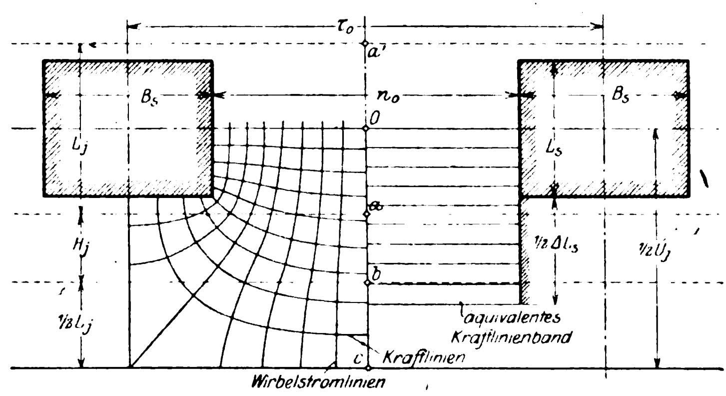


Bild 32. Induktions- und Wirbelströmung längs der Jochoberfläche einer schmalen Außenpolmaschine.

würden nur Anlaufstrom zusetzen, ohne doch ein starkes Treibfeld zu erhalten. — Warum wir die Höhe des Zwischenstückes nicht größer als irgend nötig machen, wird die Untersuchung des Luftfeldes im Polzwischenraum ergeben.

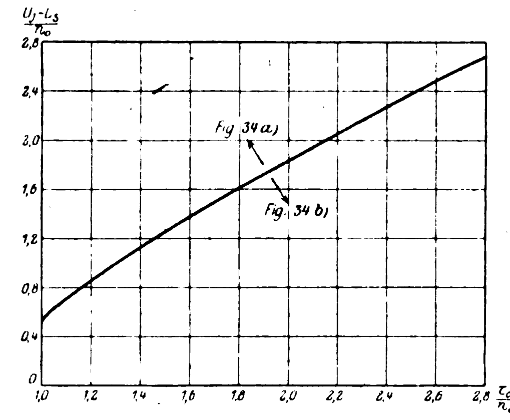


Bild 33. Zur Bestimmung des effektiven Jochumfanges.

Zuvor aber nimmt die eigentümliche Induktionsverteilung im Joche unsere ganze Aufmerksamkeit in Anspruch, denn hier liegt der Schwerpunkt unseres Problems. Wie sich die auf die Randpartieen versprengte Strömung des ganzen Jochumfanges zu bemächtigen sucht, zeigt Bild 30 in perspektivischer Ansicht. Noch ausdaulicher wird das Bild, wenn man die Kraftlinien auf der abgewickelten Jochoberfläche einzeichnet. Wäre dabei die Randpermeabilität konstant, so hätte man eine „Potentialströmung" nach Art von Bild 31 oder 32 zu erwarten. In Wirklichkeit wird der Jochumfang noch ein klein wenig besser ausgenutzt, weil mit abnehmender Induktion die magnetische Leitfähigkeit zunimmt. Doch überlasse ich es dem Experiment, hierfür, wenn nötig, eine empirische Korrektur zu finden.

Für uns ist die Kenntnis der Strömungsbilder darum so wichtig, weil von der Ausnützung des Jochumfanges die magnetische Wechselstromcharakteristik des Jochabschnittes abhängt, und das ist es ja, worauf wir letzten Endes zielen. — Aus Abb. 31 sehen wir, daß die Randinduktion in der Mitte zwischen den Polen auf eine beträchtliche Länge konstant ist, da dort die Linien praktisch parallel laufen. Wenn wir nun in Gedanken die ganze Strömung durch ein Kraftlinienband von dieser Dichte und der gleichen Gesamtzahl von Linien ersetzen wollten, welche Breite müßte dieses Band besitzen?

Nennen wir diese Ersatzbreite $L_s + \Delta L_s$, so ist es augenscheinlich, daß ΔL_s um so größer sein muß:

1. Je größer die Polbrücke $B_s = \tau_0 - n_0$ d. h.: je größer das Verhältnis $\frac{\tau_0}{n_0}$.

2. Je größer der Jochumfang nach Abzug der Pollänge, d. h. je größer das Verhältnis $\frac{U_j - L_s}{n_0}$. Zugleich lehren die Kraftlinienbilder aber auch, daß oberhalb

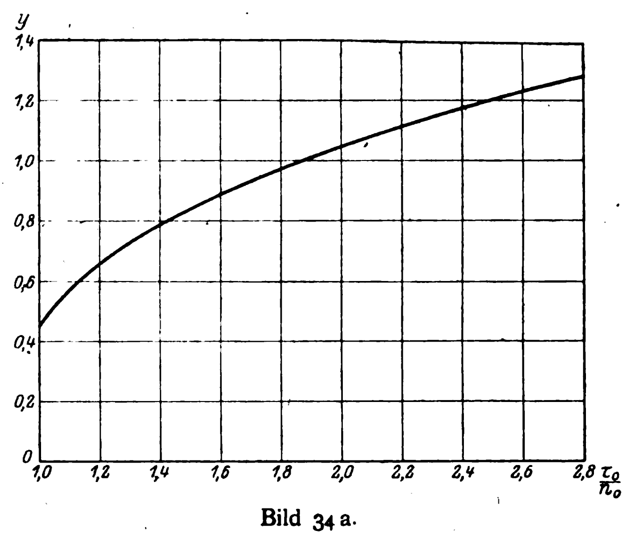


Bild 34 a.

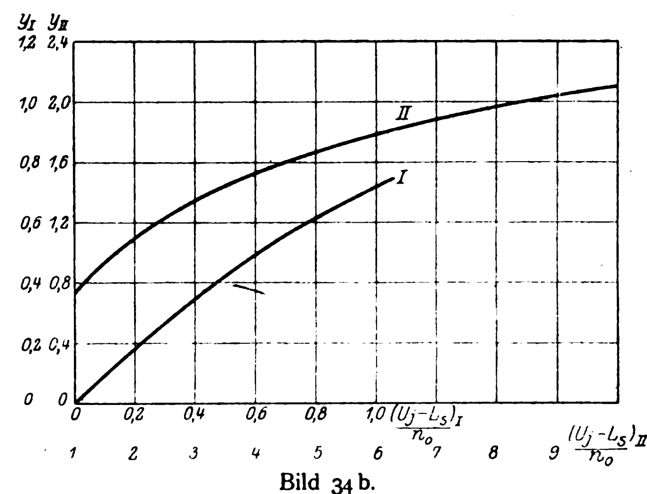


Bild 34 b.

Bild 34. Kurven zur Bestimmung des effektiven Jochumfanges.

eines gewissen Jochumfanges seine weitere Vergrößerung den Jochflux nicht merklich erhöht (Bild 31); daß andererseits unterhalb eines gewissen Jochumfanges eine Verbreiterung der Pole bei gleichem Polabstand n_0 ebenso wirkungslos bleibt (Bild 32). Mit Rücksicht darauf habe ich für die Berechnung des ideellen Längenzuwachses

$$\Delta L_s = n_0 \cdot y \qquad 74)$$

zwei Kurven angegeben. Bild 34 a ist zu benützen, wenn in Wirklichkeit ein größerer Wert $\frac{U_j - L_s}{n_0}$ ausgeführt ist, als ihn Bild 33 dem Verhältnis $\frac{\tau_0}{n_0}$ zuordnet. Liegt er dagegen tiefer, so ist Bild 34 b maßgebend.

Sowie wir nunmehr den effektiven Jochumfang

$$U_e = L_s + \Delta L_s$$

besitzen, folgt alles weitere von selbst: Zu irgend einer Feldstärke

$$\dot{H}_j = \frac{0{,}4\pi}{\frac{n_0}{2}} \dot{A}W_j$$

längs der Randschichten entnimmt man dem Diagramm 35 den Jochflux

$$\tilde{N}_j = \frac{\tilde{N}}{cm} \cdot U_e$$

und den Phasenwinkel x, um den er der erregenden MMK. nachhinkt. Dabei habe ich absichtlich nur die Kurven einer Graugußprobe vollständig mitgeteilt. Denn Stahlguß leitet den Wechselfluß soviel schlechter, daß es nicht ratsam wäre ihn anzuwenden.

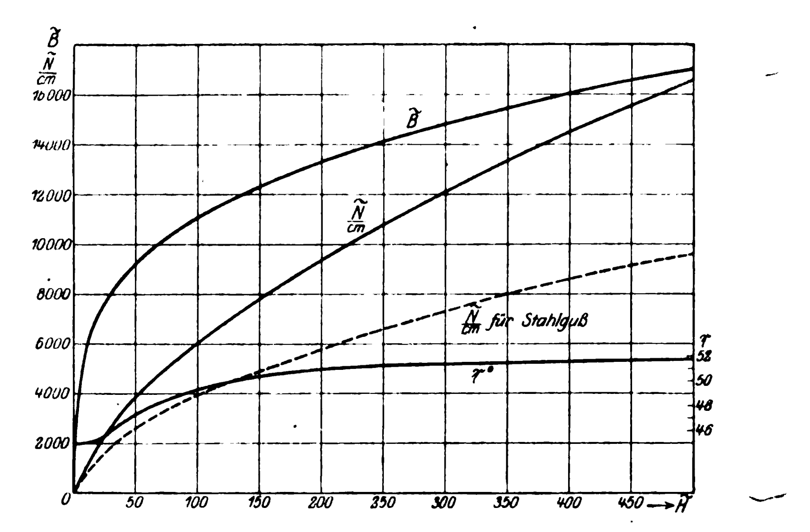


Bild 35. Magnetische Wechselstromcharakteristiken für Grauguß (50 ~).

b) Die Induktionsströmung im Polzwischenraum[1]).

Die Verteilung der Induktionsströmung im Polzwischenraum ist von gleicher Art und kaum minder wichtig als die Strömung längs der Jochoberfläche. „Von gleicher Art", weil sie sich in ganz ähnlicher Verteilung von Polflanke zu Polflanke hinüberspannt; „nicht minder wichtig", weil ihre Kraftlinienzahl hinter der des Joches kaum zurücksteht, unter Umständen sie wohl gar übertrifft. Bild 36 zeigt auf der linken Seite 2 Schnitte durch die Kraftlinienströmung, auf der rechten Seite den Ersatz der wirklichen Verteilung durch der Rechnung gefügigere Bilder. Die Konturen $\overline{abc}$ und $\overline{def}$ dürfen dabei als Schnitte durch Äquipotentialflächen aufgefaßt werden. Verglichen mit dem Joche verzehren ja die Schenkel keine nennenswerte magnetomotorische Kraft.

Dieses Bild macht wohl auch klar, weshalb wir den Teilluftspalt δ_0'' tunlichst nahe an das Joch rücken mußten. Denn während das längs $\overline{ab}$ austretende Luftfeld nur durch die Joch-Amperewindungen $\dot{A}W_j$ magnetisiert wird, steht längs der Kontur $\overline{de}$ eine ungleich höhere Erregung zur Verfügung, nämlich die geometrische Summe aus $\dot{A}W_j$ und den für den Luftspalt δ_0'' benötigten Ampere-

[1]) Auf die Induktionsströmung im Polzwischenraum gehe ich hier zum ersten Male ein, obwohl sie bei Anwendung der Luftspaltunterteilung selbst für lamellierte Joche eine gewisse Rolle spielt. Doch ist sie dort leicht durch einen kleinen Abzug vom wirklichen Luftspalt δ_0'' zu berücksichtigen.

windungen $\dot{AW}_l''$. Nun bildet aber diesmal das Feld im Polzwischenraum kein schädliches Streufeld, sondern im Gegenteil einen freudig begrüßten Zuwachs zum treibenden Längsfeld. Daher kann es auch nur erwünscht sein, das höhere Potential über eine möglichst große Länge der Polflanke zu besitzen.

Über die Berechnung der Kraftlinienzahl des Luftfeldes ist wenig Neues zu sagen: Für die 3 Kraftlinienabschnitte von den Höhen h_1, h_2 und h_3 bestimmt man die mittleren Kraftlinienlängen nach Gefühl oder nach der Formel

$$n_m = \frac{n_{max} - n_{min}}{2{,}30 \log \frac{n_{max}}{n_{min}}}.$$

Dazu findet man nach Bild 34a den ideellen Längenzuwachs

$$\varDelta L_s = n_m \cdot y \qquad 74a)$$

und den effektiven Polumfang

$$U_e = 2 (L_s + \varDelta L_s).$$

Längs des Umfanges U_{e1} tritt aus dem lamellierten Zwischenstück ein Kraftfluß

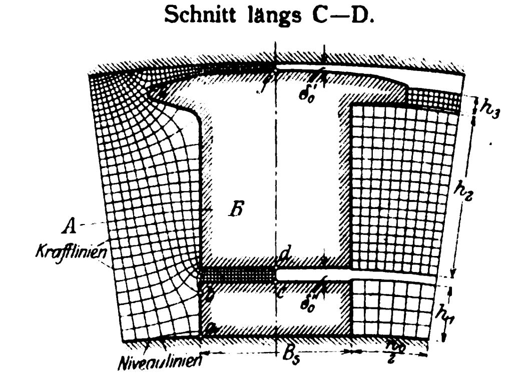
$$\dot{N}_{1\sigma} = \frac{0{,}4\pi}{n_{m1}} \cdot 2 \dot{AW}_j \cdot h_1 U_{e1} \qquad 75)$$

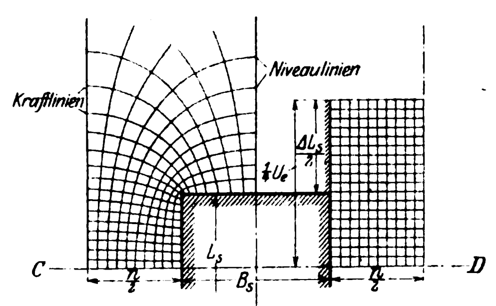
in den Polzwischenraum über, der mit dem Flux zweier Jochstücke zu der Kraftlinienzahl $\dot{N}_l''$ im Teilluftspalt δ'' verschmilzt. Hier ist also

$$\dot{N}_l'' = \dot{N}_{1\sigma} + 2 \dot{N}_j = \frac{0{,}4\pi}{\delta_0''} \dot{AW}_l'' \cdot B_s \cdot L_s. \qquad 76)$$

Hat man daraus $\dot{AW}_l''$ bestimmt, so folgt auch der Hauptteil des Flusses durch den Polzwischenraum, d. i.

Schnitt längs C—D.





Schnitt längs A—B.

Bild 36. Induktionsverteilung im Polzwischenraum.

Links: Wirkliches Kraftlinienbild. Rechts: Äquivalentes Kraftlinienbild.

$$\dot{N}_{2\sigma} = 0{,}8\pi (\dot{AW}_j + \dot{AW}_l'') \cdot \left(\frac{h_2 U_{e2}}{n_{m2}} + \frac{h_3 U_{e3}}{n_{m3}}\right). \qquad 77)$$

Nachdem er sich mit $\dot{N}_l''$ zu dem gesamten Längsfluß

$$\dot{N}_l = \dot{N}_{2\sigma} + \dot{N}_l'' \qquad 78)$$

vereinigt hat, überbrückt er den Hauptluftspalt δ_0' mit einer mittleren Induktion

$$\dot{B}_{lm} = \frac{\dot{N}_l}{B \cdot L}.$$

Dazu wäre dann noch als Schlußglied die Amplitude der Ankererregung zu berechnen. Doch habe ich mich hierüber schon an anderer Stelle ausführlich verbreitet und eile daher, die Theorie des massiven Joches durch 2 praktische Zahlenbeispiele zum Abschluß zu bringen. Denn wir verstehen zwar jetzt, die Erscheinungen vorauszuberechnen, aber noch nicht sie schnell und sicher zu schätzen, und diese Fähigkeit ist für die Praxis nicht minder wichtig.

c) Zahlenbeispiele.

Denken wir uns also jetzt unsere stets benützte 100 und 1000 KW-Type mit massiven Jochen aber lamellierten Polen ausgerüstet. Das Teilverhältnis der Luftspalte sei $\delta' = \frac{\delta}{2}$. Der Ausbildung des Querfeldes wirke eine gleichmäßig verteilte Dämpferwicklung entgegen; als Dämpfung des Längsfeldes verwende ich der Einfachheit zuliebe wieder einen Dämpferrahmen, der den Polschuh wie eine einzige Kurzschlußwindung umschließt. Da beide Maschinen durchaus modellähnlich ausgeführt sind, so liefern sie auch an der Oberfläche des Joches ähnliche Strömungsbilder. Bei beiden ist hier:

$$\frac{\tau_0}{n_0} = 2,15$$

und

$$\frac{U_j - L_s}{n_0} = 6,38.$$

Somit ist Kurvenblatt 34a anzuwenden und dieses liefert:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
zunächst die Hilfsgröße	$y = \frac{\Delta L_s}{n_0}$	1,095	1,095
und sodann auch den ausgenützten Jochumfang	$U_e = L_s + \Delta l_s$	$22,5 + 7,2 \approx 30$	$45 + 14,4 \approx 60$

Fügen wir dazu noch die Daten, welche für die Feldverteilung im Polzwischenraum von Interesse sind:

Die Breite des Polzzwischenraumes ist unächst dem Joche	n_0	6,5	13
Dann kommt das lamellierte Zwischenstück mit einer Höhe	h_1	25	5
einer mittleren Breite des Polzwischenraumes . .	n_{m_1}	6,95	13,9
und eines effektiven, d. h. ausgenützten Umfang .	U_{e_1}	60	120
Nach einem kleinen Teilluftspalt	δ_0''	0,11	0,22
folgt der eigentliche Polschenkel mit einer Höhe .	h_2	10	20
einer mittleren Breite des Polzwischenraumes . .	n_{m_2}	9,1	18,2
und einem ausgenützten Umfang	U_{e_2}	63	126
Endlich tritt zwischen den Polspitzen ein Kraftlinienstrom über, dem bei einer mittleren Stärke	h_3	1,75	3,5
und einer mittleren Länge	n_{m_3}	7,5	15
ein effektiver Umfang	U_{e_3}	63,5	127
zur Verfügung steht. Die Summe aller Teilflüsse vereinigt sich unter der Polschufläche	$F = B \cdot L$	$13 \cdot 22,5 = 292,5$	$26 \cdot 45 = 1170$
zu dem gesamten Längsfluß $\bar{N}_l$, der nun noch den Hauptluftspalt	δ_0'	0,2	0,4

zu überwinden hat.

An Hand dieser Daten und der magnetischen Wechselstromcharakteristiken des Graugusses (Bild 35) kann man leicht die Richtigkeit folgender Tabellen nachprüfen:



I. Magnetische Charakteristik des Joches (50)[1].

Für die	100 KW-Type						1000 KW-Type					
$\dot{AW}_j$	130	259	453	648	907[2])	1295	259	517	907	129	1810	2590[3])
$\tilde{H}_j$	50	100	175	250	350	500	50	100	175	250	350	500
$\tilde{N}_J$ cm	3800	6000	8550	10 800	13 300	16 550	3800	6000	8550	10 800	13 300	16 550
$\tilde{N}_j \cdot 10^{-6}$	0,114	0,180	0,256	0,324	0,399	0,496	0,228	0,360	0,513	0,648	0,798	0,992
X^0	47° 10′	49° 15′	50° 40′	51° 10′	51° 30′	51° 40′	47° 10′	49° 15′	50° 40′	51° 10′	51° 30′	51° 40′
$2\dot{N}_j \cdot 10^{-6}$	0,155 +j0,197	0,235 +j0,272	0,325 +j0,396	0,406 +j0,505	0,497 +j0,626	0,615 +j0,777	0,311 +j0,334	0,470 +j0,545	0,650 +j0,793	0,812 +j1,010	0,994 +j1,250	1,230 +j1,553

II. Magnetische Charakteristik des Polzwischenraums[1]).

$\dot{N}_{1\sigma} \cdot 10^{-6}$	0,007	0,014	0,0246	0,0351	0,0491	0,0702	0,028	0,056	0,0984	0,140	0,196	0,281
$\dot{N}_l'' \cdot 10^{-6}$	0,162 +j0,167	0,249 +j0,272	0,349 +j0,396	0,441 +j0,505	0,546 +j0,626	0,685 +j0,777	0,339 +j0,334	0,526 +j0,545	0,748 +j0,793	0,952 +j1,010	1,190 +j1,250	1,511 +j1,555
$\dot{AW}_l''$	88 +j91	135 +j148	190 +j215	240 +j275	297 +j340	373 +j423	92 +j91	143 +j148	204 +j216	259 +j275	324 +j340	411 +j423
$\dot{N}_{2\sigma} \cdot 10^{-6}$	0,0460 +j0,0192	0,0830 +j0,0312	0,1358 +j0,0453	0,1875 +j0,058	0,254 +j0,0717	0,352 +j0,0893	0,148 +j0,038	0,279 +j0,0625	0,469 +j0,091	0,656 +j0,116	0,900 +j0,1435	1,265 +j0,1785
$\dot{N}_l \cdot 10^{-6}$	0,208 +j0,186	0,332 +j0,303	0,485 +j0,441	0,629 +j0,563	0,800 +j0,698	1,037 +j0,866	0,487 +j0,372	0,805 +j0,607	1,217 +j0,884	1,608 +j1,126	2,090 +j1,393	2,776 +j1,733
$\tilde{N}_l \cdot 10^{-6}$	0,279	0,450	0,657	0,844	1,060	1,350	0,612	1,004	1,505	1,960	2,510	3,270
$\tilde{B}_{lm}$	945	1540	2250	2890	3630	4620	523	860	1285	1675	2150	2800
$\dot{AW}_{lm}'$	113 +j101	181 +j165	264 +j240	342 +j306	435 +j380	565 +j471	132 +j101	219 +j165	331 +j240	437 +j306	569 +j379	755 +j471
$\dot{AW}_{lo}$	331 +j192	575 +j313	907 +j455	1230 +j581	1639 +j720	2233 +j894	483 +j192	879 +j313	1442 +j455	1991 +j581	2703 +j720	3755 +j894
$\tilde{AW}_{lo}$	383	655	1910	1360	1790[2])	2410	520	934	1510	2075	2800	3860[3])

[1]) Alle Vektoren beziehen sich auf die Richtung von $\dot{AW}_j$ als reelle Achse. [2]) Siehe Bild 39a). [3]) Siehe Bild 40a).

Die eben mit $\tilde{A}W_{l0}$ bezeichnete Amperewindungszahl ist die resultierende Erregung für den ganzen magnetischen Kreis. Über ihr habe ich in Bild 37 a und b die mittlere Induktion im Hauptluftspalt $\delta_0{}'$ aufgetragen, außerdem die Komponente $\tilde{A}W_j$, welche die Erregung einer halben Jochlänge bestreitet. Wenn diese schon bei der 100 KW-Type sehr groß ausfällt, so verschlingt sie vollends bei der

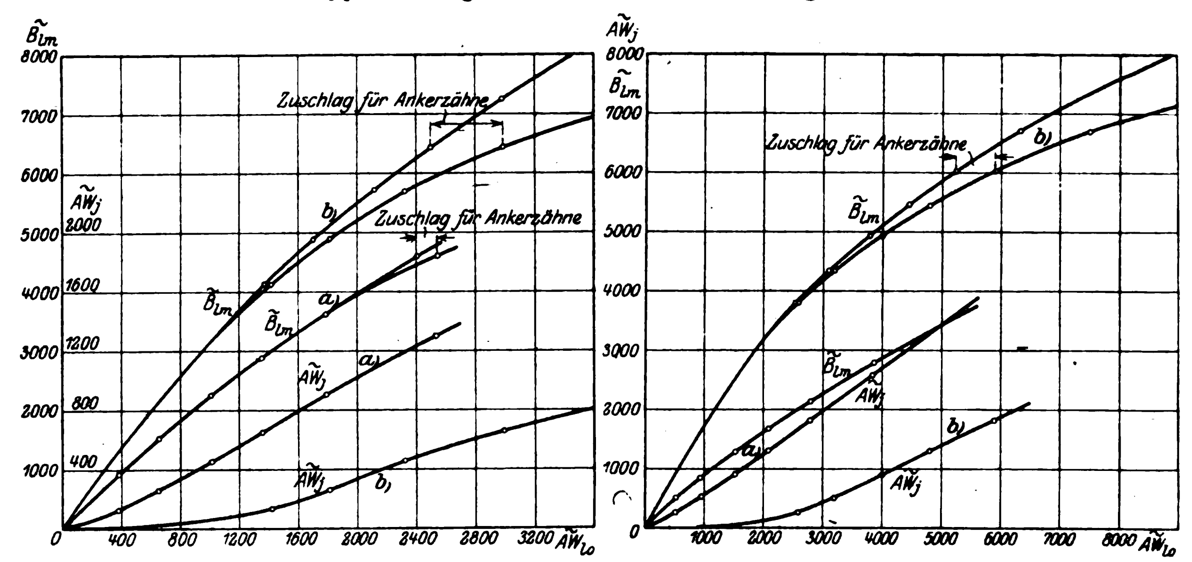


Bild 37 a. Magnetisierungskurven der 100 KW-Maschine.
a) ohne, b) mit lamelliertem Jochnebenschluß.

Bild 37 b. Magnetisierungskurven der 1000 KW-Type.
a) ohne, b) mit lamelliertem Jochnebenschluß.

1000 KW-Maschine den Hauptanteil der ganzen Amperewindungen. Das aber darf nicht sein, wenn wir ein starkes Anzugsmoment erzielen wollen. Und wenn es auch über das Ziel geschossen wäre, wollten wir deshalb das massive Joch kategorisch ablehnen, so müssen wir doch seinen zweifellos schädlichen Einfluß reduzieren. Dazu gibt es ein einfaches Mittel, und das ist ein **magnetischer Nebenschluß aus geblättertem Eisen.**

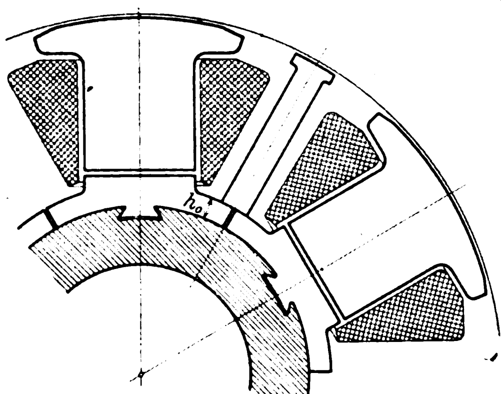


Bild 38. Synchronmaschine mit massivem Joch, lamelliertem Nebenschluß, Luftspaltunterteilung und Hilfspol.

Eine der vielen Ausführungsmöglichkeiten habe ich in Bild 38 dargestellt: dort ist der Nebenschluß zum Joche mit dem Zwischenstück zu *einem* Blechschnitt verschmolzen. Seine Höhe h_0 ist nur gering und braucht es auch nur zu sein. Besäße er selbst nur $\frac{1}{5}$ des für den normalen Flux erforderlichen Jochquerschnittes, er würde doch bei Wechselstromerregung auf den großen scheinbaren Jochwiderstand fast wie eine Kurzschlußüberbrückung wirken. Darum genügt z. B. bei der 100 KW-Maschine mit 12,5 cm langen Polen schon ein Nebenschluß von 1 cm Höhe, bei der 1000 KW-Maschine das doppelte. Das macht auf die ganze Maschine so wenig aus, daß man den vorgeschlagenen Kunstgriff aus konstruktiven Rücksichten nicht gut ablehnen kann. Und *wie* wirksam er ist, wird die folgende Zusammenstellung zeigen. Die magnetische Charakteristik des Joches hat sich natürlich nicht geändert. Dagegen erhalten wir ganz neue Werte für die

III. Magnetische Charakteristik des Polzwischenraumes mit lamelliertem Nebenschluß zum Joch (Index $_{j\,II}$)[1].

Für die	100 KW-Type. Lamelliertes Jochstück 1 × 22,5 qcm						1000 KW-Type. Lamelliertes Jochstück 2 × 45 qcm					
$\dot{AW}_j$	130[3])	259	453	648	907	1295	259	517	907[4])	1295	1810	2590
$\dot{B}_{j\,II}$	19 800	21 300	22 600	23 600	24 400	25 000	19 800	21 300	22 600	23 600	24 400	25 000
$\dot{N}_{j\,II} \cdot 10^{-6}$	0,890	0,960	1,015	1,060	1,100	1,125	3,56	3,84	4,07	4,25	4,40	4,50
$\dot{N}_{I\sigma} \cdot 10^{-6}$	0,004	0,008	0,015	0,021	0,029	0,042	0,017	0,034	0,059	0,084	0,117	0,169
$\dot{N}_l'' \cdot 10^{-6}$	1,049 +j 0,167	1,203 +j 0,272	1,355 +j 0,396	1,487 +j 0,505	1,626 +j 0,626	1,782 +j 0,777	3,888 +j 0,334	4,344 +j 0,545	4,779 +j 0,793	5,146 +j 1,010	5,511 +j 1,250	5,899 +j 1,555
$\dot{AW}_l''$	570 +j 91	655 +j 148	738 +j 215	810 +j 275	885 +j 340	970 +j 423	1,055 +j 91	1180 +j 148	1300 +j 215	1398 +j 275	1500 +j 340	1600 +j 423
$\dot{N}_{2\sigma} \cdot 10^{-6}$	0,148 +j 0,019	0,193 +j 0,031	0,251 +j 0,045	0,308 +j 0,058	0,378 +j 0,072	0,478 +j 0,089	0,555 +j 0,038	0,716 +j 0,062	0,933 +j 0,091	1,136 +j 0,116	1,400 +j 0,143	1,770 +j 0,178
$\dot{N}_l \cdot 10^{-6}$	1,197 +j 0,186	1,396 +j 0,303	1,606 +j 0,441	1,795 +j 0,563	2,004 +j 0,698	2,260 +j 0,866	4,443 +j 0,372	5,060 +j 0,607	5,712 +j 0,884	6,282 +j 1,126	6,911 +j 1,393	7,669 +j 1,733
$\tilde{N}_l \cdot 10^{-6}$	1,21	1,43	1,67	1,88	2,12	2,42	4,45	5,09	5,77	6,38	7,05	7,86
$\tilde{B}_{lm} \cdot 10^{-6}$	4140	4900	5710	6430	7250	8250	3800	4350	4930	5450	6020	6710
$(\dot{AW}_{lm}')$[2])	652 +j 101	760 +j 165	875 +j 240	977 +j 366	1090 +j 380	1230 +j 471	1208 +j 101	1377 +j 165	1555 +j 240	1710 +j 306	1880 +j 379	2085 +j 471
$(\dot{AW}_{l\bullet})$	1352 +j 192	1674 +j 313	2066 +j 455	2435 +j 581	2882 +j 720	3495 +j 894	2522 +j 192	3074 +j 313	3762 +j 455	4403 +j 581	5190 +j 720	6275 +j 894
$(\tilde{AW}_{lo})$	1370	1700	2120	2500	2980	3600	2530	3090	3790	4450	5240	6,340
Zuschlag für Ankerzähne	55	110	200	490	970		70	110	210	350	660	1160
$\tilde{AW}_{lo}$	1425[3])	1810	2320	2990	3950		2600	3200	4000[4])	4800	5900	7500

[1]) Alle Vektoren beziehen sich auf die Richtung von $\dot{AW}$ als reelle Achse. [2]) Die eingeklammerten Werte enthalten den Zuschlag für die Ankerzähne noch nicht. [3]) Siehe Bild 39b. [4]) Siehe Bild 40b.

Vergleicht man jetzt die neuen magnetischen Charakteristiken, das sind die Kurven b in Bild 37, mit den ursprünglichen Kurven (Index „a"), so sieht man, wie außerordentlich wirksam das Treibfeld gesteigert und der Einfluß des massiven Joches in den Hintergrund gedrängt wurde. Allein wir wollten nicht nur Ampere-

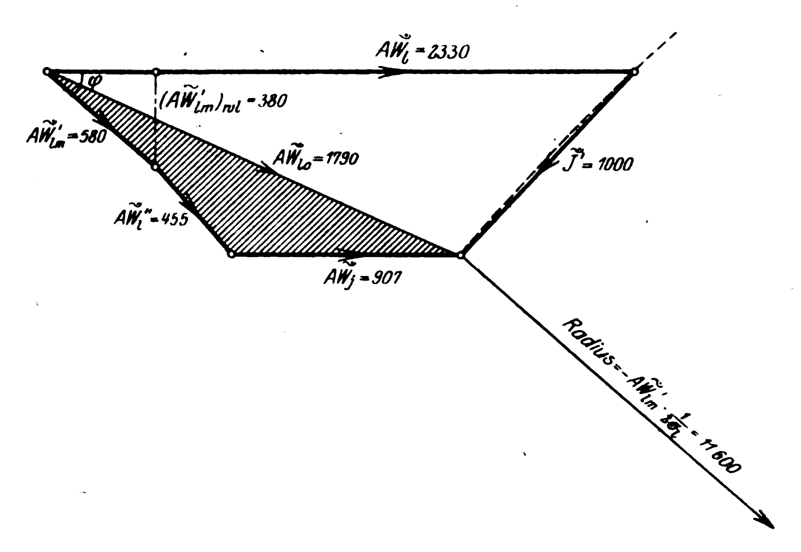


Bild 39a. 2,2facher Anlaufstrom. Joch ohne lamellierten Nebenschluß.

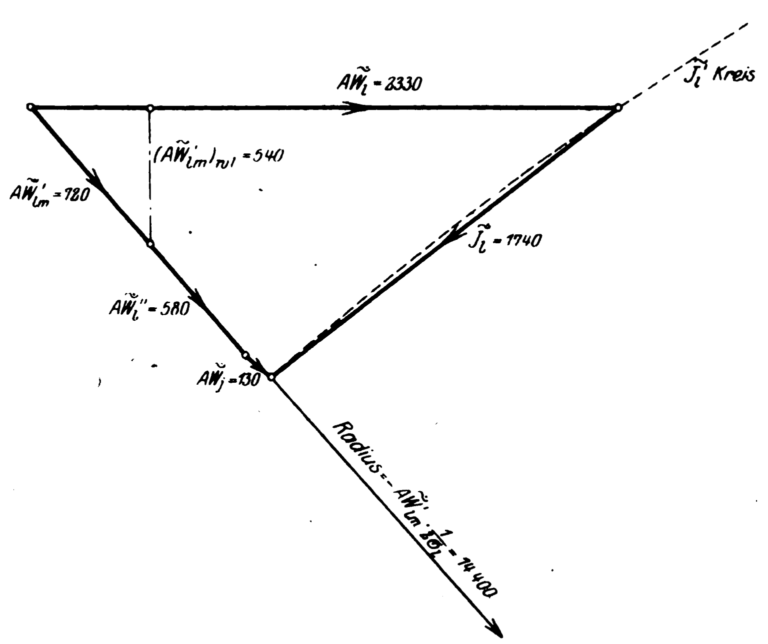


Bild 39b. 2,2facher Anlaufstrom. Joch mit lamelliertem Nebenschluß.

Bild 39. Anlaufdiagramme für die 100 KW-Type.

windungen, sondern Anzugsmomente vergleichen. Darum denken wir uns nunmehr den Polschuh durch einen Dämpferrahmen eingefaßt, der, durch das Längsfeld induziert, gewisse Gegenamperewindungen $\dot{J}_l'$ ausbildet. Dadurch wächst einerseits der Mittelwert der Ankeramperewindungen unter den Polen, d. i.

$$\dot{AW}_l = \dot{AW}_l \frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} = \dot{AW}_{l\,o} - \dot{J}_l',$$

andererseits verschiebt sich aber auch die Phase des Längsfeldes gegen die Ankererregung, wie es zur Erzielung eines Anzugsmomentes notwendig ist. Wie schließlich

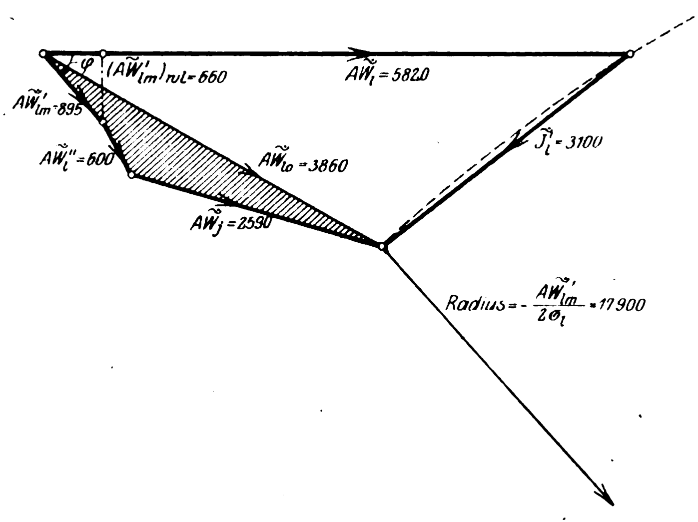


Bild 40a. 2,2 facher Anlaufstrom. Joch ohne lamellierten Nebenschluß.

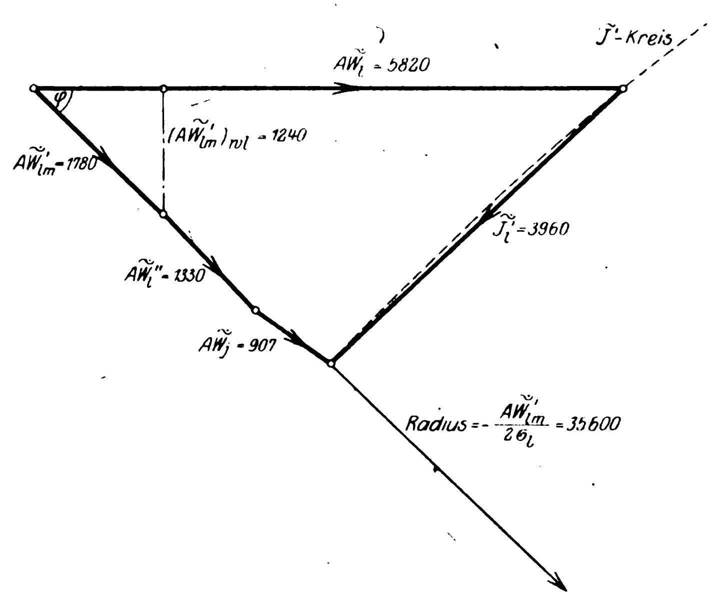


Bild 40b. 2,2 facher Anlaufstrom. Joch mit lamelliertem Nebenschluß.

Bild 40. Anlaufdiagramme der 1000 KW-Type.

die Amperewindungsdiagramme günstigsten Falls liegen können, und zwar mit und ohne magnetischen Nebenschluß, habe ich durch Bild 39 und 40 zu zeigen versucht. Anstatt sie zu erläutern, möchte ich nur auf das schon zu Bild 16 und 19 Bemerkte hinweisen. Die Hauptsache ist, daß mit der Phasenverschiebung y der Luftspaltamperewindungen und der mittleren Luftinduktion $\tilde{B}_{lm}$ auch deren wattlose

Komponente $(\tilde{B}_{lm})_{wl} = \tilde{B}_{lm} \sin \varphi$ bekannt ist. Dazu folgt dann sofort das Längsfeldmoment

$$D_l = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\tilde{B}_{lm})_{wl}}{\bar{B}_e} \cdot \frac{\tilde{J}_{Anl}}{\tilde{J}_{norm}} \right) \cdot D_{norm} \qquad 18a)$$

und gelingt es auch dem Querfeld¹), dasselbe Moment zu entnehmen, so erreicht man insgesamt:

$$\frac{D_{Anl}}{D_{norm}} = \frac{(\tilde{B}_{lm})_{wl}}{\bar{B}_e} \cdot \frac{\tilde{AW}_l}{\overline{AW}_q}.$$

Dieses Verhältnis habe ich in Bild 41 in Abhängigkeit von dem prozentualen Anlaufstrom aufgetragen. Man sieht, die Erhöhung des Anlaufmomentes durch den lamellierten Nebenschluß ist namentlich bei starken Typen eine so große, daß sie die etwas höheren Fabrikationskosten reichlich ausgleicht. So entnimmt man z. B. für 2,2-fachen Anlaufstrom zu den bereits mitgeteilten Amperewindungsdiagrammen:

Für die		100 KW-Type	1000 KW-Type
Ohne Nebenschluß zum Joche . .	$\frac{D_{Anl}}{D_{norm}}$	0,8	0,7
Mit Nebenschluß zum Joche . . .	„	1,1	1,2

Man wird vielleicht fragen, warum trotz alledem nicht die hohen Werte erreicht wurden, die unser Musterbeispiel des Abschnittes A besaß, und die ich durch die strichlierte Kurve in Bild 41 nochmal in Erinnerung gebracht habe? — Der Grund hierfür liegt nur noch zum kleinsten Teile in dem Vorhandensein eines massiven Joches. Viel wichtiger sind 2 andere Unterschiede: Einmal ist bei beiden Maschinen die normale Ankerrückwirkung $\overline{AW}_q$ im Verhältnis zur Gleichstromerregung $\overline{AW}_e$ erheblich kleiner, nämlich

$$\frac{\overline{AW}_q}{\overline{AW}_e} = 0{,}353 \text{ bzw. } 0{,}442 \text{ gegen } 0{,}50.$$

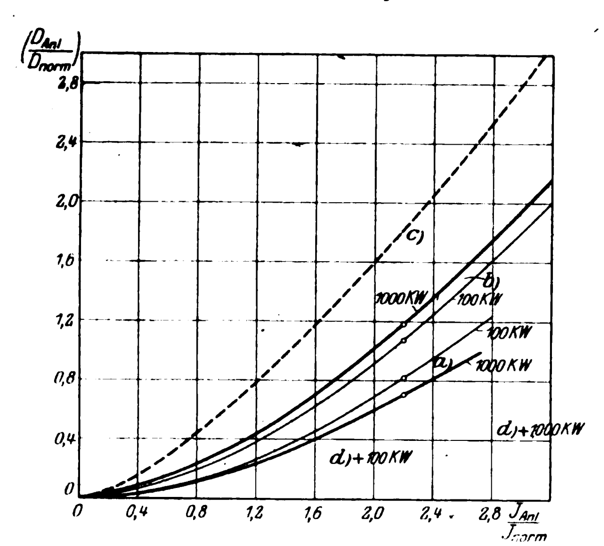


Bild 41. Anlaufmoment als Funktion des Anlaufstromes.
a) Massives Joch ohne lamellierten Nebenschluß,
b) Massives Joch mit lamelliertem Nebenschluß,
c) Lamelliertes Joch (vgl. Abschnitt A),
d) Massives Joch und massive Kerne.

Außerdem ist aber auch die Form der magnetischen Charakteristik wesentlich ungünstiger, vor allem ist ihr Knie nicht genug ausgeprägt, wodurch unsere Maschinen besonders bei kleinen Anlaufströmen ins Hintertreffen kommen. Doch braucht man das Erreichte nur mit den gleichfalls markierten Punkten (d) für massive Pole und Joch zu vergleichen, um die Größe des Fortschrittes voll würdigen zu können.

¹) Auf das Querfeldmoment braucht in diesem Zusammenhang nicht eingegangen zu werden. Ohne Hilfspole treten ja so gut wie gar keine Querfeldlinien in das Joch über. Und versteht man sich wirklich zum Einbau eines Hilfspoles, dann wird man wohl auch den geblätterten Nebenschluß nicht scheuen, der den Einfluß des Joches abermals ausschaltet.



Über Wechselstromselbsterregung von Gleichstrommaschinen.

Von

Fr. Leyerer.

Bei Versuchen[1]) an einem großen Drehstrom-Turbogenerator wurde die Nebenschlußwicklung der Erregermaschine an die Klemmen der Rotorwicklung des Drehstromgenerators gelegt (Bild 1), während bei der sonst üblichen Schaltung diese Nebenschlußwicklung an den Ankerklemmen der Erregermaschine angeschlossen wird (Bild 2). Da somit Rotorwicklung uud Nebenschlußwicklung parallel geschaltet waren, floß in der Nebenschlußwicklung beim Regulieren mittels des Regulators jeweils nach Eintritt des stationären Zustandes ein dem Rotorstrom proportionaler Strom. Der Erregerstrom der Erregermaschine ist also stets proportional ihrem Ankerstrom, das heißt die Erregermaschine hat bei Handregelung der Drehstromspannung mittels des Regulators die Charakteristik einer Hauptstrommaschine.

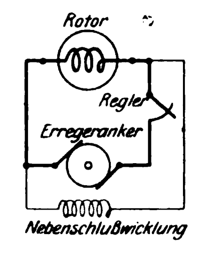


Bild 1.

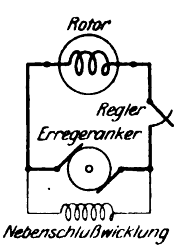


Bild 2.

Bei der Inbetriebsetzung zeigte sich aber, daß der Belastungsstrom der Erregermaschine sich nicht auf einen stationären Wert einstellen ließ. Er stieg bis zu einem Höchstwert, nahm dann, ohne daß am Regulator etwas verstellt wurde, wieder ab und darauf polte sich die Maschine um. Nach einiger Zeit schlugen die Zeiger der Strom- und Spannungsmesser wieder nach der ursprünglichen Seite aus und das Spiel wiederholte sich von neuem. Die Erregermaschine zeigte unstabile Belastungsverhältnisse, ihre Spannung und ihre Ströme pendelten.

Verkleinerte man den Regulierwiderstand allmählich, so wurden die Pendelungen immer langsamer, die Maximalwerte nahmen zu, bis bei einer gewissen Stellung des Regulators Spannung und Strom der Erregermaschine konstant blieben. Beim Zurückregulieren traten erst langsame, dann schnellere Schwingungen auf, die Höchstwerte nahmen ab, bis bei einer 2. Grenzstellung des Regulators Spannung und Strom ganz verschwanden.

Wiederholte Versuche zeigten stets genau das gleiche Ergebnis.

Waren ferner die Pendelungen sehr langsam, so konnten sie durch Zurückschiebung der Bürsten der Erregermaschine beseitigt werden. Heftigere Pendelungen dagegen waren erst nach Aufbringung einer Kompoundwicklung durch Bürstenverschiebung zu beseitigen.

Zweck dieser Abhandlung ist nun, die geschilderte Erscheinung rechnerisch zu verfolgen, um ihre Bedingungen zu ergründen. Ferner sollen die theoretisch entwickelten Ergebnisse mit den Versuchsergebnissen verglichen werden.

[1]) Die Versuche wurden im Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke, Berlin-Siemensstadt, durchgeführt.



Untersuchung des gegebenen Problems.

1. Aufstellung der Differentialgleichung für die Kompoundmaschine.

Als Erregermaschine werde eine Kompoundmaschine mit Wendepolen vorausgesetzt. Als Maß sei überall die CGS-Einheit gewählt. Es sei (siehe Bild 3):

E[1]) der Momentanwert der in der Ankerwicklung induzierten Spannung der Drehung,
E_0 die Remanenzspannung der Erregermaschine,
i_a der Momentanwert des Ankerstromes der Erregermaschine,
i_n der Momentanwert des Erregerstromes der Erregermaschine,
i_r der Momentanwert des Belastungsstromes der Erregermaschine, (des Rotorstromes des Drehstromgenerators),
R der Ohmsche Widerstand des Regulators, einschließlich der Ohmschen Widerstände des Hauptstromkreises der Erregermaschine,
r_n der Ohmsche Widerstand der Nebenschlußwicklung der Erregermaschine,
r_r der Ohmsche Widerstand der Rotorwicklung des Drehstromgenerators,
L_a der Selbstinduktionskoeffizient der mit dem Hauptfeld nicht verketteten Teile der Hauptstromwicklungen (also der Anker- und Wendepolwicklung der Erregermaschine),

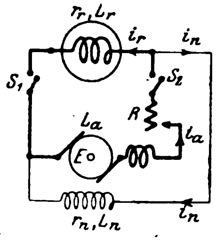


Bild 3.

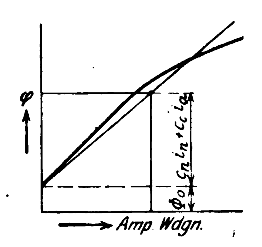


Bild 4.

L_n der Selbstinduktionskoeffizient der Nebenschlußwicklung der Erregermaschine,
L_c der Selbstinduktionskoeffizient der Kompoundwicklung der Erregermaschine,
L_r der Selbstinduktionskoeffizient der Rotorwicklung des Drehstromgenerators,
s die gesamte Leiterzahl der Ankerwicklung der Erregermaschine,
2a die Zahl der parallelen Stromzweige der Ankerwicklung der Erregermaschine,
n die Drehzahl der Maschinen (direkte Kupplung),
$k = \frac{s \cdot p \cdot n}{60 \cdot a}$,
2p die Polzahl der Erregermaschine.

Bezeichnet ferner:
φ den Momentanwert des in den Anker der Erregermaschine eintretenden Feldes,
Φ_0 das in den Anker eintretende remanente Feld,
σ den Streuungskoeffizienten der Erregermaschine,
$\mathfrak{w}_n$ die Windungszahl der Nebenschlußwicklung der Erregermaschine,
$\mathfrak{w}_c$ die Windungszahl der Kompoundwicklung der Erregermaschine, (beide pro 1 Pol),

so beträgt das mit den Hauptpolwicklungen verkettete Feld $\varphi(1 + \sigma)$ und die von diesem in einer dieser vorstehend genannten Wicklungen induzierte Spannung

[1]) Ich schreibe „E", um eine Verwechslung mit „e" = 2,718 . . ., der Basis der natürlichen Logarithmen, zu vermeiden.

$$E_{\mathfrak{w}} = -2\,p \cdot \mathfrak{w} \cdot \frac{d\varphi(1+\sigma)}{dt} = -2\,p \cdot \mathfrak{w} \cdot (1+\sigma)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Wird $2\,p\ \mathfrak{w} \cdot (1+\sigma) = w$ gesetzt, so ist:

$$E_{\mathfrak{w}} = -w \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Selbstinduktionen sowie die gegenseitigen Induktionen der das Hauptfeld erzeugenden Wicklungen werden nun in der Weise eingeführt, daß der Einfluß dieser Wicklungen auf das Feld φ und der Einfluß dieses resultierenden Feldes auf die einzelnen Wicklungen festgestellt wird.

Das Problem wird dann festgelegt durch folgende fünf Gleichungen:

1. Der Ausdruck für das Gleichgewicht der elektromotorischen Kräfte im Stromkreis $R \ldots r_r$:

$$E = i_a \cdot R + i_r \cdot r_r + L_a \frac{d\,i_a}{dt} + w_c \frac{d\varphi}{dt} + L_r \cdot \frac{d\,i_r}{dt}. \tag{1}$$

2. Der Ausdruck für das Gleichgewicht der elektromotorischen Kräfte im Stromkreis $R \ldots r_n$:

$$E = i_a \cdot R + i_n \cdot r_n + L_a \cdot \frac{d\,i_a}{dt} + w_c \frac{d\varphi}{dt} + w_n \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2}$$

3. Die Gleichung für die Magnetisierungskurve:

$$\varphi = \Phi_0 + f(i_n, i_a). \tag{3}$$

4. Die Beziehung zwischen der Rotationsspannung der Ankerwicklung und dem Feld:

$$E = k \cdot \varphi. \tag{4}$$

5. Die Beziehung zwischen den drei Strömen:

$$i_a = i_n + i_r. \tag{5}$$

Die Magnetisierungskurve hat im allgemeinen die in Bild 4 dargestellte Form; die Funktion „f“ der Gleichung (3) ist eine solche höheren Grades. Wie aus den folgenden Entwicklungen ersichtlich, führt eine solche Funktion zu Differentialgleichungen höheren Grades, die analytisch nicht oder nur umständlich zu lösen sind. Ich ersetze deshalb vorläufig die gekrümmte Charakteristik durch eine Gerade, welche sich der Kurve in deren erstem Teil eng anschmiegt. Diese Gerade entspricht der Gleichung:

$$\varphi = \Phi_0 + c_n \cdot i_n + c_c \cdot i_a. \tag{3 a}$$

Falls sich der resultierende Vorgang nun innerhalb der Grenzen abspielt, zwischen denen Kurve und Gerade annähernd zusammenfallen, werden sich die Rechnungsergebnisse mit den Versuchsergebnissen ziemlich decken. Im anderen Falle genügt diese Annäherung nicht, doch soll darauf später eingegangen werden.

Einflüsse von anderen Größen als i_n und i_a sollen hier nicht berücksichtigt werden. Als solche kämen in Betracht der Einfluß der Ströme in den Ankerkurzschlußspulen und der Einfluß der Wirbelströme im massiven Magnetjoch auf das Feld φ.

Die oben erwähnte, durch Veränderung des Kraftflusses in einer mit ihm verketteten Wicklung induzierte Spannung ist nun auch, z. B. für Index n angeschrieben:

$$E_{\mathfrak{w}_n} = -w_n \cdot c_n \cdot \frac{d\,i_n}{dt},$$

falls i_a außer Betracht bleibt. Da andererseits bekanntlich auch:

$$E_{\mathfrak{w}_n} = -L_n \cdot \frac{d\,i_n}{dt},$$

so ist:

$$-Ln \cdot \frac{d i_n}{dt} = -w_n \cdot c_n \cdot \frac{d i_n}{dt}$$

oder

$$L_n = w_n \cdot c_n = 2 p \cdot \mathfrak{w}_n (1 + \sigma) c_n.$$

Ebenso:

$$L_c = w_c \cdot c_c = 2 p \cdot \mathfrak{w}_c (1 + \sigma) \cdot c_c.$$

Den Gleichungen (1) und (2) liegt die Annahme zugrunde, daß Nebenschluß- und Kompoundwicklung vom gleichen Feld $\varphi(1 + \sigma)$ durchsetzt werden, daß also die Streuung zwischen den beiden Wicklungen vernachlässigt wird.

Unter Benutzung von:

$$\frac{d\varphi}{dt} = c_n \cdot \frac{d i_n}{dt} + c_c \cdot \frac{d i_a}{dt} \text{ aus Gleichung (3a),}$$

$$E_0 = k \cdot \Phi_0 \text{ aus Gleichung (4),}$$

$$\left.\begin{aligned} i_n &= i_a - i_r \\ \frac{d i_n}{dt} &= \frac{d i_a}{dt} - \frac{d i_r}{dt} \end{aligned}\right\} \text{aus Gleichung (5)}$$

ergeben sich nach Elimination von φ, i_n und E und nach Ordnen folgende Gleichungen:

$$\Big(L_a + w_c(c_n + c_c)\Big)\frac{d i_a}{dt} + (L_r - w_c \cdot c_n)\frac{d i_r}{dt} + \Big(R - k(c_n + c_c)\Big) i_a + (r_r + k \cdot c_n) i_r = E_0 \quad (1a)$$

$$\Big(L_a + (w_c + w_n)(c_n + c_c)\Big)\frac{d i_a}{dt} - (w_c + w_n) c_n \frac{d i_r}{dt} + \Big(R + r_n - k \cdot (c_n + c_c)\Big) i_a - (r_r - k \cdot c_n) i_r = E_0. \quad (2a)$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} L_a + w_c(c_n + c_c) &= A_1, & L_a + (w_c + w_n)(c_n + c_c) &= A_2, \\ L_r - w_c c_n &= B_1, & -(w_c + w_n) c_n &= B_2, \\ R - k(c_n + c_c) &= C_1, & R + r_n - k(c_n + c_c) &= C_2, \\ r_r + k \cdot c_n &= D_1, & -(r_n - k \cdot c_n) &= D_2, \end{aligned}$$

so ergeben sich folgende zwei simultane, lineare Differentialgleichungen:

$$A_1 \frac{d i_a}{dt} + B_1 \frac{d i_r}{dt} + C_1 i_a + D_1 i_r = E_0 \quad (1b)$$

$$A_2 \frac{d i_a}{dt} + B_2 \frac{d i_r}{dt} + C_2 i_a + D_2 i_r = E_0. \quad (2b)$$

Durch Differentiation beider Gleichungen und Eliminierung des Gliedes $\frac{d^2 i_r}{dt^2}$ (durch Multiplikation der Gleichungen (1b) bzw. (2b) mit B_2 bzw. B_1 und Subtraktion derselben) ergibt sich:

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)\frac{d^2 i_a}{dt^2} + (B_2 C_1 - B_1 C_2)\frac{d i_a}{dt} + (B_2 D_1 - B_1 D_2)\frac{d i_r}{dt} = 0.$$

Durch Elimination von i_r aus Gleichung (1b) und (2b) (durch Multiplikation mit D_2 bzw. D_1 und Subtraktion) erhält man ferner:

$$(A_1 D_2 - A_2 D_1)\frac{d i_a}{dt} + (B_1 D_2 - B_2 D_1)\frac{d i_r}{dt} + (C_1 D_2 - C_2 D_1) i_a = E_0 (D_2 - D_1)$$

oder:

$$\frac{d i_r}{dt} = \frac{(A_1 D_2 - A_2 D_1)\frac{d i_a}{dt} + (C_1 D_2 - C_2 D_1) i_a - E_0 (D_2 - D_1)}{B_2 D_1 - B_1 D_2}.$$

Diesen Wert in die vorstehende Gleichung eingeführt, gibt:

$$\frac{d^2 i_a}{dt^2} + \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2 + A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{d i_a}{dt} + \frac{C_1 D_2 - C_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} i_a = E_0 \frac{D_2 - D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \quad (6)$$

Setzt man:

$$a_1 = \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2 + A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \tag{7}$$

$$a_2 = \frac{C_1 D_2 - C_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \tag{8}$$

$$\mu_1 = E_0 \frac{D_2 - D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \tag{9}$$

dann erhält man:

$$\frac{d^2 i_a}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{di_a}{dt} + a_2 \cdot i_a = \mu_1. \tag{6a}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$i_a = c_0 e^{\lambda_1 t} + c_0' e^{\lambda_2 t} + \frac{\mu_1}{a_2}. \tag{10}$$

Dabei sind λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \tag{11}$$

also:

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \tag{12}$$

$$\lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \tag{13}$$

2. Entwicklung der Formeln für die Ströme und die Spannung.

Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten c_0 und c_0' werde angenommen, daß der Vorgang untersucht werden soll von dem Augenblick ab, in welchem die beiden Schalter S_1 und S_2 (siehe Bild 3) eingelegt werden. Es sei also zur Zeit

$t = 0 : i_a = 0$ und $i_r = 0$.

Das gibt 2 Bedingungsgleichungen für c_0 und c_0'.

1. Für $t = 0$ und $i_a = 0$ ergibt Gleichung (10):

$$c_0 + c_0' + \frac{\mu_1}{a_2} = 0. \tag{14}$$

2. Um $t = 0$ und $i_r = 0$ einzuführen, muß man auf die Gleichungen (1 b) und (2 b) zurückgreifen. Diese ergeben für $i_a = 0$ und $i_r = 0$:

$$A_1 \cdot \frac{di_a}{dt} + B_1 \frac{di_r}{dt} = E_0 \tag{1 c}$$

$$A_2 \cdot \frac{di_a}{dt} + B_2 \frac{di_r}{dt} = E_0. \tag{2 c}$$

Durch Multiplikation mit B_2 bzw. B_1 und Subtraktion ergibt sich hieraus:

$$\frac{di_a}{dt} = E_0 \frac{B_2 - B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

oder, wenn

$$\mu_2 = E_0 \frac{B_2 - B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \tag{15}$$

gesetzt wird:

$$\frac{di_a}{dt} = \mu_2. \tag{16}$$

Aus Gleichung (10) folgt andererseits:

$$\frac{di_a}{dt} = c_0 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_0' \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \tag{10 a}$$

und für $$t = 0: \frac{di_a}{dt} = c_0 \lambda_1 + c_0' \lambda_2, \text{ also:}$$
$$c_0 \lambda_1 + c_0' \lambda_2 = \mu_2 \tag{17}$$
ferner:
$$c_0 + c_0' = -\frac{\mu_1}{a_2} \tag{14}$$

Aus diesen beiden Bedingungsgleichungen folgt:
$$c_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\mu_2 + \lambda_2 \frac{\mu_1}{a_2}\right) \tag{18}$$
$$c_0' = -\frac{\mu_1}{a_2}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - \frac{\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{19}$$

Bei einer remanenzlosen Erregermaschine wäre $E_0 = 0$. Dann ist auch: $\mu_1 = 0$, und $\mu_2 = 0$, folglich auch: $c_0 = 0$ und $c_0' = 0$ und damit zu allen Zeiten t auch $i_a = 0$. Das heißt also, daß beim Schließen der Schalter S_1 und S_2 die remanenzlose Maschine nicht anspricht. Um das System auf Spannung zu bringen, ist remanenter Magnetismus erforderlich, worauf bekanntlich das dynamoelektrische Prinzip beruht.

Im Grenzfall ist in den Gleichungen (12) und (13) der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null, wenn $\frac{a_1^2}{4} = a_2$. Dann ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und für diesen Grenzfall ist die Lösung für i_a:
$$i_a = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(c + c t\right) + \frac{\mu_1}{a_2}. \tag{10II}$$

Die Konstanten c und c werden ebenso bestimmt wie auf Seite 99, also:
$$t = 0: \; c + \frac{\mu_1}{a_2} = 0; \; c = -\frac{\mu_1}{a_2}.$$
$$\frac{di_a}{dt} = \bar{c}\left(e^{-\frac{a_1}{2}t} - \frac{a_1}{2} t e^{-\frac{a_1}{2}t}\right) = \bar{c} e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(1 - \frac{a_1}{2}t\right)$$
sodaß $$t = 0: \frac{di_a}{dt} = \bar{c}, \text{ also } \bar{c} = \mu_2,$$
$$i_a = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(-\frac{\mu_1}{a_2} + \mu_2 t\right) + \frac{\mu_1}{a_2}. \tag{10II}$$

Ist in den Gleichungen (12) und (13) der Ausdruck unter der Wurzel negativ, so wird diese imaginär und man kann schreiben:
$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + j\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}},$$
wobei $j = \sqrt{-1}$ gesetzt ist.

Bei $-\frac{a_1}{2} = \alpha$ und $\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = \beta$ wird
$$\lambda_1 = \alpha + \beta j \tag{12 a}$$
$$\lambda_2 = \alpha - \beta j \tag{13 a}$$
und
$$i_a = c_0 \cdot e^{(\alpha + \beta j)t} + c_0' \cdot e^{(\alpha - \beta j)t} + \frac{\mu_1}{a_2} \tag{10 a}$$
$$= e^{\alpha t}(c_0 e^{\beta j t} + c_0' e^{-\beta j t}) + \frac{\mu_1}{a_2}.$$

Da:
$$e^{\pm \beta j t} = \cos\beta t \pm j \sin\beta t,$$
so wird:
$$i_a = e^{\alpha t}\left\{(c_0 + c_0')\cos\beta t + (c_0 - c_0') j \sin\beta t\right\} + \frac{\mu_1}{a_2}$$



oder wenn:

$$c_0 + c_0' = c' \text{ und } (c_0 - c_0')\, j = c'',$$

ergibt sich:

$$i_a = e^{-\frac{a_1}{2}t}(c' \cos\beta t + c'' \sin\beta t) + \frac{\mu_1}{a_2}, \tag{10III}$$

wobei $\beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$ ist.

Die reellen Konstanten c' und c'' bestimmen sich analog zu:

$$c' = -\frac{\mu_1}{a_2} \tag{20}$$

$$c'' = \frac{1}{\beta}\left(\mu_2 - \frac{a_1}{2}\cdot\frac{\mu_1}{a_2}\right). \tag{21}$$

Der Rotorstrom i_r könnte nun in gleicher Weise ermittelt werden wie i_a durch Elimination von $\frac{d^2 i_a}{dt^2}$ und i_a. Da aber die beiden Hauptgleichungen (1 b) und (2 b) in bezug auf i_a und i_r vollständig symmetrisch gebaut sind und nur die Koeffizienten andere sind (B statt A und D statt C), kann man die Formeln für die den Werten a_1, a_2, μ_1 und μ_2 entsprechenden Werte b_1, b_2, ν_1 und ν_2 sofort anschreiben, indem man überall die eben genannten Vertauschungen vornimmt. Also:

$$b_1 = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1 + D_1 A_2 - D_2 A_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1} \tag{22}$$

$$b_2 = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1} \tag{23}$$

$$\nu_1 = E_0 \frac{C_2 - C_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1} \tag{24}$$

$$\nu_2 = E_0 \frac{A_2 - A_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1}. \tag{25}$$

Wenn man Zähler und Nenner von b_1 und b_2 mit (-1) multipliziert, ergibt sich:

$$b_1 = a_1 \text{ und } b_2 = a_2.$$

Das ist auch erforderlich, da sich aus allen Gleichungen für die Ströme und die Spannung dieselben Bedingungsgleichungen (7) und (8) ergeben müssen.

Dann ergibt sich für i_r die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 i_r}{dt^2} + a_1 \frac{d i_r}{dt} + a_2 i_r = \nu_1 \tag{26}$$

und die Lösung dieser ist:

$$i_r = c_0 e^{\lambda_1 t} + c_0' e^{\lambda_2 t} + \frac{\nu_1}{a_2}. \tag{27 I}$$

Die Koeffizienten λ_1 und λ_2 der Exponenten von e sind die gleichen wie in der Formel für i_a (Gleichung 10I), da sie ja die Wurzeln derselben quadratischen Gleichung (11) sind.

Die Integrationskonstanten bestimmen sich ebenfalls durch Vertauschung von μ_1 und μ_2 der Gleichungen (18) und (19) gegen die Werte ν_1 und ν_2, also:

$$c_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\nu_2 + \lambda_2 \frac{\nu_1}{a_2}\right) \tag{28}$$

$$c_0' = -\frac{\nu_1}{a_2}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - \frac{\nu_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{29}$$

Für den Grenzfall $\lambda_1 = \lambda_2$ ergibt sich analog:

$$i_r = c^{-\frac{a_1}{2}t}\left(-\frac{\nu_1}{a_2} + \nu_2 t\right) + \frac{\nu_1}{a_2}. \tag{27 II}$$

In der Form für imaginäres λ ergibt sich:

$$i_r = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(\bar{c}'\cos\beta t + \bar{c}''\sin\beta t\right) + \frac{\nu_1}{a_2}, \qquad (27\,\mathrm{III})$$

wobei:

$$c' = -\frac{\nu_1}{a_2} \qquad (30)$$

$$c'' = \frac{1}{\beta}\left(\nu_2 - \frac{a_1}{2}\frac{\nu_1}{a_2}\right). \qquad (31)$$

Der Strom i_n ist laut Gleichung (5):

$$i_n = i_a - i_r,$$

also:

$$i_n = (c_0 - \bar{c}_0)\,e^{\lambda_1 t} + (c_0' - \bar{c}_0')\,e^{\lambda_2 t} + \frac{\mu_1 - \nu_1}{a_2} \qquad (32\,\mathrm{I})$$

oder in der anderen Form:

$$i_n = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(\frac{\nu_1 - \mu_1}{a_2} + (\mu_2 - \nu_2)\,t\right) + \frac{\mu_1 - \nu_1}{a_2} \qquad (32\,\mathrm{II})$$

und

$$i_n = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left\{(c' - \bar{c}')\cos\beta t + (c'' - \bar{c}'')\sin\beta t\right\} + \frac{\mu_1 - \nu_1}{a_2}. \qquad (32\,\mathrm{III})$$

Die Spannung E ist laut Gleichung (4) und (3):

$$E = k\,(\Phi_0 + c_n i_n + c_c i_a)$$

$$E = k\left\{\Phi_0 + [c_n(c_0 - \bar{c}_0) + c_c c_0]\,e^{\lambda_1 t} + [c_n(c_0' - \bar{c}_0') + c_c c_0']\,e^{\lambda_2 t} + c_n\frac{\mu_1 - \nu_1}{a_2} + c_c\frac{\mu_1}{a_2}\right\} \qquad (33\,\mathrm{I})$$

oder in den anderen Formen:

$$E = k\left\{\Phi_0 + e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[c_n\left(\frac{\nu_1 - \mu_1}{a_2} + (\mu_2 - \nu_2)\,t\right) + c_c\left(-\frac{\mu_1}{a_2} + \mu_2 t\right)\right] + \right.$$
$$\left. + c_n\frac{\mu_1 - \nu_1}{a_2} + c_c\frac{\mu_1}{a_2}\right\} \qquad (33\,\mathrm{II})$$

und

$$E = k\left\{\Phi_0 + e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[\left(c_n(c' - \bar{c}') + c_c c'\right)\cos\beta t + \left(c_n(c'' - \bar{c}'') + c_c c''\right)\sin\beta t\right] + \right.$$
$$\left. + c_n\frac{\mu_1 - \nu_1}{a_2} + c_c\frac{\mu_1}{a_2}\right\}. \qquad (33\,\mathrm{III})$$

Damit ist also ganz allgemein der Verlauf der Spannung E sowie der Ströme i_a, i_n und i_r gegeben. Aus den Formeln für diese Werte kann die gegenseitige Phasenlage bestimmt werden.

3. Diskussion der Formeln für die Kompoundmaschine und die Nebenschlußmaschine.

Man erkennt aus den Gleichungen für die Spannung und die Ströme, daß sie alle den gleichen Aufbau haben. Es sind entweder Gleichungen der Form mit den Indices I oder den Indices II oder III, und zwar erhält man die ersten für reelle Werte von λ_1 und λ_2, die letzteren für komplexe. Da

$$\lambda = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}, \qquad (12)$$

so ist die gegenseitige Beziehung der Werte von a_1 und a_2 ausschlaggebend für die Art des Verlaufes der Spannung und der Ströme. Ist $\frac{a_1^2}{4} > a_2$, so erhält man reelle Werte

von λ_1 und λ_2 und einen aperiodischen Verlauf nach Exponentialkurven der Form

$$i = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3.$$

Der Grenzfall $\frac{a_1^2}{4} = a_2$ wird am Versuchsbeispiel näher untersucht werden. Ist $\frac{a_1^2}{4} < a_2$, so erhält man komplexe Werte von λ_1 und λ_2 und einen periodischen Verlauf, d. h. es ergeben sich Schwingungen der Form

$$i = e^{-\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + c_3.$$

Wegen der konstanten Glieder c_3 sind die eigentlichen Schwingungen einem konstanten Strom oder einer konstanten Spannung c_3, welche von der Remanenz herrührt, übergelagert. Durch den Faktor $e^{-\alpha t}$ ist bedingt, daß die Amplituden der Schwingung im allgemeinen nicht konstant bleiben, sondern zu- oder abnehmen Die Schwingungen nehmen zu, wenn der Exponent von e positiv ist, also, da die Zeit t stets positiv eingeführt werden muß, wenn α negativ ist oder $\left(\text{da } \alpha = \frac{a_1}{2}\right)$, wenn a_1 negativ ist. Ist dagegen a_1 positiv, so ist der Exponent von e negativ und die Amplituden der Schwingungen nehmen ab, wir haben gedämpfte Schwingungen. Beim Grenzfall, $a_1 = 0$, nehmen die Amplituden weder zu noch ab, wir erhalten stationäre Schwingungen nach dem Sinusgesetz, die einem konstanten Wert übergelagert sind:

$$i = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t + c_3.$$

Die Erregermaschine stellt in diesem Falle eine selbsterregte Wechselstrommaschine dar. Die Periodenzahl des Wechselstromes beträgt

$$\sim = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}}{2\pi}.$$

Da also die Kurvenform, wie bereits erwähnt, von der Größe der Werte a_1 und a_2 abhängt, sollen diese noch durch die ursprünglichen Werte (siehe Seite 99) ausgedrückt werden. Dabei setze ich zwecks der kürzeren Schreibung:

$w_n \cdot c_n = L_n$, $w_c \cdot c_c = L_c$ } den Selbstinduktionskonffizienten (siehe Seite 98)

$w_n \cdot c_c = w_c \cdot c_n = M$ (dem Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen der Nebenschluß- und der Kompoundwicklung).

$k \cdot c_n = N_n$, $k \cdot c_c = N_c$ } die Koeffizienten der rotatorischen Induktion der Ankerwicklung,

wobei N_n den Einfluß des Nebenschlußstromes i_n und N_c den Einfluß des Kompoundstromes i_a angibt.

Nach obigem ist auch, da c_n und c_c wie w_n und w_c porportional $\mathfrak{w}_n$ bezw. $\mathfrak{w}_c$ sind:

$\frac{L_n}{L_c} = \left(\frac{w_n}{w_c}\right)^2$, d. h. die Selbstinduktionskoeffizienten verhalten sich wie die Quadrate der Windungszahlen und

$\frac{L_n}{M} = \frac{w_n}{w_c}$ oder: $\frac{L_c}{M} = \frac{w_c}{w_n}$, d. h. die Selbstinduktionskoeffizienten verhalten sich zu dem Koeffizienten der gegenseitigen Induktion wie die Windungszahlen. Aus Gleichungen (7) und (8) ergibt sich dann:

$$a_1 = \frac{L_r (N_n + N_c - R - r_n) + L_n (N_c - R - r_r) - M (2 r_r + N_n) - (L_a + L_c)(r_n + r_r)}{-L_r (L_a + L_c + L_n + 2 M) - L_n (L_a + L_c) + M^2} \quad (7\,a)$$

$$a_2 = \frac{r_n (N_c - R - r_r) + r_r (N_n + N_c - R)}{-L_r (L_a + L_c + L_n + 2 M) - L_n (L_a + L_c) + M^2}. \quad (8\,a)$$

Wenn man die Selbstinduktionskoeffizienten L_a und L_c der Anker-Wendepolwicklung und der Kompoundwicklung und M, den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion der beiden Hauptpolwicklungen, wegen ihrer Kleinheit gegenüber L_n und L_r vernachlässigt[1]) und gleich Null setzt, so erhält man:

$$a_1 = \frac{L_r(N_n + N_c - R - r_n) + L_n(N_c - R - r_r)}{-L_r \cdot L_n} \tag{7 b}$$

$$a_2 = \frac{r_r(N_n + N_c - R) + r_n(N_c - R - r_r)}{-L_r \cdot L_n}. \tag{8 b}$$

Man ersieht daraus, daß die Wirkung der Kompoundwicklung nur noch in N_c enthalten ist. Da aber N_c nur in der Verbindung mit R in der Form $(N_c - R)$ vorkommt, ist es gleichgültig, in welcher Weise N_c und R zu $(N_c - R)$ beitragen. Man erhält also die gleichen Schwingungsverhältnisse, wenn nur $(N_c - R)$ den gleichen Wert behält. Das heißt also, man kann bei Vorhandensein einer Kompoundwicklung einen um N_c größeren Wert des Widerstandes R zulassen, ohne an den Schwingungsverhältnissen etwas zu ändern. Oder man kann durch die Wirkung der Kompoundwicklung erreichen, daß die Schwingungen bei einem Widerstand R erlöschen, während sie ohne Kompoundwicklung erst bei dem Widerstandswert $(R - N_c)$ verschwinden würden.

Dieses Ergebnis stimmt mit der auf Seite 95 erwähnten Beobachtung überein.

Stationäre Schwingungen treten ein, wenn $a_1 = 0$ wird. Da dessen Nenner (Formel 7 a) nicht unendlich groß werden kann, muß dessen Zähler gleich Null werden. Aus der allgemeinen Formel für a_1 ist daraus aber nicht viel zu ersehen.

Läßt man in der Schaltung nach Bild 3 die Kompoundwicklung weg, so wird:

$$N_c = 0; \quad M = 0; \quad L_c = 0.$$

Stationäre Schwingungen treten dann auf, wenn wieder der Zähler von a_1 zu Null wird, wenn also folgende Bedingung erfüllt ist:

$$L_r(N_n - R - r_n) + L_n(-R - r_r) = 0, \tag{34}$$

(L_a ist dabei vernachlässigt; näheres darüber siehe Seite 106).

Oder anders geschrieben:

$$\frac{L_n}{L_r} = \frac{N_n - R - r_n}{R + r_r}. \tag{34 a}$$

Die normale Schaltung als Nebenschlußmaschine, bei der im Gegensatz zu Bild 1 die Erregerwicklung an den Ankerklemmen der Erregermaschine liegt (Bild 2), erhält man, wenn man sich unter R den inneren Widerstand der Maschine vorstellt. Vernachlässigt man diesen, so ist für die gewöhnliche Nebenschlußmaschine

$$R = 0$$

und die Bedingung für stationäre Wechselströme lautet:

$$L_r(N_n - r_n) - L_n \cdot r_r = 0 \tag{35}$$

oder:

$$\frac{L_n}{L_r} = \frac{N_n - r_n}{r_r}.$$

Den Regulierwiderstand kann man sich dann als in r_r enthalten denken.

Bei der normalen Schaltung als Nebenschlußmaschine treten also stationäre Schwingungen nur auf, wenn die Selbstinduktionskoeffizienten L_r und L_n der Rotorwicklung und der Nebenschlußwicklung, der Rotations-Induktionskoeffizient N_n und die Ohmschen Widerstände r_r und r_n der beiden eben genannten Wicklungen gegenseitig so abgestimmt sind, daß Gleichung (35) befriedigt wird. Bei festgelegten Wicklungskoeffizienten (L_r, L_n, N, r_r und r_n) können also durch Veränderung der Ohmschen Widerstände durch Einschalten von Zusatzwiderständen stationäre Schwingungen hervorgerufen werden.

[1]) Wegen des kleinen Wertes von $\frac{w_c}{w_n}$ ohne weiteres zulässig; bez. L_a s. auch S. 106.



4. Untersuchung für die Hauptstrommaschine.

Es bleibt jetzt noch die Frage zu untersuchen, ob bei Verwendung einer gewöhnlichen Hauptstrommaschine als Erregermaschine Schwingungen eintreten können.

In diesem Falle verschwindet der Nebenschlußstromkreis des Bildes 3 und die Kompoundwicklung kann man sich zur Hauptstromwicklung erweitert denken. Für den übrig bleibenden Stromkreis gelten dann noch die Gleichungen (1), (3 a) und (4), wobei $i_a = i_r = i$ gesetzt werde:

$$E = i(R + r_r) + (L_a + L_r)\frac{di}{dt} \tag{36}$$

$$\varphi = \Phi_0 + c \cdot i \tag{37}$$

$$E = k \cdot \varphi. \tag{4}$$

Durch Elimination von E und φ folgt:

$$(L_a + L_r)\frac{di}{dt} + (R + r_r - k \cdot c)\, i = E_0. \tag{36 a}$$

Setzt man:

$$L_a + L_r = L$$
$$R + r_r - k \cdot c = r, \tag{38}$$

so wird aus der Gleichung (36 a):

$$E_0 = i \cdot r + L \cdot \frac{di}{dt}. \tag{36 b}$$

Das ist die bekannte Differentialgleichung, welche den Einschaltstrom bestimmt, wenn der Widerstand r, welche mit der Selbstinduktion L behaftet ist, an die konstante Spannung E_0 gelegt wird. Der Widerstand r setzt sich jedoch laut Gleichung (38) zusammen aus den Ohmschen Widerständen R und r_r und dem Rotations-Induktionskoeffizienten $k \cdot c = N$, welcher also die Rolle eines Ohmschen Widerstandes spielt.

Die Lösung der Differentialgleichung (36 b) lautet[1]):

$$i = \frac{E_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right). \tag{36 c}$$

Solange r positiv ist, also $R + r_r > N$, verläuft i nach der bekannten Exponentialkurve, d. h. es können keine Schwingungen auftreten; i nähert sich asymptotisch dem Wert $\frac{E_0}{r}$.

Ist dagegen $R + r_r < N$, so wird r negativ und der Ausdruck für i lautet:

$$i = \frac{E_0}{r}\left(e^{\frac{r}{L}t} - 1\right). \tag{36 d}$$

Für $t = \infty$ wird dann $i = \infty$, d. h. bei gerader Magnetisierungscharakteristik würde der Strom und damit die Spannung E immerfort ansteigen.

Für den Grenzfall, $R + r_r = N$, wird $r = 0$ und i nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Bestimmt man diese, indem man in Gleichung (36 c) Zähler und Nenner differenziert, so ergibt sich

$$i = \left|\frac{E_0 \cdot \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t}}{1}\right|_{r=0} = 0$$

d. h., wenn $R + r_r = N$, tritt überhaupt keine Erregung ein. Dann ist nämlich auch $i(R + r_r) = k \cdot c \cdot i$, d. h. die im Anker induzierte Spannung $k \cdot c \cdot i$ ist immer gleich der von den Ohmschen Widerständen absorbierten. Es bleibt dann kein Überschuß zur Überwindung der Selbstinduktionswiderstände, so daß ein Strom i nicht entstehen kann.

[1]) Siehe z. B.: Schwaiger: „Über Einschaltvorgänge in kapazitätsfreien Stromkreisen." Elektrotechnik und Maschinenbau 1909 Seite 633.

Periodische Schwingungen des Stromes i können also bei der Hauptstromerregermaschine in keinem Falle auftreten.

5. Durchrechnung für das Versuchsaggregat.

Bei dem auf Seite 95 erwähnten Versuchsaggregat waren folgende Konstanten vorhanden:

$$r_r = 0{,}27\ \Omega$$
$$r_n = 19\ \Omega$$
$$2p = 6$$
$$k = 2{,}04 \cdot 10^4;\ \mathfrak{w}_n = 610.$$

Die Erregermaschine hatte zuerst keine Kompoundwicklung; es ist also:

$$\mathfrak{w}_c = 0;\ w_c = 0;\ c_c = 0;\ M = 0.$$

Die Leerlaufcharakteristik der Erregermaschine hatte im geraden Teil einen Verlauf nach Gleichung (3a) und (4):

$$E = E_0 + k \cdot c_n \cdot i_n.$$

Dabei war:

$$E = 100 \text{ Volt}$$
$$E_0 = 5 \text{ Volt}$$
$$i_n = 3{,}6 \text{ Amp.}$$

Also:

$$k \cdot c_n = \frac{E - E_0}{i_n} = 26{,}4 = N_n;\ c_n = 12{,}9 \cdot 10^{-4}.$$

Wird die Streuung zwischen den Polen und dem Anker zu $\sigma = 0{,}25$ angenommen, so ist nach Seite 98:

$$L_n = 2\,p \cdot \mathfrak{w}_n (1 + \sigma) \cdot c_n = 5{,}9 \text{ Henry.}$$

Die Leerlaufcharakteristik des Drehstromgenerators hatte im geraden Teil einen Verlauf:

$$1600 = 0 + k \cdot c_n \cdot 80$$

Also $k \cdot c_n = 20$; bei $k = 44{,}3 \cdot 10^{-2}$ ist $c_n = 45{,}2 \cdot 10^{-4}$.

Für $2p = 2$ und $\sigma = 0{,}07$ ergibt sich:

$$L_r = 1{,}32 \text{ Henry.}$$

Nach früheren Ermittlungen beträgt die Zeitkonstante der Anker- und Wendepolwicklung bei solchen Maschinen etwa $^1/_{500}''$. Da der Ohmsche Widerstand etwa $^1/_{100}\ \Omega$ beträgt, ist:

$$L_a = {}^1/_{50\,000} \text{ Henry}$$

und kann vernachlässigt werden: $L_a = 0$.

Damit ergeben sich nach den Gleichungen (7a) und (8a):

$$a_1 = \frac{8{,}3 - 7{,}22\,R}{-7{,}8} \qquad (7\,b)$$

$$a_2 = \frac{2 - 19{,}3\,R}{-7{,}8}, \qquad (8\,b)$$

ferner nach Formel (9): $\mu_1 = 12{,}4$ und nach Formel (15): $\mu_2 = 4{,}63$.

Es interessieren dann die Widerstände R, welche sich aus den auf Seite 102 und 103 entwickelten Beziehungen zwischen a_1 und a_2 ergeben.

$\frac{a_1^2}{4} = a_2$ ergibt als Wurzeln einer quadratischen Gleichung die beiden Werte:

$$R_1 = 13{,}7\ \Omega$$
$$R_2 = 0{,}175\ \Omega.$$

$a_1 = 0$ ergibt:

$$R_0 = 1{,}15\ \Omega.$$

Bei den Versuchen wurden bei einer gewissen Stellung des Regulators R der Verlauf von E, i_a, i_n und i_r mittels des Oszillographen aufgenommen. Die Oszillogramme sind in den Bildern 5—7 abgebildet. Da die Pendelungen ziemlich langsam

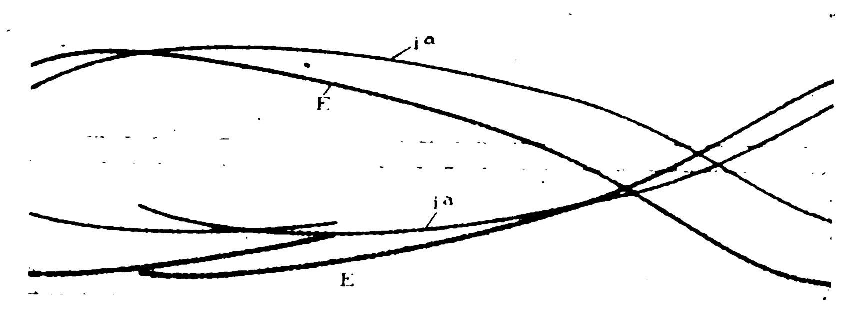


Bild 5.

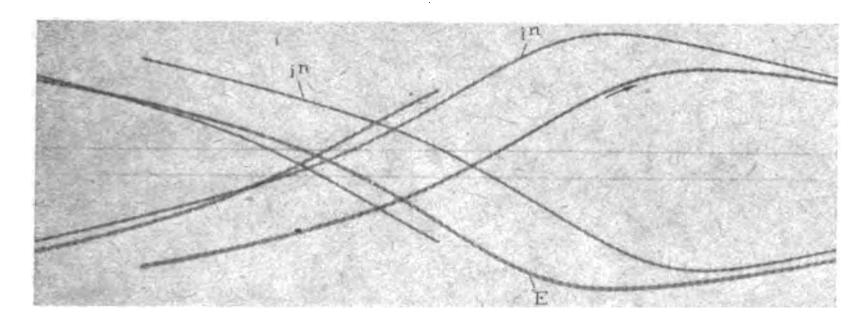


Bild 6.

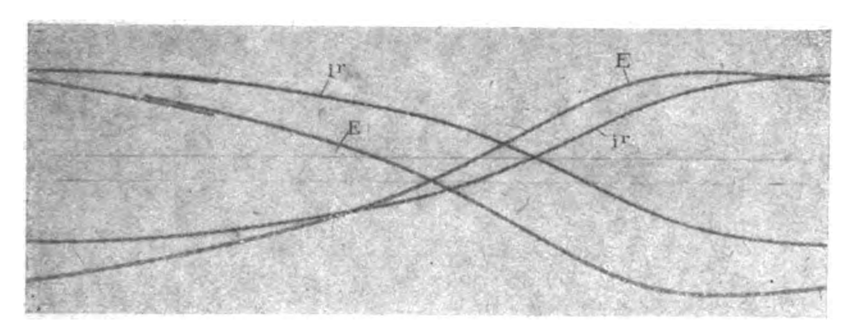


Bild 7.

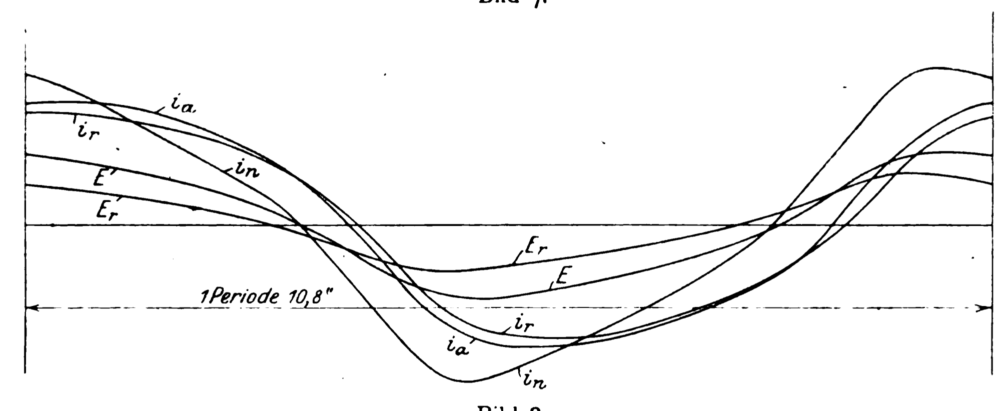


Bild 8.

Maximalwerte:

$E = 90,5$ Volt
$E_r = 60$ „
$i_a = 61,3$ Amp.
$i_r = 56$ „
$i_n = 3,25$ „

vor sich gingen und die Drehzahl der Papiertrommel des Oszillographen nicht niedriger eingestellt werden konnte, machte die Trommel während 1 Pendelung ungefähr 2 Umdrehungen, das lichtempfindliche Papier wurde also bei 1 Pendelung zweimal beschrieben. Die einzelnen Kurven wurden der besseren Übersicht wegen nochmals herausgezeichnet (Bild 8), und darin auch die berechnete Rotorspannung E_r eingetragen.

Die Periodendauer τ betrug dabei ca. 10,8″, die Periodenzahl pro Sekunde also 0,093. Es ist dabei

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} = 10{,}8''.$$

Aus dieser Bedingung, wieder einer quadratischen Gleichung, ergeben sich die beiden Werte:

$$R_3 = 13{,}1\ \Omega \text{ und } R_4 = 0{,}30\ \Omega,$$

während bei der Aufnahme der Oszillogramme Bild 8 ein R_4 von etwa 0,5 Ω vorhanden war.

Für die Widerstandswerte

1. $R_5 = 0$ (normale Nebenschlußschaltung)
2. $R_2 = 0{,}175\ \Omega$
3. $R_4 = 0{,}30\ \Omega$
4. $R_6 = 0{,}93\ \Omega$
5. $R_0 = 1{,}15\ \Omega$
6. $R_7 = 1{,}36\ \Omega$
7. $R_3 = 13{,}1\ \Omega$
8. $R_1 = 13{,}7\ \Omega$

werde nun der Verlauf des Stromes i_a, welcher, wie sich ergeben hat, am kürzesten zu ermitteln ist, berechnet und die erhaltenen Kurven dargestellt.

1. $R_5 = 0$.

$$a_1 = -1{,}06;\quad \frac{a_1^2}{4} = 0{,}28;\quad a_2 = -0{,}256;\quad \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = 0{,}732.$$

$$\lambda_1 = 1{,}262;\quad \lambda_2 = -0{,}202.$$

$$c_0 = 9{,}8;\quad c_0' = 38{,}6;\quad \frac{\mu_1}{a_2} = -48{,}4.$$

$$\mathbf{i_a = 9{,}8\, e^{1{,}262\,t} + 38{,}6\, e^{-0{,}202\,t} - 48{,}4.}$$

$t =$	0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,5	∞	Abb. 9 Kurve I
$i_a + 48{,}4 =$	48,4	66,1	95,4	151,4	254,3	844	∞	bei $R_5 = 0$.

Da $\frac{a_1^2}{4} > a_2$, also aperiodischer Verlauf.

2. $R_2 = 0{,}175\ \Omega$.

$$a_1 = -0{,}9;\quad a_2 = 0{,}177;\quad \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = 0.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}45.$$

$$\mathbf{i_a = e^{0{,}45\,t}(-70 + 4{,}63\,t) + 70.}$$

$t =$	0	2	4	15,1	16,0	∞	$-\infty$
$i_a - 70 =$	-70	-150	-302	0	sehr groß	∞	0

Diese Kurve für i_a hat ein Maximum für $\frac{di_a}{dt} = 0$, also für $1 - \frac{a_1}{2}t = 0$, d. h.

$t = \frac{2}{a_1} = -2{,}2''$. Dieses Maximum beträgt $i_a = 39{,}8$ Amp. Für größer werdende negative Zeiten nähert sich die Kurve für i_a asymptotisch der Nullachse. Der Strom vollführte also von $t = -\infty$ bis $t = 0$ eine Schwingung mit der Amplitude 39,8; er macht in der Zeit $t = 0$ bis $t = 15{,}1''$ eine 2. Halbschwingung mit der Amplitude $e^{6{,}8}$ und erreicht dann in einer 3. Halbschwingung in dem Zeitraum $t = 15{,}1''$ und $t = +\infty$ den Wert $+\infty$. Physikalisch hat die in negativen Zeiten verlaufende Schwingung keinen Sinn. Doch entspricht diesem Verlauf der Umstand, daß die Kurve den Übergang bildet vom aperiodischen Verlauf $\left(\frac{a_1^2}{4} > a_2\right)$ zum periodischen Verlauf $\left(\frac{a_1^2}{4} < a_2\right)$.

3. $\mathbf{R_4 = 0{,}30\ \Omega}$.

$a_1 = -0{,}785$; $a_2 = 0{,}487$; $\frac{a_1^2}{4} < a_2$, also bereits periodischer Verlauf und zwar mit zunehmenden Amplituden, da a_1 negativ (vgl. S. 103).

$\beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = 0{,}58$ in Bogenmaß; in Gradmaß $\beta = 0{,}58 \cdot \frac{180}{\pi} = 33{,}3^0$.

Periodenzahl 0,093.

$c' = -25{,}4,$

$c'' = +25{,}3.$

$$i_a = e^{0{,}392\,t}\,(25{,}3 \sin 33{,}3\,t - 25{,}4 \cos 33{,}3\,t) + 25{,}4.$$

$t =$	0	2,7	5,4	8,1	10,8
$33{,}3\,t =$	0°	90°	180°	270°	360°
$i_a - 25{,}4 =$	− 25,4	+ 72,5	+ 214	− 610	− 1770

$(i_a - 25{,}4) = 0$ für $\operatorname{tg} 33{,}3\,t = \frac{25{,}4}{25{,}3} = \sim 1$; $t = 1{,}35''$; Halbperiode $\frac{\tau}{2} = \frac{180}{33{,}3} = 5{,}4''$.

4. $\mathbf{R_6 = 0{,}93\ \Omega}$.

$a_1 = -0{,}2$; $a_2 = 2{,}05$; $\beta = 1{,}43$ bzw. 82^0; Periodenzahl 0,23.

$c' = -6{,}04$; $c'' = 3{,}66$; $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{1{,}43} = 2{,}2''$.

Ebenfalls Schwingung mit zunehmenden Amplituden; ihre Zunahme erfolgt aber langsamer als bei der vorhergehenden Kurve, da jetzt a_1 absolut kleiner ist als vorher (0,2 gegen 0,785).

$$i_a = e^{0{,}1\,t}\,(3{,}66 \sin 82\,t - 6{,}04 \cos 82\,t) + 6{,}04.$$

$t =$	0	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8
$\beta t =$	0	90	180	270	360	90	180	270	360
$i_a - 6{,}04 =$	− 6,04	+ 4,08	+ 7,5	− 5,06	− 9,35	+ 6,36	+ 11,7	− 7,95	− 14,5

$t =$	9,9	11	12,1	13,2	14,3	15,4	16,5	17,6	18,7
$\beta t =$	90	180	270	360	90	180	270	360	90
$i_a - 6{,}04 =$	+ 9,9	+ 18	− 12,2	− 22,3	+ 15,2	+ 28	− 18,8	− 34,5	+ 23,6

$(i_a - 6{,}04) = 0$ für $t = 0{,}715''$.

5. $R_0 = 1{,}15\ \Omega$.

$a_1 = 0$; $a_2 = 2{,}58$; $\beta = \sqrt{a_2} = 1{,}61$ bzw. $92{,}2^0$; Periodenzahl 0,26.

$c' = -4{,}8$; $c'' = 2{,}87$; $\frac{\mu_1}{a_2} = 4{,}8$; $\frac{\tau}{2} = 1{,}95''$.

Da $a_1 = 0$, haben wir Schwingungen mit konstanten Amplituden; der Verlauf des Stromes $(i_a - 4{,}8)$ ist der eines stationären Wechselstromes.

$$i_a = -4{,}8 \cos 92{,}2\, t + 2{,}87 \sin 92{,}2\, t + 4{,}8.$$

$(i_a - 4{,}8) = 0$ für $t = 0{,}64''$.

$= {}_{max}$ für $t = 0{,}64 + \frac{1{,}95}{2} = 1{,}615''$.

$(i_a - 4{,}8)_{max} = 5{,}6$ Amp.; $i_{a\,max} = 10{,}4$ Amp.

6. $R_7 = 1{,}36\ \Omega$.

$a_1 = +0{,}2$; $a_2 = 3{,}12$; $\beta = 1{,}765$ bzw. 101^0; Periodenzahl 0,28.

$c' = -4{,}0$; $c'' = 2{,}4$; $\frac{\mu_1}{a_2} = 4{,}0$; $\frac{\tau}{2} = 1{,}78''$.

Da a_1 positiv, erhalten wir Schwingungen mit abnehmenden Amplituden.

$$i_a = e^{-0{,}1\,t}(2{,}4 \sin 101\, t - 4{,}0 \cos 101\, t) + 4{,}0.$$

$t =$	0	0,89	1,78	2,67	3,56	4,45	5,34	6,23	7,12
$\beta t =$	0	90	180	270	360	90	180	270	360
$i_a - 4{,}0 =$	− 4,0	+ 2,2	+ 3,37	− 1,84	− 2,8	+ 1,54	+ 2,35	− 1,28	− 1,95

$t =$	8,02	8,9	9,8	11,7
$\beta t =$	90	180	270	360
$i_a - 4{,}0 =$	+ 1,08	+ 1,64	− 0,9	1,21

$(i_a - 4{,}0) = 0$ für $t = 0{,}584''$.

7. $R_3 = 13{,}1\ \Omega$.

$a_1 = 11{,}25$; $a_2 = 32$; $\beta = 0{,}58$ bzw. $33{,}3^0$; Periodenzahl 0,093.

$c' = -0{,}39$; $c'' = 4{,}22$; $\frac{\mu_1}{a_2} = 0{,}39$; $\frac{\tau}{2} = 5{,}4''$.

Diese Schwingungen haben dieselbe Periodendauer wie die bei $R_4 = 0{,}30\ \Omega$ (Fall 3). Da aber hier $a_1 = +11{,}25$ (gegen $a_1 = -0{,}785$), nehmen die Schwingungen sehr rasch ab (da a_1 groß ist), während sie für $a_1 = -0{,}785$ langsamer zunehmen. Der Strom nimmt also praktisch bereits nach einer Schwingung seinen stationären Endwert an. Die Maschine erregt sich nicht; der stationäre Strom ist ein von der konstanten Remanenzspannung herrührender Gleichstrom.

$$i_a = e^{-5{,}6\,t}(4{,}22 \sin 33{,}3\, t - 0{,}39 \cos 33{,}3\, t) + 0{,}39.$$

$t =$	0	2,7	5,4	0,5
$\beta t =$	0	90	180	16,7
$i_a - 0{,}39 =$	− 0,39	0	0	0,05

$(i_a - 0{,}39) = 0$ für $t = 0{,}157''$.



8. $R_1 = 13{,}7\ \Omega$.

$a_1 = 11{,}6$; $a_2 = 33{,}75$; $\beta = 0$; also Kurve wie Fall 2.
$\lambda = -5{,}8$; $c = -0{,}366$; $c' = 4{,}63$.

$$i_a = e^{-5{,}8\,t}(-0{,}366 + 4{,}63\,t) + 0{,}366.$$

t =	0	0,079	0,1	0,2	1,0	∞
$i_a - 0{,}366 =$	$-0{,}366$	0	$+0{,}0545$	$+0{,}177$	0,013	0

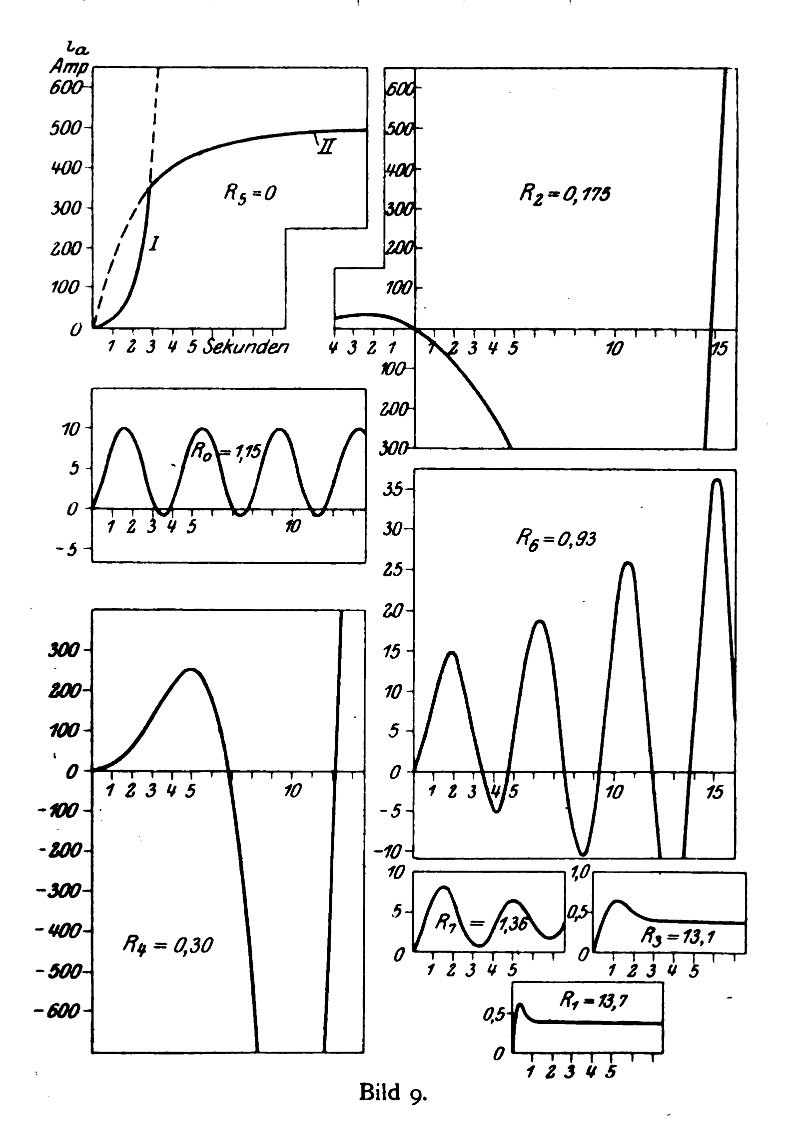


Bild 9.

Auch diese Schwingung entspricht dem Übergang vom aperiodischen Verlauf wie die Kurve für $R_2 = 0{,}175\ \Omega$. Während dort die eine große Schwingung auftrat, nähert sich hier der Strom wie im vorhergehenden Falle sehr rasch seinem Grenzwert $i_a = 0{,}366$ Amp., aber nicht mit Schwingungen, sondern jetzt asymptotisch. Der ebenfalls nach unendlich langer Zeit erreichte Grenzwert ist wieder ein von der konstanten Remanenzspannung herrührender Gleichstrom, der wegen des etwas größeren Vorschaltwiderstandes $R_1 = 13{,}7\ \Omega$ (gegen $R_3 = 13{,}1\ \Omega$) etwas kleiner ist, und zwar 0,366 Amp. gegen 0,39 Amp.

Die den Widerstandswerten R_0 bis R_7 zugehörigen Stromkurven sind in Bild 9 dargestellt.

Beim Vergleich der Oszillogramme Bild 8 und der Stromkurve für R_0 (beide die stationären Wechselströme darstellend) fällt auf, daß die absoluten Werte schlecht übereinstimmen. Der gemessene Maximalwert des Stromes i_a ist größer als der errechnete. Außerdem schwingt der Strom beim Versuch symmetrisch um die Nullinie, während der errechnete Strom symmetrisch um einen Wert von 4,8 Amp. schwingt.

Dieser Unterschied hat seine Ursache darin, daß ich eine konstante Remanenzspannung angenommen habe, während bei der oszillographischen Aufnahme entsprechend der Wechselstrommagnetisierung eine dem Vorzeichen nach wechselnde Remanenzspannung vorhanden gewesen sein muß.

Nun kann ich aber, wie Seite 100 erläutert wurde, in den Formeln die Remanenzspannung nicht einfach gleich Null setzen, da damit die ganze Funktion verschwindet. Um die Rechnung für eine remanenzlose Maschine durchzuführen, muß ich also andere Anfangsbedingungen auswählen. Oder, physikalisch gesprochen, ich muß das System auf eine andere Art auf Spannung bringen. Ich denke mir zu diesem Zweck zur Zeit $t = 0$ die Schalter offen und die Erregermaschine mit einem Strom i_{n0}, welcher bei der Drehzahl n die Spannung E' liefert, fremd erregt. Zur Zeit $t = 0$ schließe ich nun die beiden Schalter S_1 und S_2, und zwar soll dabei mittels S_2 die Maschine auf Selbsterregung umgeschaltet werden. Fremderregung ist erforderlich, da die Maschine bei der gewählten geraden Charakteristik sich nicht auf einen stabilen Punkt einstellen kann.

Für $\Phi_0 = 0$ ist $E_0 = 0$ und $\mu_1 = 0$. Die Differentialgleichung (6a) lautet dann:

$$\frac{d^2 i_a}{dt^2} + a_1 \frac{d i_a}{dt} + a_2 i_a = 0 \qquad (6b)$$

und die Lösung ist:

$$i_a = c_0 e^{\lambda_1 t} + c'_0 e^{\lambda_2 t}. \qquad (101a)$$

Aus ihr ist der konstante Summand $\frac{\mu_1}{a_2}$ verschwunden, d. h. der Strom i_a und damit alle anderen Werte schwingen um die Nullinie. Die Konstanten c_0 und c_0' müßten dann aus den Anfangsbedingungen

$$t = 0 : i_a = i_r = 0; \; i_n = i_{no}$$

ermittelt werden, was ich aber hier nicht weiter verfolge.

6. Berücksichtigung der Krümmung der Magnetisierungscharakteristik.

Bei einigen der so erhaltenen Kurven nehmen die Ströme unendlich große Werte an. Das war zu erwarten, da wir eine gerade Magnetisierungscharakteristik zugrunde gelegt hatten.

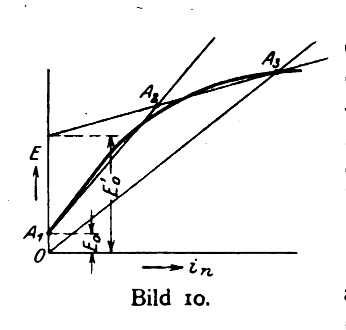


Bild 10.

Diese Gerade ($A_1 A_2$ in Bild 10) schneidet nämlich die sogenannte „Widerstandsgerade" $O A_3$, welche z. B. dem Fall $R_5 = 0$ (Bild 9) entspricht, im positiven Bereich der Spannungen überhaupt nicht. Man erhält also keinen stationären Grenzwert der Spannung. Da die Differenz der Ordinaten der Charakteristikgeraden A_1 A_2 und der Widerstandsgeraden $O A_3$, welche für den Spannungsanstieg maßgebend ist, bei wachsender Magnetisierung immerfort größer wird, erfolgt vielmehr der Spannungsanstieg immerfort rascher, d. h. die Kurve der Spannung (und damit auch die des Stromes i_a) muß immer steiler werden. Das ist auch aus Bild 9 zu ersehen. Bei gekrümmter Charakteristik wird diese Ordinatendifferenz von einem gewissen Punkt an (bei dem die Tangente

parallel zur Widerstandsgeraden liegt) immer kleiner (siehe Bild 10), bis beim Schnittpunkt A_3 die Differenz gleich Null ist, so daß eine Ursache für weiteren Spannungsanstieg nicht vorhanden ist.

Die analytische Behandlung der gekrümmten Charakteristik ist aber, wie bereits Seite 97 erwähnt, zum mindesten sehr umständlich. Ich ersetze deshalb die gekrümmte Charakteristik durch den aus den beiden Geraden $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ gebildeten Linienzug[1]). Hat die mit Hilfe der Charakteristik $A_1 A_2$ errechnete Spannung den Wert für A_2 erreicht, so muß die weitere Berechnung mit Hilfe der Geraden $A_2 A_3$ erfolgen. Man kann durch Vermehrung der gewählten Geraden die Annäherung des gebrochenen Linienzuges an die Kurve beliebig weit treiben. Jeder dieser Geraden entspricht dann eine andere „Remanenzspannung" E_0, E_0' und ein anderer Faktor $k \cdot c = N$ der Gleichung der Charakteristik (3a) und (4). Der Schnittpunkt A_3 der in Bild 10 zuletzt gewählten Geraden $A_2 A_3$ mit der Widerstandsgeraden liefert dann den durch Rechnung sich ergebenden stationären Wert der Spannung.

Für alle Kurven, für welche der Spannungswert A_2 nicht überschritten wird, ist die Lösung mit Hilfe der zuerst angenommenen Geraden $A_1 A_2$ einwandfrei.

Ich ermittle nun z. B. den Stromverlauf für den 1. Fall, für $R_5 = 0$ und die Gerade $A_2 A_3$. Diese habe die Gleichung:

$$135 = 77 + k \cdot c_n \cdot 7.$$

Daraus:

$$k \cdot c_n = 8{,}3; \quad c_n = 4{,}06 \cdot 10^{-4}.$$

Damit ist auch die Änderung des Selbstinduktionskoeffizienten L_n mit der Sättigung berücksichtigt. Es ergibt sich:

$$L_n = 1{,}86 \text{ Henry.}$$

Ebenso aus der neuen Charakteristik der Drehstrommaschine:

$$2150 = 1000 + k \cdot c_n \cdot 120$$

$$k \cdot c_n = 8{,}3; \quad L_r = 0{,}635 \text{ Henry.}$$

$$a_1 = \frac{-7{,}3 - 2{,}5\,R}{-1{,}18} = 6{,}2$$

$$a_2 = \frac{-3 - 19{,}27\,R}{-1{,}18} = 2{,}54$$

$$\mu_1 = 1260; \quad \frac{\mu_1}{a_2} = 495$$

$$\mu_2 = 163$$

$$\lambda_1 = -0{,}44; \quad \lambda_2 = -5{,}76$$

$$c_0 = -505; \quad c_0' = 9{,}2.$$

$$\mathbf{i_a' = -505\,e^{-0{,}44\,t} + 9{,}2\,e^{-5{,}76\,t} + 495.}$$

$t =$	0	0,5	1,0	2	4	7	10	∞
$i_a' =$	0	88	168	288	407	472	489	495

Diese Kurve ist ebenfalls in Bild 9 eingetragen (Kurve II bei $R_5 = 0$). Ihr Schnittpunkt mit der Kurve I entspricht dem Schnittpunkt A_2, so daß für den tatsächlichen Stromverlauf der ausgezogen gezeichnete Kurvenzug sich ergibt. Man erhält als stationären Wert des Stromes $i_a = 495$ Amp.

Von einer Aufstellung der Kurven für die anderen Werte von R sehe ich ab, da diese immer nach dem oben erläuterten Verfahren leicht bewerkstelligt werden kann.

---

[1]) Nach einem Vorschlag von Rogowski in: „Einschaltstromstoß und Vorkontaktwiderstand beim Transformator". Archiv für Elektrotechnik, I. Band, Seite 347.

Anmerkung.

In den Abhandlungen von Rüdenberg[1]) und Simons[2]) über „Elektrische Eigenschwingungen in Dynamomaschinen" werden allgemein stationäre Schwingungserscheinungen zwischen 2 Stromkreisen behandelt, welche durch ruhende, transformatorische Induktion und durch rotatorische Induktion gekoppelt sind. Im vorliegenden Falle handelt es sich um Schwingungen zwischen dem Rotorstromkreis $E - R - r_r$ (Bild 3) und dem Erregerstromkreis $E - R - r_n$. Diese beiden Stromkreise sind gekoppelt:

1. Bei neutraler Bürstenstellung durch ruhende Induktion infolge der gegenseitigen Einwirkung der Nebenschlußwicklung und der Kompoundwicklung der Erregermaschine; bei nicht neutraler Bürstenstellung auch noch durch gegenseitige Einwirkung der Ankergegenwindungen und der Nebenschlußwicklung.

2. Durch rotatorische Induktion infolge der Erzeugung von Spannung E im Gleichstromanker abhängig vom Erregerstrom i_n.

3. Durch galvanische Kopplung, da die beiden Stromkreise den Erregeranker und den Regler R gemeinsam haben.

Die Bedingung für das Auftreten stationärer Schwingungen bei Vorhandensein der drei Kopplungen ist dadurch gegeben, daß man den Zähler des Ausdrucks für a_1 in Gleichung (7a) gleich Null setzt. Fehlt die Kompoundwicklung und ist neutrale Bürstenstellung vorhanden, so fehlt die 1. Kopplung durch ruhende Induktion. Die Bedingung für stationäre Schwingungen ist dann gegeben durch Gleichung (34).

[1]) Archiv Bd. 1. S. 34.
[2]) Archiv Bd. 1. S. 325.

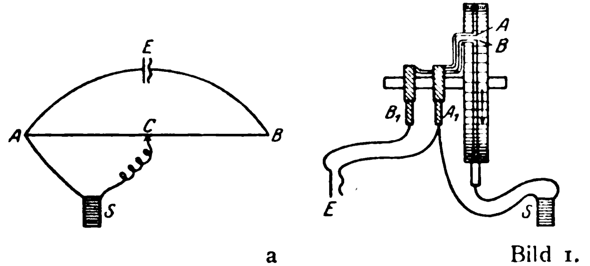
Neue Vorschläge zur Verbesserung des Kathodenstrahl-Oszillographen.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

1. Geschichtliche Übersicht und Ziel. Seit Braun die nach ihm benannte Röhre angegeben hat, ist vielfach versucht worden, aus ihr einen brauchbaren Oszillographen zu machen. Bei einem solchen muß der die Welle schreibende Lichtfleck in einer Richtung mit gleichmäßiger Geschwindigkeit über die Schreibfläche verschoben werden. Wird er dann in der dazu senkrechten Richtung von einer beliebigen Welle abgelenkt, so erhält man ein zeitgetreues Bild der Welle. Es ist nicht notwendig, daß der Lichtfleck selbst beide Bewegungen ausführt. So kann z. B. der gleichmäßige Vorschub auch dadurch erreicht werden, daß der Lichtfleck stillsteht, aber die Schreibfläche unter ihm hinwegwandert. Dies geschieht ja bei dem Siemens-Blondelschen Oszillographen. Es ist versucht worden, den



Strom

Zeit

a — Bild 1. — b

Verfahren von Zenneck. Links Schaltbild, rechts konstruktive Ausbildung. Stromkurve beim Zenneckschen Verfahren.

gleichen Kunstgriff bei der Braunschen Röhre anzuwenden. Man bleibt dann aber bei der Niederschrift langsam veränderlicher Vorgänge haften und muß auf die Aufnahme rasch veränderlicher Vorgänge verzichten, die doch gerade die Domäne der Kathodenstrahlröhre bilden[1]). Man hat daher bereits frühzeitig auf rein elektromagnetische Mittel gesonnen, die den Lichtfleck der Braunschen Röhre gleichmäßig verschieben sollen. Ein von Zenneck[2]) angegebenes Verfahren wird durch Bild 1a veranschaulicht. Durch Verschieben eines Schleifkontaktes über einen Draht wird in einer Spule S ein mit der Zeit periodisch ansteigender, dann plötzlich auf Null abfallender Strom hervorgerufen (Bild 1b). Es ist kein rein elektromagnetisches Verfahren und kommt, so sinnreich es auch ist, ebenfalls nur für langsam veränderliche Vorgänge in Betracht.

Später hat Roschansky[3]) einen recht bemerkenswerten Vorschlag gemacht (Bild 2)[4]). Roschansky wollte den Funkenwiderstand bei raschen Schwingungen untersuchen. Er lud zu dem Zweck zwei Kreise auf, den stark ausgezogenen, den eigentlichen Schwingungskreis, und den schwach ausgezogenen, den Hilfskreis, der große Widerstände enthielt und bei dem die Entladung des Kondensators C_2 aperiodisch erfolgte. Die schwingende wie nichtschwingende Entladung wurden in

[1]) Vgl. F. C. Kock, Phys. Zeitschrift 1914. S. 840.
[2]) Vgl. Zenneck, Wied. Ann. d. Phys. 69. 1899. S. 838.
[3]) Roschansky, Phys. Zeitschrift 1908. S. 627.
[4]) Ich verweise auch auf die Arbeit von Mandelstam, Jahrb. d. drahtlosen Telegraphie I, S. 124, wo ein ähnlicher Kunstgriff beschrieben wird.

demselben Augenblick beim Ansprechen der Funkenstrecke ausgelöst. Der Entladestrom im Hilfskreis steigt dann sehr rasch auf den maximalen Wert an und fällt dann nach einem Exponentialgesetz ab. Der Fleck der Braunschen Röhre B wird somit zuerst plötzlich aus der Ruhelage in seine Endlage abgelenkt und geht von dort erst proportional der Zeit, dann allerdings immer langsamer in seine Ruhelage zurück. Roschansky hat mit dieser Art der Anregung Wellen bis zu 100 m Wellenlänge herunter zu untersuchen vermocht. Indessen kann auch seine Methode aus naheliegenden Gründen nicht als genügend vollkommen und allgemein anwendbar für praktische Fälle angesehen werden.

Bei einem dritten Wege wird der Fleck nicht gleichmäßig, sondern durch eine Hilfsfrequenz sinusförmig hin- und herbewegt[1]). Ist die Hilfsfrequenz wesentlich kleiner als die Frequenz der zu untersuchenden Schwingung und kann man sich bei ihr auf reine Sinusform verlassen, so ist dieser Weg gangbar. Doch glaube ich, daß eine genügend reine Sinusform nicht immer leicht beschafft werden kann, und schließlich wird bestenfalls nur etwa das mittlere Drittel einer so erhaltenen Lissajouschen Figur unverzerrt das gewünschte Bild ergeben.

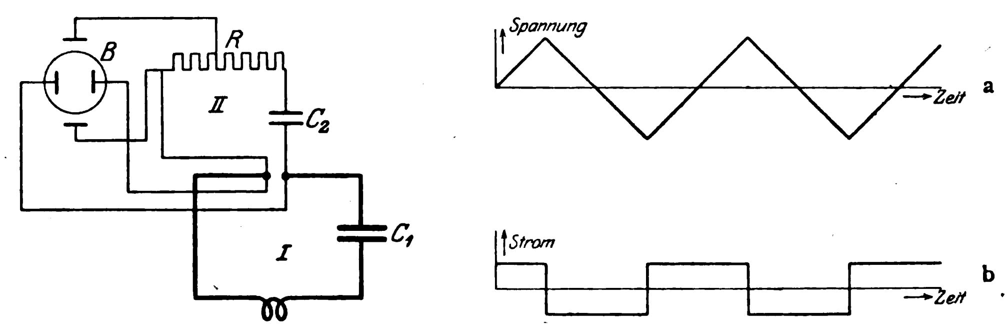


Bild 2. Verfahren von Roschansky. Bild 3. Dreieckförmige Spannungskurve eines Kondensators und zugehöriger rechteckförmiger Strom.

Im folgenden sollen nun Vorschläge beschrieben werden, die sowohl bei tiefen wie bei hohen Frequenzen ein gleichmäßiges Hin- und Herwandern des Fluoreszenzfleckes ergeben und m. E. berufen sein dürften, der Kathodenstrahlröhre als Oszillographen den Weg zu ebnen[2]).

2. Erster Vorschlag. Der Kathodenstrahl soll mit gleichmäßiger Geschwindigkeit hin- und herwandern. Dann müssen wir ihn durch ein elektrisches Wechselfeld schicken, dessen Kurvenform genau dreieckförmig ist (Bild 3, Kurve a). Entnehmen wir diese Spannung den Klemmen eines Kondensators, so muß dieser mit konstantem Strom geladen und mit konstantem Strom entladen werden (Bild 3, Kurve b). Solche konstanten Ströme lassen sich leicht durch die Sättigungsströme von Elektronenröhren herstellen, die man mit Spannungen betreibt, die oberhalb ihrer Sättigungsspannung liegen. So kommen wir zu dem folgenden Gedanken: Man lade und entlade einen Kondensator über Elektronenröhren mit Wechselspannungen, die groß gegen die Sättigungsspannungen sind. Alsdann wird die Spannung des Kondensators gleichmäßig steigen und gleichmäßig fallen. Hierauf beruht die Schaltung Bild 4. K ist der Kondensator, dessen Spannung dreieckförmig werden soll. Ihm vorgeschaltet sind zwei Elektronenröhren in Parallelschaltung. Die Durchlässigkeitsrichtungen beider sind entgegengesetzt. Über die eine geht dann nur Lade-, über die andere nur Entladestrom. Bei AB befindet sich die Wechselstromquelle.

Es sei mit Hilfe des gemachten Vorschlages eine Spannung von der Frequenz f mit einer Braunschen Röhre zu untersuchen. Wir wollen ferner die Forderung

[1]) Zenneck, a. a. O.
[2]) Nach Patentanmeldungen des Verfassers.

stellen, auf den Fluoreszenzschirm sollen zwei volle Perioden dieser Spannung für einen Hingang des Fleckes sichtbar sein. Wir werden dann den Kondensator K (Bild 4) mit der Hilfsfrequenz f/4 betreiben müssen. Wir sehen somit, daß unser Vorschlag eine beliebig einstellbare Hilfsfrequenz erforderlich macht, die jedoch wesentlich tiefer als die Frequenz der aufzunehmenden Schwingung liegen kann. Das Entsprechende finden wir ja auch beim Siemens-Blondelschen Oszillographen vor, bei dem durch einen Gleichstrommotor die Zahl der für einen Umlauf der Trommel zu Gesicht kommenden Perioden der zu untersuchenden Schwingung beliebig eingeregelt werden kann.

3. Erforderliche Ventilröhren. Zu welchen Röhren und Kondensatoren führt unser Vorschlag? Diese Frage läßt sich nur in Beziehung zur benutzten Braunschen Röhre beantworten. Nehmen wir an, wir hätten eine recht unempfindliche Röhre, die bei 500 Volt einen Ausschlag von 1 cm ergibt. Es sei Wechselstrom von der Frequenz 50 Per/sec aufzunehmen und unser Kondensator K (Bild 4) habe eine Kapazität von 10000 cm. Halten wir wieder an der Forderung fest, es sollen zwei volle Perioden beim Hingang des Fleckes sichtbar sein, so beträgt die Hilfsfrequenz 12,5 Per/sec. Für die Ladung steht dann eine Zeit von $^1/_{25}$ sec zur Verfügung. In dieser Zeit muß der Kondensator auf 500 Volt geladen sein, also eine Elektrizitätsmenge von $500 \cdot 10^4 \frac{10^{-11}}{9} = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ Coulomb aufgenommen haben. Der Sättigungsstrom der Elektronenröhre muß daher $5{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 25 = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ Ampere betragen. Er läßt sich also ganz gut mit einer gewöhnlichen, ganz schwach geheizten Verstärkerröhre erreichen.

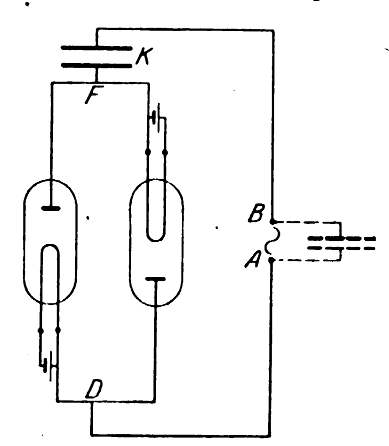


Bild 4. Erster Vorschlag. Schaltung zur Erzielung der Kurven Bild 3. Ein Kondensator wird über Elektronenröhren geladen und entladen.

Ist allgemein Z die Zahl der für einen Hingang sichtbaren Perioden, J_s der Sättigungsstrom in Ampere, C die Kapazität in cm, V die gewünschte Spannung, f die Frequenz der zu untersuchenden Schwingung, so hat man zu schreiben:

$$J_s = \frac{C \cdot V \cdot f \cdot 10^{-11}}{Z \cdot 9} \text{ Ampere.}$$

Die folgenden Zahlenwerte dürften wohl nicht leicht unterschritten werden können:

$$C = 50\,\text{cm}; \quad V = 50 \text{ Volt}; \quad Z = 10.$$

In diesem Falle ist:

$$J_s = \frac{50 \cdot 50 \cdot f \cdot 10^{-12}}{9} = 2{,}8 \cdot f \cdot 10^{-10} \text{ Ampere.}$$

Bei $f = 10^7$ würden wir so $2{,}8 \; 10^{-3}$ Ampere erhalten. Unser Vorschlag führt daher im Bereich aller praktisch vorkommenden Frequenzen zu kleinen oder doch mäßig großen Ventilröhren.

Damit sich der Sättigungsstrom sofort einstellen kann, wenn die Spannung der Wechselstromquelle die Sättigungsspannung der Ventilröhren übertrifft, müssen Stromänderungen im Kreise D A B K F (Bild 4) rasch gegen die Schwingungsdauer der Hilfsschwingung vor sich gehen können. Bei hohen Frequenzen kann dies Schwierigkeiten machen, da der Wechselstromquelle (Maschine, Transformator) immer ein gewisser Widerstand und eine gewisse Induktivität zukommt. Man kann diese Schwierigkeit aber überwinden, wenn man zu der Wechselstromquelle einen Kondensator genügender Größe parallel schaltet (gestrichelt in Bild 4 gezeichnet). Dann wird der Kondensator die Rolle der Wechselstromquelle übernehmen. Wird er ge-

nügend groß gewählt, so muß für die Geschwindigkeit der Stromänderung nur noch Widerstand und Induktivität der Zuleitungen KB, DA maßgebend sein und nicht mehr Widerstand und Induktivität der Wechselstromquelle bei AB.

4. Empfindlichkeit eines Kathodenstrahl- und eines Siemens-Blondelschen Oszillographen. Es braucht nicht besonders hervorgehoben werden, daß sich die Kathodenstrahlröhre zur Aufnahme hoher Ströme, hoher Spannungen und hoher Frequenzen besser eignet wie der Siemens-Blondelsche Oszillograph. Es ist wert zu prüfen, ob sie auch für schwache Ströme und niedrige Spannungen in Wettbewerb mit ihm treten kann. Die gewöhnlichen Oszillographenschleifen ergeben bei $^1/_{10}$ Ampere und $^1/_{10}$ Volt einen Ausschlag von rund 3 cm.

In seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit teilt Zenneck mit, daß er bei einem Strome von 0,03 Ampere bei seiner Braunschen Röhre einen Ausschlag erhielt, der den Fleck über den Schirm hinauswarf. Zenneck erreichte somit bereits größere Stromempfindlichkeit, als sie der gewöhnliche Oszillograph hergibt. Dabei wurde seine Röhre mit einer Influenzmaschine betrieben und muß daher als recht unempfindlich bezeichnet werden. Auch eine einfache Überschlagsrechnung zeigt, daß sich bei der Braunschen Röhre mindestens die gleiche Stromempfindlichkeit erzielen läßt wie beim gewöhnlichen Oszillographen.

Kommt ein Elektron von der Geschwindigkeit v in ein senkrecht zu v gerichtetes Magnetfeld H, so wird es kreisförmig abgebogen und der Krümmungsradius R seiner Bahn ist nach der Beziehung[1])

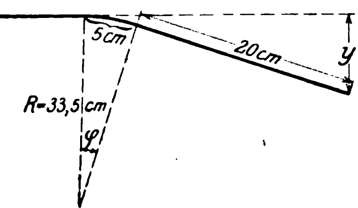


Bild 5. Ablenkung eines Elektrons durch ein Magnetfeld. Das Magnetfeld durchsetzt die Zeichenebene senkrecht.

Bild 6. Ablenkung eines Elektrons durch ein elektrisches Feld. Das elektrische Feld liegt in der Zeichenebene

$$R = \frac{v}{H \cdot \frac{e}{m}}$$

zu berechnen (e = Ladung; m = Masse des Elektrons). In elektromagnetischen Einheiten ist $\frac{e}{m} = 1{,}76_5 \cdot 10^7$. Somit

$$R = \frac{v \cdot 10^{-7}}{H \cdot 1{,}76_5}.$$

Durchläuft ein Elektron frei fallend die Spannung von einem Volt, so erreicht es die Geschwindigkeit $5{,}95 \cdot 10^2$ km/sec. Durchfällt es die Spannung von 100 Volt, so wächst seine Geschwindigkeit auf $5{,}95 \cdot 10^3$ km/sec $= 5{,}95 \cdot 10^8$ cm/sec.

In Röhren mit Wehneltscher Kathode oder mit Glühkathoden würden Elektronen von solcher Geschwindigkeit zu erzielen sein und solche Röhren seien unserer Rechnung zu Grunde gelegt. Bei ihnen ist:

$$R = \frac{5{,}95 \cdot 10^8 \cdot 10^{-7}}{H \cdot 1{,}76_5} = \frac{33{,}5}{H}.$$

Mit einem Strome von $^1/_{10}$ Ampere stellen wir bequem im Innern der Röhre eine Feldstärke von H = 1 Gauß her. Dazu brauchen wir rund 10 Windungen pro cm. Auch höhere Feldstärken würden keine Schwierigkeiten bereiten. Bleiben wir bei

[1]) Müller, Pouillet Band III, 1. W. Kaufmann, Elektrizität und Magnetismus S. 1039.

H = 1, so erhalten wir R = 33,5 cm. Es sei weiter angenommen, das magnetische Feld habe eine Ausdehnung von 5 cm und nach Durchqueren dieses Feldes fliege das Elektron frei noch 20 cm. Dann ist (Bild 5)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{33{,}5}$$

und die Ablenkung:

$$y = 22{,}5 \cdot \operatorname{tg}\varphi = 3{,}3 \text{ cm}.$$

Die Rechnung zeigt somit, dass man mit einer etwa 40 cm langen Braunschen Glühkathodenröhre (Anodenspannung von 100 Volt) für $^1/_{10}$ Ampere eine Ablenkung von 3,2 cm erzielen kann.

Mit einer kurzen Röhre können wir daher dieselbe Stromempfindlichkeit wie beim Oszillographen erreichen. Ohne Schwierigkeit würde auch noch die zehnfache Empfindlichkeit zu erzielen sein.

Wie steht es mit der Spannungsempfindlichkeit? Lassen wir ein Elektron eine Spannung von E Volt frei durchfallen, dann mit der so erhaltenen Geschwindigkeit auf der Länge a ein quer zu dieser Geschwindigkeit gerichtetes elektrisches Feld von F Volt/cm durchfliegen und schließlich im Freifluge noch die Strecke l zurücklegen, so erlangt es eine Gesamtablenkung[1])

$$y = \frac{F}{2E}\left\{\frac{a^2}{2} + a\,l\right\}\text{cm}.$$

In unserem Falle sei E wieder 100 Volt; die Feldstärke betrage $^1/_{10}$ Volt/cm und werde hervorgebracht durch Anlegen der Spannung von $^1/_{10}$ Volt an einen Plattenkondensator, dessen Belegungen einen Abstand von 1 cm haben. Es sei a = 20 cm; l = 50 cm. Dann ist:

$$y = \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 100}\left\{\frac{20^2}{2} + 20 \cdot 50\right\} = 0{,}6 \text{ cm}.$$

Eine Braunsche Röhre, bei der die genannten Abmessungen und Spannungen (Gesamtlänge etwa 80 cm, Anodenspannung 100 Volt) vorhanden sind, hat nicht ganz die Spannungsempfindlichkeit des gewöhnlichen Oszillographen, doch kann die Empfindlichkeit vielleicht bei Ausnutzung aller günstigen Umstände erreicht werden.

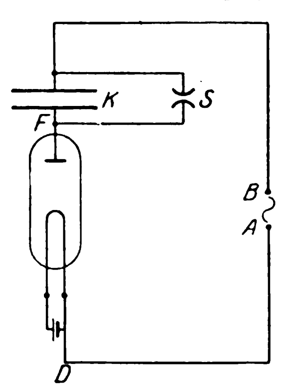


Bild 7. Zweiter Vorschlag. Ein Kondensator wird über eine Elektronenröhre geladen und über eine Funkenstrecke entladen.

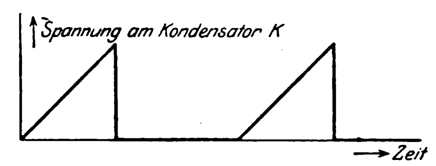


Bild 8. Spannung am Kondensator K Bild 7

5. Zweiter Vorschlag. Beim Siemensschen Oszillographen rückt der Lichtfleck immer in einer Richtung über die Schreibfläche vor. Bei unserem vorigen Vorschlage bewegt er sich zwischen zwei Endlagen hin und her. Es wird somit vorwärts und rückwärts geschrieben. Es ist dies kein Hindernis, immerhin muß man sich an diese Schreibweise erst gewöhnen. Bei dem durch Schaltung 7 gegebenen zweiten Vorschlag fällt diese Unbequemlichkeit weg. Bei dieser soll der Kondensator K über eine Elektronenröhre gleichmäßig aufgeladen werden, am Ende aber plötzlich,

[1]) W. Kaufmann, a. a. O.

durch Ansprechen einer Funkenstrecke S entladen werden. Der Fluoreszenzfleck wird somit hier erst proportional der Zeit aus der Ruhelage verschoben, geht dann plötzlich bei Einsetzen der Funkenstrecke in seine Ruhelage zurück und verbleibt dort während des negativen Spannungsbuckels der Hilfsschwingung. Erst mit Beginn der positiven Spannung wiederholt er seine Bewegung, die in zeitlicher Folge durch Bild 8 gegeben ist. Man beachte, daß diese Methode von einem etwas verfrühten oder verspäteten Einsetzen der Funkenstrecke unabhängig ist, indem hierdurch nicht die gleichmäßige Verschiebung des Fleckes beeinflußt wird, sondern lediglich die größte Verschiebung, die der Fleck erreicht. Vorsicht erfordert der Umstand, daß in einem Teil der Zeit (während des negativen Spannungsbuckels der Hilfsfrequenz) der Fleck ruht. Diese Art der Fleckverschiebung dürfte sich daher im allgemeinen nur für periodische Vorgänge empfehlen. Auch erfordert die Funkenstrecke zu ihrem Ansprechen höhere Spannungen, als sie bei dem ersten Vorschlage notwendig sind.

Immerhin kann auch dieser Vorschlag sein Anwendungsgebiet finden.

Daß man beim ersten Vorschlag den Entladestrom der Röhren benutzen kann, den Fleck aus dem Gesichtsfelde herauszuwerfen und somit nur die Kurvenbilder für den Hingang des Fleckes sichtbar zu machen, mag nur beiläufig erwähnt werden.

An der experimentellen Prüfung der hier genannten Vorschläge hatte Herr Dr. Glage die Liebenswürdigkeit sich zu beteiligen. Wir berichten in der folgenden Arbeit über unsere Ergebnisse.

Einige Versuche mit einem verbesserten Kathodenstrahl-Oszillographen.

Von

W. Rogowski und **G. Glage.**

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

1. Braunsche Röhre und Spannungsgeber. Im folgenden teilen wir einige Versuche mit, die wir mit der in der vorangehenden Arbeit von Rogowski[1]) angegebenen Verbesserung des Kathodenstrahl-Oszillographen angestellt haben.

Wir benutzten eine Braunsche Röhre der üblichen alten Bauart mit kalter Kathode. Die Elektronen wurden bei ihr somit durch Jonenstoß freigemacht. Die hierzu benötigte hohe Spannung wurde einer Influenz-Elektrisiermaschine von Wehrsen entnommen. Wir hatten somit rasche Elektronen und damit eine unempfindliche Röhre. Sie gab bei 440 Volt je nach der Härte etwa 1 bis 2 cm Ausschlag.

Die Ablenkung des Strahles geschah mit Hilfe zweier senkrecht zu einander stehender elektrischer Felder, die in üblicher Weise durch Ladung je zweier Platten hergestellt wurden. (Vergl. Bild 1. Die zu untersuchende Spannung lag an den Platten a — b, die dreieckförmige, der Zeit proportionale Hilfsspannung an den Platten c — d.) Da die Röhre keine Innenelektroden besaß, mußten wir die Platten außerhalb der Röhre anbringen. Das hat den Nachteil, daß sich bisweilen je nach der Härte der Röhre auf der Glaswand elektrische Ladungen niederschlagen, die das Feld der Ablenkungskondensatoren verzerren. Bei nicht zu hohem Vakuum der Röhre, die bei uns dauernd mit einer Gaedepumpe in Verbindung stand, ließ sich dieser Übelstand auf ein erträgliches Maß herabdrücken.

[1]) Rogowski, Archiv für Elektrotechnik, IX, S. 115.



Die Vorrichtung zur Erzeugung der dreieckförmigen Hilfsspannung, die den Fluoreszenzfleck gleichmäßig hin- und herführen soll, ist in Bild 2 zu sehen. Bild 3 gibt die zugehörige Schaltung. Beim Bau ist auf peinlichste Isolation Wert gelegt, denn die Ströme dieser Vorrichtung sind klein, die Spannungen entsprechend der Unempfindlichkeit der benutzten Braunschen Röhre ziemlich hoch. Wir wollten daher Isolationsströme so weit herabdrücken als möglich. So sind denn die Akkumulatoren A, die Widerstände B, die Strommesser D zur Heizung der Ventilröhren C getrennt auf Porzellansockel gesetzt. Als Ventilröhren benutzen wir normale Verstärker oder Senderöhren, bei denen wir Gitter und Anode verbanden. Die Steckkontakte der Ventilröhren waren auf Hartgummi montiert, ebenso waren die der Anode vorgeschaltenen Anodenstrommesser durch Hartgummiunterlagen sorgfältig isoliert. K ist der Kondensator, der durch den Sättigungsstrom der Ventilröhren geladen und entladen werden und somit eine dreieckförmige Wechselspannung erhalten soll.

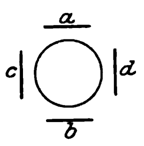


Bild 1. Benutzte Braunsche Röhre mit Ablenkungsplatte.

Die Spannung zum Betrieb dieser Anordnung wurde einem Transformator (Übersetzungsverhältnis 110/2000) entnommen, der primär an eine Wechselstrommaschine von der Frequenz 50 Perioden/Sekunde angeschlossen war. (In Ausnahmefällen wurde er auch mit der Frequenz 500 Per/sec betrieben.) Bei diesen langsamen Vorgängen erwies es sich nicht als notwendig, den Sekundärklemmen des Trans-

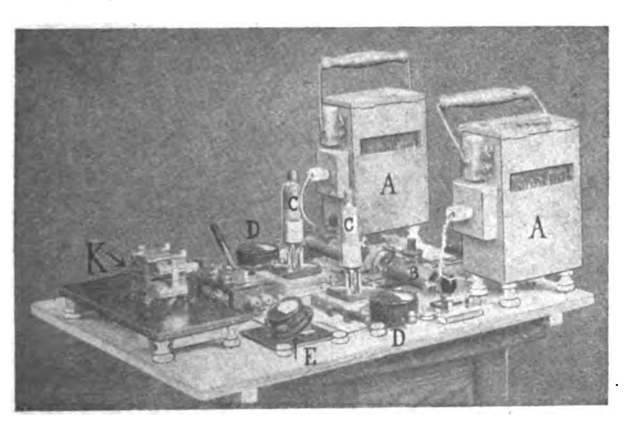


Bild 2. Spannungsgeber.

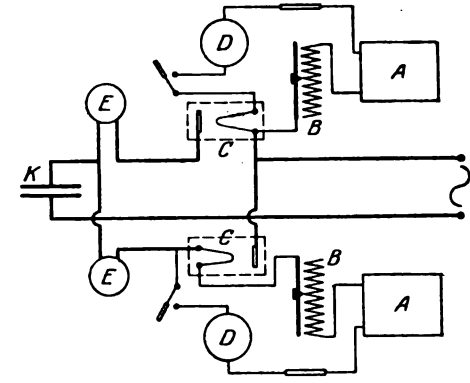


Bild 3. Schaltung des Spannungsgebers.

formators einen Kondensator parallel zu schalten. Die Stromänderungen erfolgten auch ohne ihn genügend rasch[1]). Mit den Klemmen des Kondensators K waren die horizontalen Ablenkungsplatten c d der Braunschen Röhre verbunden.

Wenn man diese Anordnung in der früher beschriebenen Weise betreibt, fällt einem sofort auf, daß die beiden Anodenstrommesser E (Bild 2) gleiche Werte anzeigen, selbst dann wenn die Heizung der beiden Ventilröhren verschieden eingestellt ist. Der Grund liegt darin, daß die Strommesser mittlere und nicht momentane Werte des pulsierenden Anodenstromes angeben. Daß sie gleichweit ausschlagen, besagt nichts anderes, als daß die Elektrizitätsmenge für Ladung und Entladung des Kondensators K denselben Wert hat. Ist J_1 der Lade-, J_2 der Entladestrom, t_1 die Lade-, t_2 die Entladedauer, so ist offenbar:

$$J_1 t_1 = J_2 t_2.$$

Die Dauer einer Ladung und Entladung muß im periodischen Falle mit T, der Periodendauer des Hilfswechselstromes, übereinstimmen:

$$t_1 + t_2 = T.$$

[1]) Vergl. Rogowski, a. a. O. S. 117.

Die Anodenstrommesser zeigen offenbar $\frac{J_1 t_1}{T}$ oder $\frac{J_2 t_2}{T}$ an.

Lade- und Entladedauer verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Lade- und Entladeströme:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{J_2}{J_1}.$$

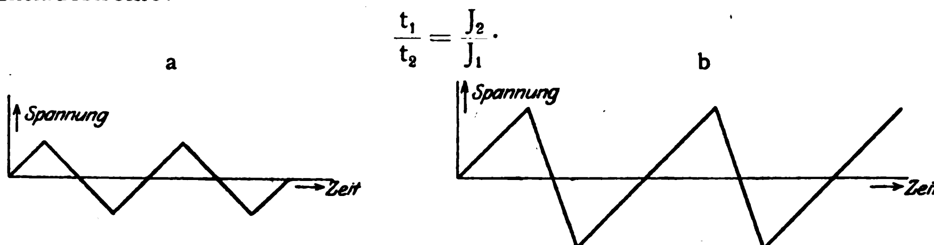


Bild 4. Dreieckförmige Wechselspannungen.
a) gleichschenklige, b) schiefwinklige.

Heizen wir die Ventilröhren verschieden, so muß der Fluoreszenzfleck der Röhre rascher hin- als zurückwandern oder umgekehrt. Dies ist ein gutes Mittel, um die Kurven, die der Oszillograph beim Hingang und Rückgang schreibt, zu unterscheiden.

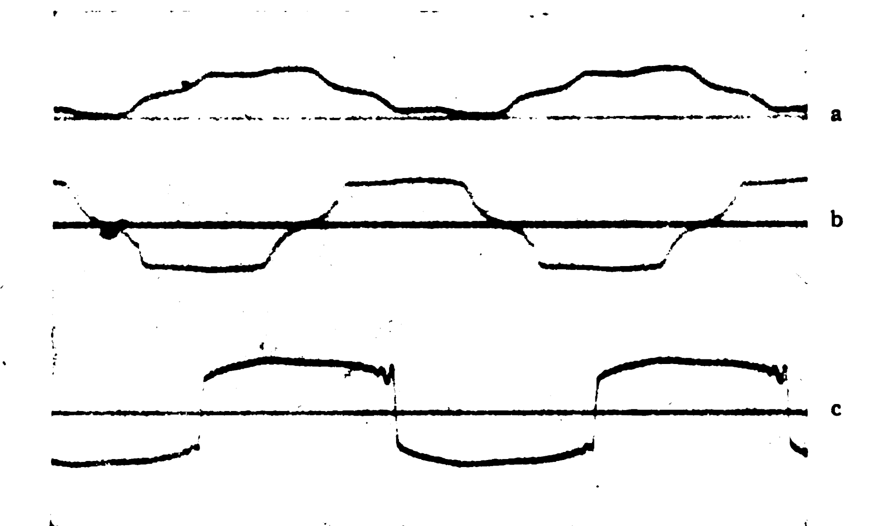


Bild 5. Lade- und Entladestrom des Kondensators K (Bild 2 u. 3). Ventilröhre: Schottsche Senderöhre.
a) Wechselspannungen 600 Volt,
b) " 1400 "
c) " 2200 "
Gleiche Heizung beider Ventilröhren.

2. Nachweis der Dreieckspannung. Wenn die Wechselspannung des Kondensators K (Bild 2 u. 3) auf die Kothodenröhre einwirkt, wird der Fleck zu einem Band auseinandergezogen. Wir untersuchten dieses auf seine Zeitabhängigkeit mit Hilfe eines rotierenden Spiegels. Wir erhielten durchaus nicht immer die erwartete dreieckförmige Gestalt. Bei niedriger Hilfsspannung erhielten wir gewöhnlich eine unregelmäßige Kurve. Erst wenn wir die Spannung steigerten, erhielten wir die erwartete Dreieckkurve, die bisweilen sogar ausgezeichnet war. Steigerten wir die Spannung noch höher, so wurde die Kurve gewöhnlich wieder etwas schlechter. Je nach der Heizung der beiden Röhren erhielten wir gleichschenklige oder schiefwinklige Dreiecksform (Bild 4). Die beobachteten Abweichungen von der Dreiecksform veranlaßten uns, die Kurve des Kondensatorstromes mit dem Simensschen Oszillographen zu



untersuchen, und dies ist auch der Hauptgrund, warum wir zunächst bei niedrigen Frequenzen blieben.

Bild 5 zeigt die Lade- und Entladeströme, die wir erhielten, wenn wir als Ventilröhre Schottsche Senderöhren (kleines Modell, normaler Heizstrom 1,35 Ampere) benutzten. Die Oszillographenschleife wurde unmittelbar vor den Kondensator K (Bild 2 u. 3) geschaltet. Kurve a ist bei niedriger Spannung (etwa 600 Volt), b bei höherer (etwa 1400 Volt), c bei höchster Spannung (etwa 2200 Volt) aufgenommen. Bei gleichmäßiger Heizung der Ventilröhren und genau dreieckiger Spannungskurve erwarten wir im Oszillogramm eine rechteckförmige Stromkurve. Sie ist bei der

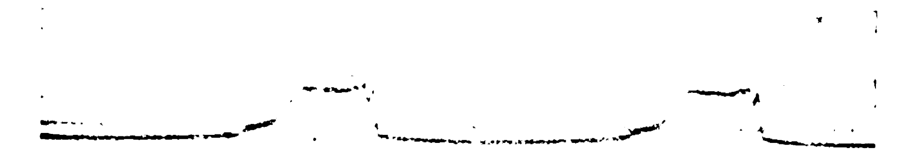


Bild 6. Lade- und Entladestrom bei ungleicher Heizung beider Ventilröhren.

niedrigsten Spannung nicht vorhanden. Bei mittlerer Spannung bereits deutlich ausgeprägt, wenn auch der Übergang von Lade- zu Entladestrom nur langsam erfolgt. Bei höchster Spannung geht auch dieser Übergang plötzlich vor sich, dafür beulen sich die geradlinigen Teile etwas aus. Bild 6 ist bei ungleicher Heizung aufgenommen. Wir sehen deutlich, daß zum größeren Strome die kürzere Zeit gehört. Auch hier ist die Konstanz des Ladestromes ziemlich gut erfüllt.

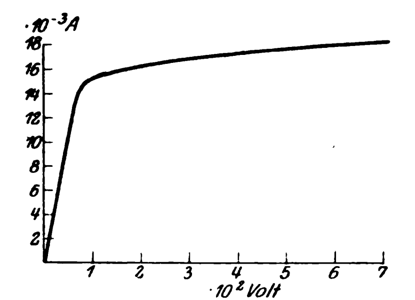


Bild 7. Sättigungsstrom der benutzten Schottschen Senderöhre. Gitter mit Anode verbunden.

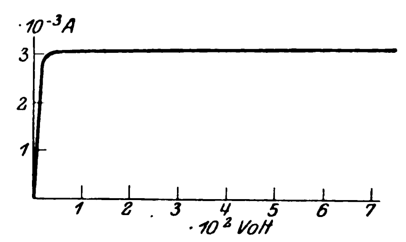


Bild 8. Sättigungsstrom einer Seddig-Verstärkerröhre. Gitter mit Anode verbunden.

Wir nahmen sofort an, daß die Mängel, die unsere Ladeströme zeigen, dadurch verursacht sind, daß unsere Ventilröhren Gas enthielten oder bei der starken Beanspruchung abgaben und somit von eigentlichen Sättigungsströmen nicht die Rede sein konnte. Eine Aufnahme ihrer Charakteristiken bestätigte dies (Bild 7). Wir suchten nun nach besseren Ventilröhren und fanden solche in Seddigschen Verstärkerröhren (Heizstrom 0,54 Ampere Anodensp. 90 Volt). Nach Bild 8 ergaben diese sogar eine ganz vorzügliche Konstanz des Stromes, der sich zwischen 50 und 700 Volt um weniger als 1 % änderte. Wir wiederholten die oszillographischen Aufnahmen mit solchen Röhren und fanden nun unsere Erwartungen vorzüglich bestätigt (Bild 9). Damit der Siemensche Oszillograph nennenswerte Ausschläge gab, mußten die Ventilröhren überanstrengt werden. Das hatte zur Folge, daß auch sie nach kurzem Gebrauch die in Bild 5 vorhandenen Aussbuchtungen ergaben (Bild 10). Möglicherweise lag eine solche Überanstrengung bereits bei den Schottschen Röhren vor, da diese schon längere Zeit vor der Aufnahme der Oszillogramme in der Apparatur benutzt waren. Solche Überanstrengungen sind bei passender Wahl des Kondensators K leicht zu vermeiden.

Mit dem Vorstehenden ist der Nachweis geführt, daß in der Tat ein Laden und Entladen eines Kondensators mit konstanten Strömen möglich und daß demzufolge eine dreieckförmige Spannungskurve ohne Schwierigkeit herzustellen ist.

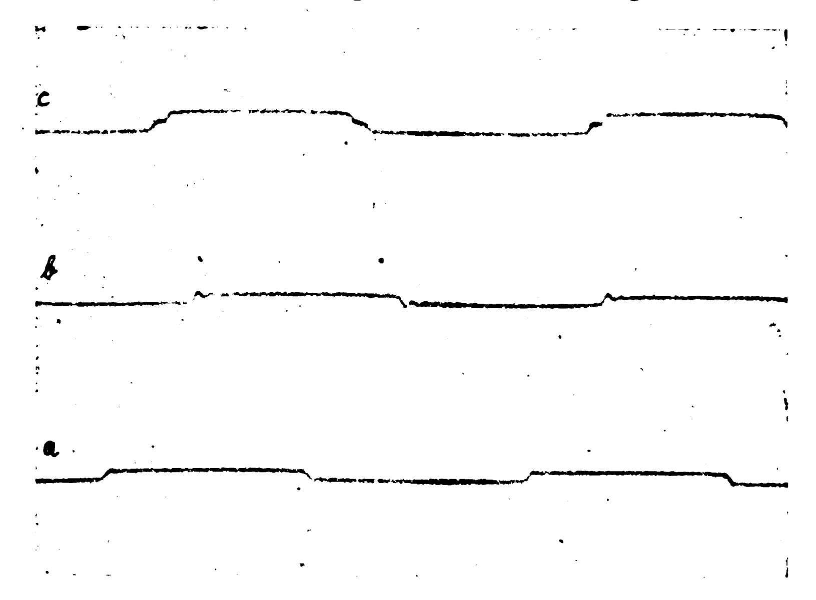


Bild 9. Lade- und Entladestrom des Kondensators K (Bild 9). Ventilröhre: Seddigsche Verstärkerröhre.
a) bei hoher, b) bei mittlerer, c) bei niedriger Wechselspannung.
Gleiche Heizung beider Ventilröhren.

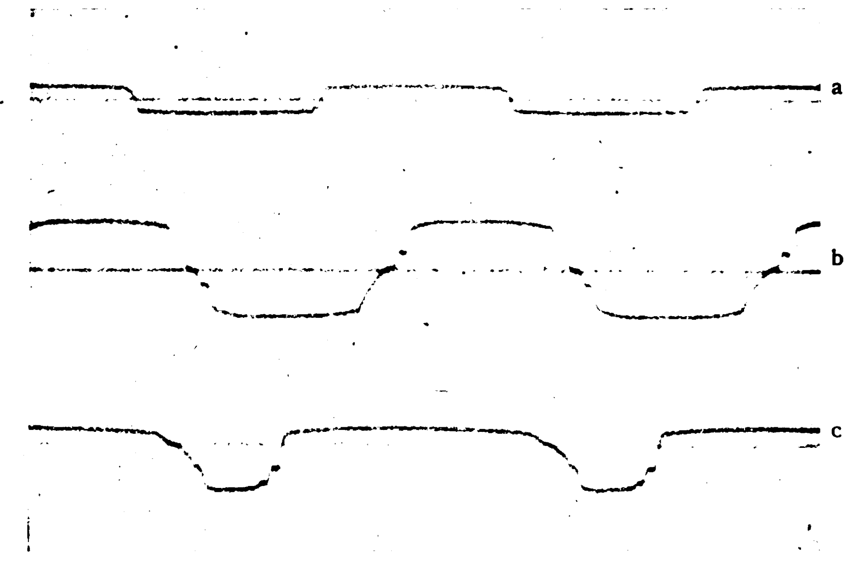


Bild 10. Niedrige Wechselspannung.
Kurve a) bei mässiger, Kurve b) bei starker Überanstrengung der Ventilröhren; gleiche Heizung
Kurve c) ungleiche Heizung der Ventilröhren.

Bild 11a zeigt den bei einer dreieckförmigen Wechselspannung erhaltenen Fluoreszenzstreifen. Es ist an seiner durchweg gleichmäßigen Tönung sofort zu erkennen, ob die ablenkende Spannung wirklich dreieckförmig ist. Denn sowie sie hiervon abweicht (Bild 11b Sinusspannung, Bild 11c Sinusspannung mit dritter

Oberwelle), sieht man sofort gewisse Stellen des Bandes heller leuchten als andere. Wie die Betrachtung im rotierenden Spiegel ergab, war bei Bild 11 a eine ausgezeichnete Dreieckspannung vorhanden. Das Auge vermochte in dem Fluoreszenzbande keine Ungleichmäßigkeiten zu entdecken. Trotzdem zeigt die photographische Aufnahme Spuren hiervon. Dies ist vielleicht so zu erklären, dass die Lichtschicht kleine Unregelmäßigkeiten enthielt, die auf die photographische Platte stärker wirken als auf das Auge.

Weiter stellten wir Versuche bei der Frequenz von 500 Per/sec an und überzeugten uns auch hier mit dem rotierenden Spiegel, daß ausgezeichnete Dreieckspannungen zu erhalten waren.

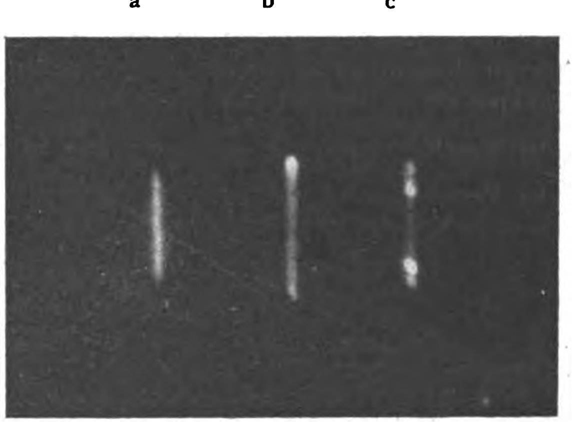


Bild 11. Fluoreszenzstreifen
a) bei Dreieckspannung, b) bei Sinusspannung, c) bei Sinusspannung mit dritter Oberwelle.

Es ist für den weiteren Ausbau der Versuche von Wichtigkeit zu wissen, ob bei Hochfrequenz zwei Schwingungen so weit intakt bleiben, daß das Oszillogramm auf dem Fluoreszenzschirm still steht und nicht wandert. Um hierüber Klarheit zu erhalten, ließen wir auf die Platten c d Bild 1 die Spannung eines Röhrensenders einwirken, der auf die Welle von 800 m eingestimmt war. Die Platten a b wurden an einen zweiten Röhrensender angeschlossen, der auf die Welle von 200 m eingestimmt war. Bei genügender Vorsicht stand die Lissajonsche Figur fast vollkommen still, so daß alle Einzelheiten der Kurven zu beobachten waren. Die geringste Kapazitätsänderung verursachte bereits ein Wandern der Kurven. Wir glauben, daß sich so die genauesten Kapazitätsabgleichungen werden darstellen lassen.

3. Kondensator- und Ventilspannung. Im folgenden wollen wir uns noch genauer mit den Spannungen an Kondensator und Ventilröhren beschäftigen. Lade- und Entladestrom seien zunächst als gleich vorausgesetzt:

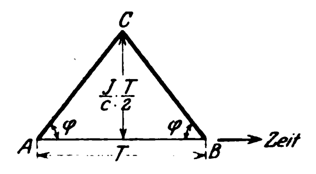


Bild 12. Konstruktion des gleichschenkligen Spannungsdreieckes.

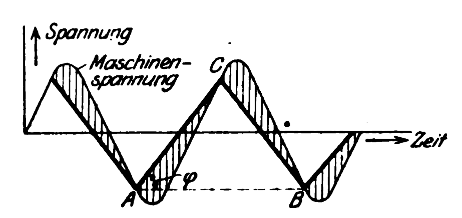


Bild 13. Maschinenspannung und gleichschenkliges Spannungsdreieck.

$$J_1 = J_2 = J.$$

Nach bekannten Beziehungen ist:

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{C\,dV}{dt};$$

Q = Ladung; C = Kapazität; V = Spannung des Kondensators K (Bild 2); somit ist

$$\frac{dV}{dt} = \frac{J}{C} = \operatorname{tg}\varphi;$$

wo φ den Winkel bedeutet, den bei zeichnerischer Darstellung die Kondensatorspannung mit der Zeitgeraden bildet. Hiermit ist die Dreieckform der Spannung

festgelegt: Wir zeichnen über der Strecke AB = T (Periodendauer der Hilfsschwingung) ein gleichschenkliges Dreieck mit den gleichen Basiswinkeln φ (Bild 12). Man liest ihm ab, daß die Schwingungsweite der Kondensatorspannung

$$e = \frac{J\,T}{C\,4}$$

beträgt.

Wir tragen nun noch in demselben Maßstab die Hilfsspannung (Maschinenspannung) auf. Offenbar ist im periodischen Falle nur dann die in Bild 12 gezeichnete Spannung möglich, wenn wir das Dreieck in die Spannungskurve der Maschine derart hineinklappen können, daß die Basis der Zeitachse parallel liegt und die Eckpunkte in die Sinuslinie hineinfallen. Hierzu ist erforderlich, daß die Amplitude der Maschinenspannung größer als $\frac{J\,T}{C\,4}$ ist. Ist sie kleiner oder war die Heizung der Ventilröhre zu stark einreguliert, oder der benutzte Kondensator zu klein, so kann sich keine dreieckförmige Kondensatorspannuug einstellen, wir erhalten dann

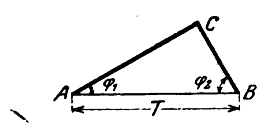


Bild 14. Konstruktion des schiefwinkeligen Spannungsdreiecks.

Bild 15. Maschinenspannung und schiefwinkeliges Spannungsdreieck.

Kurven von der Form a (Bild 5). Mann kann in einem solchen Falle durch dreierlei Mittel die Dreieckspannnng wieder herstellen:

1. Man steigert die Maschinenspannung,
2. man schwächt die Heizung der Ventilröhren,
3. man vergrößert die Kapazität des Kondensators K (Bild 2).

Es hat somit gar keine Schwierigkeit, die Dreieckform zu erhalten, aber man darf nicht blindlings Spannung und Heizung und Kondensator beliebig wählen. Man merke sich am besten: Man darf Spannung und Kapazität nicht unter, die Heizung nicht über einen gewissen Wert wählen. Im übrigen sind den Größen keine Grenzen gezogen.

Die Ordinatenabschnitte zwischen Sinus- und Dreieckkurve (Bild 13) geben die Anodenspannungen der Ventilröhren an. Es ist früher gesagt worden, die Maschinenspannung müsse groß sein gegen die Sättigungsspannung der Ventile. Richtiger müssen wir sagen die durch Bild 13 gegebenen (schraffierten) Anodenspannungen müssen es sein. Durch Steigerung der Maschinenspannung ist die Forderung ja immer zu erfüllen. Immerhin wird man im Interesse der Lebensdauer der Röhre nicht weiter gehen als notwendig. Auch ist es empfehlenswert, die Sättigungsspannung so tief als möglich zu wählen, was durch Einbau passender Gitter (Langmuirscher Spannungsgitter) und schwache Heizung zu erreichen ist.

Bei ungleicher Heizung wird das Spannungsdreieck ungleichschenklig. Die Basiswinkel φ_1 und φ_2 sind durch die Ausdrücke:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{J_1}{C}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{J_2}{C}; \qquad J_1 = \text{Lade-},\ J_2 = \text{Entladestrom}$$

gegeben. Im periodischen Falle muß auch hier wie vorhin das Dreieck in die Spannungskurve der Maschine hineingeklappt werden können.

In Bild 14 ist dies für einen besonderen Fall gezeichnet. Die Bedingungen für das Zustandekommen der Dreieckspannung sind die gleichen wie früher. Wichtig ist, daß in diesem Falle die Anodenspannungen der Ventilröhren ungleich groß sind, wie sich aus der Betrachtung der Ordinatenabschnitte zwischen Sinus- und Dreieckkurve ergibt.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 4. Heft. 1920.

Über den Zwischenkreisröhrensender.

Von

Kurt Heegner.

Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.

Die vorliegende Arbeit behandelt den Zwischenkreisröhrensender in analytischer Form. Ein solcher entsteht, wenn ein durch ein Elektronenrelais zu ungedämpften Schwingungen angeregter Primärkreis mit einem Sekundärkreis elektromagnetisch gekoppelt wird, und die Rückwirkung, welche letzterer auf den Primärkreis ausübt, bildet den Gegenstand der Untersuchung. Die Theorie ist zwar auch auf andere Schwingungserzeuger anwendbar, indessen sind es die Glühkathodenröhren, bei denen die Erscheinungen in sehr reiner Form zur Geltung kommen, und dies ist der Grund, weshalb wir an diesen konkreten Fall anknüpfen.

Was die Literatur über Senderöhren anlangt, so verweisen wir auf die Mitteilungen von M. Wien im Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie, Bd. 14, Heft 5, S. 442. Es dürfte sich als zweckmäßig erweisen, einige bekannte Tatsachen aus der Theorie der Senderöhre kurz anzuführen, indem wir zugleich dabei neue Gesichtspunkte gewinnen.

1. Die analytische Theorie des durch ein Elektronenrelais zu Schwingungen angeregten Primärkreises. Indem wir von den Barkhausenschen Bezeichnungen Gebrauch machen, ist bei kleinen Amplituden der Wechselströme und Spannungen die Abhängigkeit des Anodenwechselstroms i_a von den Wechselspannungen e_a und e_g ausgedrückt durch:

$$i = S e_g - \frac{1}{R_i} e_a,$$

wenn S die durch Anodenbatteriespannung und durch mittleres Gitterpotential bestimmte „Steilheit" der Röhre, R_i den dazugehörigen inneren Widerstand der Röhre bedeutet.

Dieser Ansatz deckt sich mit dem von Vallauri. Für die Schaltung mit elektromagnetischer Rückkoppelung in Bild 1 treten die Gleichungen hinzu:

$$i_a = i_1 + i_1'$$

$$e_a = \frac{1}{C_1} \int i_1 \cdot dt = R_1 i_1' + L_1 \frac{d i_1'}{dt}$$

$$e_g = L_{10} \cdot \frac{d i_1'}{dt}$$

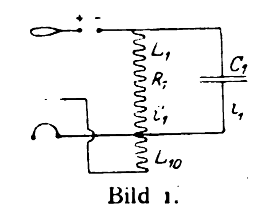


Bild 1.

und der Ansatz ist vollständig, so bald wir die Rückkopplungsverluste vernachlässigen können. Das Resultat lautet:

$$L_1 \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R_1 + \frac{L_1}{C_1 \cdot R_i} - \frac{L_{10} \cdot S}{C_1}\right) \frac{d i}{dt} + \frac{i}{C_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_i}\right) = 0.$$

Die Gleichung stellt ungedämpfte Schwingungen dar, wenn der Koeffizient des zweiten Gliedes Null wird. Dies ergibt:

$$R_1 = \frac{L_{10} \cdot S}{C_1} - \frac{L_1}{C_1 \cdot R_i}.$$

Die Frequenz der entstehenden Schwingung ist dann gegeben durch:



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_i}\right)}.$$

Dieselbe stimmt nahezu mit der Eigenfrequenz des Schwingungskreises überein, und gerade dieser Umstand berechtigt zu der Auffassung, daß die Röhre auf den Kreis in erster Linie so einwirkt, daß der Widerstand R_1 des Kreises kompensiert wird, daß also die Dämpfung des Kreises durch die Röhre zu Null gemacht wird.

In der bisherigen Untersuchung war angenommen, daß die Amplituden von Strom und Spannung noch sehr klein sind. Daher bedeutet der oben angeführte Wert für R_1 den Grenzwiderstand, bei dem die Schwingungen aussetzen, wie auch Vallauri hervorhebt. Vergrößern wir R_1, so treten überhaupt keine Schwingungen auf, hingegen verkleinern wir R_1, so werden die Amplituden anwachsen, der Anodenstrom jedoch wegen der Krümmung der Charakteristik mehr oder weniger von der Sinusform abweichen[1]).

Trotz alledem läßt sich der weitere Verlauf physikalisch leicht überblicken. Da nämlich in dem Schwingungskreise vorwiegend die Grundschwingung erzeugt wird, so werden in demselben Strom und Spannung in weitgehender Annäherung sinusförmigen Verlauf zeigen, und wenn man den Primärkreis mit einem zweiten Schwingungskreis koppelt, dasselbe in noch höherem Maße für den Sekundärkreis zutreffen. Aus diesem Sachverhalt heraus können wir bereits vermuten, daß die Erscheinungen am Zwischenkreisröhrensender mit Hilfe linearer homogener Differentialgleichungen in guter Annäherung entwickelbar sind. Den Anodenwechselstrom können wir, wenn wir es wollen, uns durch einen sinusförmigen Strom ersetzt denken, der an den Primärkreis dieselbe Arbeit abgibt.

Es handelt sich also für die vorliegende Untersuchung darum, auch diesen Fall intensiven Arbeitens der Röhre in das analytische Verfahren einzubeziehen, und dafür kommen folgende Gesichtspunkte in Frage:

Der Anodenstrom werde zunächst zwar durch die Krümmung der Charakteristik deformiert, es trete aber noch keine Sättigung und keine Verriegelung der Röhre auf. Dann werden wir statt S in dem Ansatz:

$$i_a = S e_g - \frac{1}{R_i} e_a$$

eine Größe substituieren, die wenig kleiner ist als S. Bei der gemachten Voraussetzung, daß keine Sättigung und Verriegelung eintreten soll, wird annähernd noch die Beziehung

$$S \cdot R_i \cdot D = 1$$

bestehen, indem der sogenannte Durchgriff D annähernd eine Konstante ist. Demzufolge werden wir R_i für diesen Fall wenig größer annehmen müssen.

Tritt aber Sättigung und Verriegelung ein, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.

Die Anodenspannung ist stets ein gutes Stück größer als die Gitterspannung, dann werden, wie es das analytische Verfahren verlangt, die Rückkopplungsverluste noch immer zu vernachlässigen sein. Außerdem nimmt S stark ab, dagegen muß von R_i zufolge des Ansatzes angenommen werden, daß es sich nur sehr wenig ändert, da die Anodenspannung bei Sättigung und Verriegelung fast gar keinen Einfluß hat.

Zweiter Fall.

Die Anodenspannung wird bei maximaler Gitterspannung etwa ebenso groß wie diese oder kleiner. Dann geht in diesem Moment der Sättigungsstrom mehr

[1]) Siehe Rukop.

oder weniger auf das Gitter über, der Anodenstrom erhält eine Einsattelung, und zwar infolge der Einwirkung der Anodenspannung. Wir werden daher für diesen Fall in dem Ansatze nicht nur S erheblich verkleinern müssen, sondern auch R_i, was uns ebenso unerwünscht ist wie die nicht mehr zu vernachlässigenden Rückkoppelungsverluste, wie im folgenden zu zeigen ist.

Wir schließen daher den letzteren Fall von der Untersuchung aus.

2. Analytischer Ansatz für den Zwischenkreissender. Wir kommen nunmehr dazu, den analytischen Ansatz für den Zwischenkreissender zu entwickeln und zu begründen.

Zufolge Artikel 1 ergibt sich aus Abb. 2:

$$i_a = S e_g - \frac{1}{R_i} e_a = i_1 + i_1'$$

$$e_a = \frac{1}{C_1} \int i_1 \cdot dt = R_1 i_1' + L_1 \frac{d i_1'}{dt} - L_{12} \frac{d i_2}{dt}$$

$$e_g = L_{10} \frac{d i_1'}{dt}$$

$$0 = \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt + R_2 i_2 + L_2 \frac{d i_2}{dt} - L_{12} \frac{d i_1'}{dt}.$$

Bild 2.

Aus den drei ersten Zeilen können wir ableiten:

$$L_{12} \frac{d i_2}{dt} + \frac{L_{12}}{C_1 R_i} i_2 = L_1 \frac{d i_1'}{dt} + \left(R_1 - S \frac{L_{10}}{C_1} + \frac{L_1}{C_1 R_i}\right) i_1' + \frac{1}{C_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_i}\right) \cdot \int i_1' \, dt.$$

Von der Vereinfachung dieser Gleichung hängt die Ausgestaltung der Theorie wesentlich ab. Zunächst betrachten wir den Koeffizienten von $\int i_1' \cdot dt$

$$\frac{1}{C_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_i}\right).$$

Den Widerstand R_1 des Zwischenkreises wird man so klein wie nur irgend möglich machen, um die durch denselben verursachten Energieverluste herabzumindern. Daher ist der Wert dieses Koeffizienten von dem inneren Widerstand der Röhre R_i nur unmerklich abhängig, indem hinzukommt, daß bei zu vernachlässigenden Rückkoppelungsverlusten R_i sich nur wenig verändert. Wir können daher diesen Koeffizienten zu einer neuen Konstanten $\frac{1}{C_1'}$ zusammenziehen, und es weicht C_1' nur sehr wenig von C_1 ab.

Eine zweite Überlegung bezieht sich auf das Glied:

$$\frac{L_{12}}{C_1 R_i} \cdot i_2,$$

welches wir vernachlässigen können. Um dies einzusehen, müssen wir uns über die Größenordnung des Koeffizienten von i_2 zunächst klar werden. Indem wir mit der Kreisfrequenz ω der entstehenden Schwingung erweitern, können wir ihn schreiben:

$$\frac{L_{12}\,\omega \cdot \frac{1}{C_1\,\omega}}{R_i}.$$

Im Zähler steht das Produkt zweier Scheinwiderstände, im Nenner der innere Widerstand der Röhre. Was indessen die Größenordnung dieser Widerstände anlangt, so ist zu beachten, daß $L_{12}\,\omega$ in der Größenordnung von R_1 und R_2 anzusetzen ist, hingegen $\frac{1}{C_1\,\omega}$ etwa 30 mal größer und R_i wiederum mindestens 30 mal größer als $\frac{1}{C_1\,\omega}$ ist. Daraus folgt schließlich, daß die Größenordnung dieses Koeffizienten unterhalb der von R_1 und R_2 anzusetzen ist. Betrachten wir nun die Glieder, welche die Rückwirkung des Sekundärkreises auf den Primärkreis ausmachen:

$$L_{12}\frac{d\,i_2}{dt} + \frac{L_{12}}{C_1\,R_i}\,i_2$$

und nehmen für den ungünstigsten Fall an, daß $\frac{L_{12}}{C_1\,R_i}$ den zehnten Teil von $L_{12}\,\omega$ betrage, so wird, wenn wir das zweite Glied vernachlässigen, der Fehler gerade $^1/_2\%$ betragen, insofern als die Spannung $L_{12}\frac{d\,i_2}{dt}$ gegen die zu vernachlässigende Spannung in der Phase um 90^0 verschoben ist. Die Größenordnung von L_{12} spielt hierbei übrigens keine entscheidende Rolle, da wir L_{12} als Faktor heraussetzen können. Es wird $L_{12}\,\omega$ deshalb in der Größenordnung von R_1 und R_2 liegen müssen, weil der Sekundärkreis als Resonanzkreis ausgebildet gedacht ist. Unsere Untersuchung bezieht sich dennoch auch auf die Fälle des Kurzschließens und Öffnens der Sekundärspule.

Setzen wir:

$$R_1 - S\frac{L_{10}}{C_1} + \frac{L_1}{C_1\,R_i} = R_n$$

so führen die vorgenommenen Vereinfachungen auf die Gleichung:

$$L_{12}\frac{d\,i_2}{dt} = L_1\frac{d\,i_1'}{dt} + R_n\,i_1' + \frac{1}{C_1}\int i_1'\,dt\ ^{1)}.$$

Dazu Zeile 4 am Anfang des Artikels:

$$L_{12}\frac{d\,i_1'}{dt} = L_2\frac{d\,i_2}{dt} + R_2\,i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt.$$

Das System dieser beiden Gleichungen stimmt formal überein mit demjenigen, welches die freien Schwingungen eines gekoppelten Systems bestimmt. Indessen ist es die Größe R_n, welche im vorliegenden Falle aus ganz anderen Größen zusammengesetzt ist als im Falle der freien Schwingungen. R_n ist nunmehr die einzige Größe, welche von den die Arbeitsweise der Röhre bestimmenden Größen S und R_i abhängt. Von diesen Größen haben wir im Artikel 1 nur sehr unbestimmte Aussagen machen können. Wir wissen, daß S mit dem effektiven Widerstand des Primärkreises dauernd abnimmt, ferner, daß R_i vom Grenzwiderstand angefangen, zunächst wenig zunimmt, dann schließlich wieder nur wenig abnimmt, solange noch die Rückkopplungsverluste zu vernachlässigen sind.

Hier kommt uns nun ein Umstand zu Hilfe, welcher uns gestattet, der Größe R_n eine präzise physikalische Bedeutung zu verleihen, nämlich daß die Röhre „von selbst" ihren Arbeitszustand so einreguliert, daß stets Schwingungen gleicher Amplitude entstehen. Dies können wir analytisch dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir die Dämpfung einer der beiden resultierenden Schwingungen zu

[1]) Statt der eingeführten Korrektion C_1' ist im folgenden C_1 geschrieben.

Null machen. Dadurch erhalten wir eine Beziehung unter den Koeffizienten de entwickelten Kopplungsgleichungen, welche nicht nur die Grundlage zur Theorie des Zwischenkreissenders bildet, sondern auch den wesentlichen Unterschied gegenüber der Theorie der freien Schwingungen ausmacht, wie nun im einzelnen zu zeigen sein wird.

3. Entwicklung der Beziehungen am Zwischenkreissender. Bei Bestimmung von Frequenz und Dämpfung der Schwingungen führt der im vorigen Artikel mitgeteilte Ansatz bekanntlich auf eine algebraische Gleichung vierten Grades:

$$\left(L_1 x^2 + R_n x + \frac{1}{C_1}\right)\left(L_2 x^2 + R_2 x + \frac{1}{C_2}\right) - L_{12}^2 x^4 = 0. \tag{1}$$

Ordnen wir nach Potenzen von x, so erhalten wir das Polynom:

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \tag{2}$$

dessen Koeffizienten sind:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= L_1 L_2 - L_{12}^2 \\ \beta &= L_1 R_2 + L_2 R_n \\ \gamma &= \frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_2 R_n \\ \delta &= \frac{R_2}{C_1} + \frac{R_n}{C_2} \\ \varepsilon &= \frac{1}{C_1 C_2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um nun die beiden resultierenden Schwingungen zu finden, haben wir (2) zu zerspalten in:

$$\alpha (x^2 + 2 d_1 x + \omega_1^2)(x^2 + 2 d_2 x + \omega_2^2).$$

Da nun die Dämpfung einer dieser beiden Schwingungen beständig Null sein soll, nämlich die, in der die Röhre schwingt, so können wir d_1 gleich Null setzen:

$$\alpha (x^2 + \omega_1^2)(x^2 + 2 d_2 x + \omega_2^2). \tag{4}$$

Identifizieren wir dieses Polynom mit (2), so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= 2 d_2 \\ \frac{\gamma}{\alpha} &= \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ \frac{\delta}{\alpha} &= 2 d_2 \omega_1^2 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha} &= \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und daraus:

$$\left.\begin{aligned} 2 d_2 &= \frac{\beta}{\alpha} \\ \omega_1^2 &= \frac{\delta}{\beta} \\ \omega_2^2 &= \frac{\varepsilon \beta}{\alpha \delta} \\ \beta \gamma \delta &= \alpha \delta^2 + \varepsilon \beta^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die letzte Beziehung ist die gesuchte unter den Koeffizienten der algebraischen Gleichung. An ihr fällt bereits auf, daß sie sich als homogene quadratische Form in β und δ darstellt, woraus der singuläre Charakter des Punktes

$$\beta = 0 \qquad \delta = 0 \tag{7}$$

erhellt. Für diesen Fall wird (2) ein Polynom in x^2, oder die Dämpfung beider resultierender Schwingungen ist Null. Dies ist aber der einzige Fall dieser Art, in allen anderen Fällen ist die Dämpfung der zweiten resultierenden Schwingung positiv oder negativ.

Wir haben jedoch in erster Linie die allgemeinen Beziehungen und Zusammenhänge in Betracht zu ziehen.

Die Werte von (3) in die letzte Beziehung von (6) eingesetzt, ergibt:

$$R_n R_2 \left[\left(R_n L_2 + R_2 L_1 \right) \left(\frac{R_n}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) + \left(\frac{L_2}{C_1} - \frac{L_1}{C_2} \right)^2 \right] + L_{12}^2 \left(\frac{R_n}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right)^2 = 0 \qquad (8)$$

Vor allem ist da nun der Nachweis zu führen, daß $-R_n$ nichts anderes als der im Primärkreis durch den Sekundärkreis induzierte effektive Widerstand ist. Wie aus der Theorie der Wechselströme bekannt ist, stellt sich dieser bei sinusförmigen Strömen gleicher Amplitude von der Frequenz ω_1 dar durch:

$$-R_n = \frac{(L_{12}\,\omega_1)^2 \cdot R_2}{R_2^2 + \left(L_2\,\omega_1 - \frac{1}{C_2\,\omega_1} \right)^2} \qquad (9)$$

Die Elimination von ω_1 vermöge der zweiten Beziehung in (6)

$$\omega_1^2 = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\frac{R_2}{C_1} + \frac{R_n}{C_2}}{L_1 R_2 + L_2 R_n} \qquad (10)$$

ergibt in der Tat (8). Wir bezeichnen daher (8) als Gleichung für den induzierten Widerstand. Indem wir weiterhin aus (10) $-R_n$ ausrechnen:

$$-R_n = R_2 \cdot \frac{L_1\,\omega_1^2 - \frac{1}{C_1}}{L_2\,\omega_1^2 - \frac{1}{C_2}} \qquad (11)$$

und in (9) einsetzen, erhalten wir die Frequenzgleichung

$$\left(L_1 \omega_1^2 - \frac{1}{C_1} \right) \left[R_2^2 \omega_1^2 + \left(L_2 \omega_1^2 - \frac{1}{C_2} \right)^2 \right] - L_{12}^2\, \omega_1^4 \left(L_2 \omega_1^2 - \frac{1}{C_2} \right) = 0. \qquad (12)$$

Diese Frequenzgleichung ergibt sich nun aber auch noch auf andere Weise. Wir brauchen nur zu erinnern, daß sich aus der Nullsetzung des Polynoms in (4) ergibt:

$$x^2 + \omega_1^2 = 0.$$

Indem wir also in (1) $\omega \sqrt{-1}$ statt x setzen und den Wert von $-R_n$ in (11) einsetzen, muß sich (12) ergeben, was auch zutrifft.

Wenn wir nunmehr herantreten, die physikalische Bedeutung dieser beiden Beziehungen (8) und (12) auseinanderzusetzen, so müssen wir uns darüber Klarheit verschaffen, welche von den Größen wir ändern wollen. Da wird es keiner weiteren Erläuterung bedürfen, daß eine Änderung der elektrischen Größen des Primärkreises die Erscheinungen eher verschleiern als klären würde, vielmehr kommen hierfür nur L_2 und C_2 des Sekundärkreises in Betracht, und zwar sind beide Fälle physikalisch vollkommen gleichberechtigt.

Wir betrachten zunächst C_2 als unabhängige Variabel, indem L_2 konstant bleibt. Es ist dieser Fall experimentell und begrifflich der einfachere. In beiden Fällen aber treten in (8) und (12) beziehlich der induzierte Widerstand $-R_n$ und die Frequenz ω_1 als abhängige Variabel auf.

4. Die Kapazität C_2 veränderlich.

Schon im vorigen Artikel bemerkten wir, daß im Punkte:

$$\beta = L_1 R_2 + L_2 R_n = 0 \qquad \delta = \frac{R_2}{C_1} + \frac{R_n}{C_2} = 0 \qquad (1)$$

die Dämpfung beider resultierender Schwingungen zu Null wird. Wenn wir nun C_2 und $-R_n$ als variabel betrachten und nach diesen Größen ausrechnen, so erhalten wir:

$$-R_n = \frac{L_1 R_2}{L_2} \qquad C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \tag{2}$$

Betrachten wir den allgemeinen Ausdruck für die Dämpfung der zweiten resultierenden Schwingung zufolge (6) des vorigen Artikels:

$$2\, d_2 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{L_1 R_2}{L_2} + R_n}{L_1 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right)}, \tag{3}$$

so ist ohnehin zu erkennen, daß diese Dämpfung negativ wird, sobald der soeben in (2) ermittelte Wert des induzierten Widerstandes überschritten wird. Denn der Nenner ist stets positiv. Dann wird der Zustand des Senders aber ein labiler, indem er jederzeit die zweite Schwingung bevorzugen kann. Wir bezeichnen daher den Wert $\frac{L_1 R_2}{L_2}$ als „kritischen" induzierten Widerstand.

Um diese Verhältnisse klarer zu durchdringen, ist es eine Vorbedingung, die zu untersuchenden Beziehungen möglichst zu vereinfachen. Eine solche Vereinfachung gelingt durch Einführung neuer Maßeinheiten. So nehmen wir als Maßeinheit für den induzierten Widerstand den kritischen Wert, setzen also:

$$-R_n = \frac{L_1 R_2}{L_2} \cdot r. \tag{4}$$

Ebenso nehmen wir als Maßeinheit für die veränderliche Kapazität C_2 den Resonanzwert:

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot c. \tag{5}$$

Da die Frequenz in der Frequenzgleichung quadratisch eingeht, können wir das Quadrat der primären Frequenz als Einheit auftragen:

$$\omega_1^2 = \frac{p}{L_1 C_1}. \tag{6}$$

Zu diesen Variabeln r, c, p kommen die Parameter:

$$\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} = m \qquad \frac{L_1 C_1 R_2^2}{L_2^2} = n. \tag{7}$$

Die Größen sind ebenfalls leicht zu deuten. Es ist m das Quadrat des Kopplungskoeffizienten, n ist das Quadrat des durch π dividierten logarithmischen Dämpfungsdekrements des Sekundärkreises, wenn wir die primäre Frequenz $\sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}}$ einführen. Beide Größen sind im allgemeinen kleiner als $\frac{1}{100}$.

Führen wir diese Substitutionen aus, so erhalten wir für die Beziehungen des induzierten Widerstandes und der Frequenz:

$$\left.\begin{aligned} n\,c\,r\,(r-1)(r-c) + r\,(c-1)^2 - m\,(r-c)^2 &= 0 \\ (p-1)\left[p\,n + \left(p - \frac{1}{c}\right)^2\right] - m\,p^2 \left(p - \frac{1}{c}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Beziehung unter den Variabeln erhält man aus (10) und (11) des vorigen Artikels:

$$p = \frac{r-c}{c\,(r-1)} \qquad \text{oder } r = \frac{p-1}{p - \frac{1}{c}} \tag{9}$$

Die Kurven in (8) gehen durch die rationale umkehrbare Substitution in (9) ineinander über und sind daher algebraisch gleichwertig[1]).

Ordnen wir die Dämpfung der zweiten resultierenden Schwingung den neuen Maßeinheiten ein, so werden wir setzen:

$$d_2 = \frac{d_2'}{\sqrt{L_1 C_1}}. \tag{10}$$

Dann geht die Beziehung (3) über in:

$$2\, d_2' = \sqrt{n} \cdot \frac{1 - r}{1 - m}. \tag{11}$$

Ein Bild von dem Verlauf dieser Dämpfung gibt also die Funktion:

$$1 - r.$$

Zur Untersuchung des Verlaufs der Kurven wird die Anwendung einiger kurventheoretischer Lehrsätze unvermeidlich. So ist es in erster Linie notwendig, den singulären Punkt:

$$\beta = 0 \qquad \delta = 0 \qquad \text{oder } c = 1 \qquad r = 1,$$

in welchem der Zustand des Senders ein indifferenter wird, näher zu untersuchen. Wir schreiben die Gleichung des induzierten Widerstandes in der Form:

$$n\, c\, r\, (r - c)\,[(r - c) + (c - 1)] + r\,(c - 1)^2 - m\,(r - c)^2 = 0$$

oder

$$r\,(c - 1)^2 + n\, c\, r\,(c - 1)(r - c) + (n\, c\, r - m)(r - c)^2 = 0, \tag{12}$$

in welcher sie als quadratische homogene Form in $(c - 1)$ und $(r - c)$ erscheint. Dieser Punkt, welchen wir als P_0 in den Abbildungen bezeichnen, ist daher ein Doppelpunkt der Kurve, und wir erhalten die Gleichung für die beiden Tangenten in demselben, wenn wir in den Koeffizienten der quadratischen Form (12) jedesmal

$$c = 1 \qquad r = 1$$

setzen. Das ergibt:

$$(c - 1)^2 + n\,(c - 1)(r - c) + (n - m)(r - c)^2 = 0. \tag{13}$$

Die quadratische Form ist in ihre Linearfaktoren zerlegt zu denken. Sind diese konjugiert imaginär, so ist der Doppelpunkt P_0 ein isolierter, also wenn:

$$m < n\left(1 - \frac{n}{4}\right). \tag{14}$$

Diesen Fall werden wir im folgenden Artikel behandeln. Im Falle:

$$m = n\left(1 - \frac{n}{4}\right) \tag{15}$$

fallen die Tangenten in eine zusammen, und die Kurve artet in P_0 zu einer Spitze aus.

[1]) Für die Beurteilung des mathematischen Zusammenhanges ist dabei wesentlich, daß die Kurven auf eine Abhängigkeit mit nur einem Parameter zurückgeführt werden können durch die Substitution:

$$p = \frac{1}{1 - \varkappa} \qquad c = \frac{1 - \varkappa}{1 - \lambda m} \qquad r = \frac{\varkappa}{\lambda m}.$$

Wird dann $\frac{n}{m^2} = \mu$ gesetzt, so erhalten wir die Beziehung:

$$\varkappa \lambda^2 - \lambda - \mu \varkappa (\varkappa - 1) = 0$$

Diese ist als der Kern des algebraischen Zusammenhanges zu betrachten, und der Abstieg zu den $\varkappa$-, λ-Variabeln vereinfacht manche der auszuführenden Rechnungen wesentlich. Die Reduktion hängt mit dem Umstand zusammen, daß die Frequenzgleichung von Art (3), (12) die Größen L_2 und C_2 nur in der Verbindung:

$$L_2 \omega_1^2 - \frac{1}{C_2}$$

aufweist. Daher ist auch der Parameter:

$$\mu = \frac{L^3{}_1 C_1 R_2{}^2}{L_1{}^4{}_2}$$

von L_2 ganz unabhängig. Somit liegt auch den Abhängigkeiten, in welchen L_2 variabel ist, diese Beziehung zugrunde.



Wir bezeichnen diesen Fall als **kritische Kopplung**. Da $\frac{n}{4}$ klein gegen 1 ist, so stimmt der Fall physikalisch mit

$$m = n \qquad (16)$$

überein. Mathematisch werden wir drei Fälle der kritischen Kopplung unterscheiden. Wir bemerken zuvor, daß bei exakter mathematischer Auseinandersetzung der Fall der kritischen Kopplung einige Komplikationen aufweist.

Im Falle

$$m > n \cdot \left(1 - \frac{n}{4}\right) \qquad (17)$$

sind die beiden Tangenten reell und verschieden, die Kurve des induzierten Widerstandes schneidet sich in P_0 selbst.

5. Verlauf der Kurven im Falle, daß der Doppelpunkt P_0 ein isolierter ist.

Bild 3a und b.

Ist die Bedingung (14) des vorigen Artikels erfüllt, so meidet die Kurve für den induzierten Widerstand den Doppelpunkt P_0. Sie kann den kritischen Wert $r = 1$

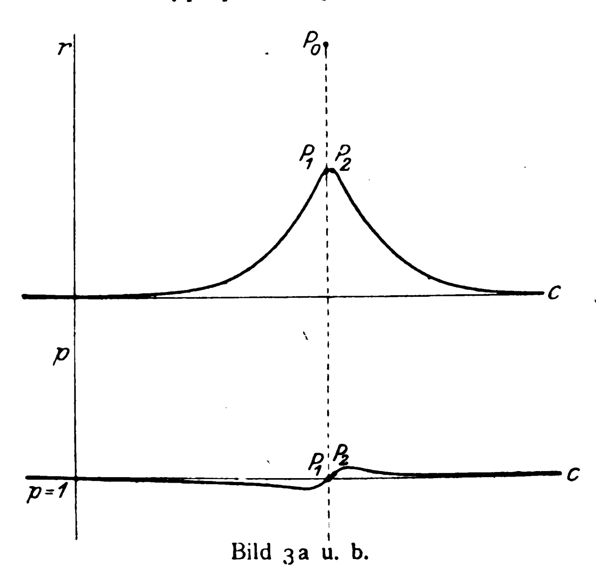


Bild 3a u. b.

aber nicht an einem anderen Ort erreichen oder überschreiten, denn setzen wir in die Gleichung für r den Wert 1 ein, so folgt die Doppelwurzel:

$$(c - 1)^2 = 0$$

also P_0 und kein anderer Punkt. Zufolge (3) oder (11) des vorigen Artikels ist daher die Dämpfung der zweiten resultierenden Schwingung stets positiv, **der Zustand des Senders in jedem Punkte ein stabiler.** Andererseits muß aber dem Resonanzwert der Kapazität des Sekundärkreises $c = 1$ eine brauchbare Lösung entsprechen. Wir erhalten:

$$(r - 1)^2 (n r - m) = 0. \qquad (1)$$

Nach Ausscheidung der Doppelwurzel ergibt sich:

$$r = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

und dieser Wert ist kleiner als der kritische, wenn

$$m < n$$

ist, um so mehr für die gemachte Voraussetzung



$$m < n\left(1 - \frac{n}{4}\right).$$

Diese Lösung in (2) ist für unsere Untersuchung von besonderer Bedeutung. Ermitteln wir die zugehörige Frequenz, indem wir in die Substitution (9) des vorigen Artikel $c = 1$ setzen und $(r - 1)$ herausheben, so wird:

$$p = 1. \tag{3}$$

Es ändert also der Sekundärkreis bei Resonanz die primäre Frequenz nicht. Dieser Fall kann daher mit mechanischer Erzeugung der Schwingungen verglichen werden, weshalb wir den aufgefundenen Punkt als Generatorlösung des Senders bezeichnen. In den Bildern ist der Punkt mit P_1 bezeichnet.

Die Feststellung der Maxima und Minima von r und p gibt weiterhin Einsicht in den Verlauf der Kurven. Bei dieser Untersuchung tritt aber bereits der Umstand hervor, daß die Kurven ihrem Range gemäß zweiteilig sind. Nur der eine Kurvenzug entspricht den physikalischen Verhältnissen, während der andere zu verwerfen ist. Eine nähere Untersuchung zeigt, daß für die Kurve des induzierten Widerstandes der zweite unbrauchbare Kurvenzug bei den gewählten Maßeinheiten vom Koordinatenanfangspunkt sehr weit abliegt — er enthält allein drei von den vier Asymptoten der Kurve — und es können die für den physikalischen Kurvenzug nicht zutreffenden Werte sogleich an ihrer abnormen Größenordnung erkannt werden.

Die anzustellende Untersuchung vereinfacht sich dadurch wesentlich, daß bei beiden Kurven die Variabel c nur bis zum zweiten Grade ansteigt. Für ein Maximum oder Minimum von r oder p müssen ersichtlich die beiden zugehörigen Werte von c beziehlich zusammenfallen. Diese Werte für r und p erhält man, indem man die quadratischen Gleichungen für c auflöst und den unter der Quadratwurzel entstehenden Ausdruck Null setzt.

Beginnen wir mit der Kurve des induzierten Widerstandes. Indem man nach c ausrechnet, wird der unter der Quadratwurzel stehende Ausdruck:

$$(r - 1)^2 \cdot r \cdot \left[r^3 \frac{n^2}{4} - r\,n + m\right]. \tag{4}$$

Die Doppelwurzel

$$(r - 1)^2 = 0$$

bezieht sich auf den Doppelpunkt P_0. Man erhält auch ohne weiteres die bereits gefundenen Kriterien, ob P_0 ein isolierter Punkt oder eine Spitze der Kurve oder ein Punkt ist, in dem die Kurve sich selbst schneidet. Ist der Ausdruck in (4) in der Umgebung von $r = 1$ negativ, so ist der Punkt ein isolierter usw.

Wir kommen sodann zu der Wurzel

$$r = 0.$$

Ihr entspricht

$$c^2 = 0.$$

Diese Lösung bedeutet Öffnen des Sekundärkreises. Die zugehörige Frequenz ist daher auch:

$$p = 1$$

wie sich aus der Frequenzgleichung nach Multiplikation von c^2 und Nullsetzung von c ergibt.

Es bleibt übrig die kubische Gleichung:

$$r^3 \frac{n^2}{4} - r\,n + m = 0.$$

Da $r^3 \frac{n^2}{4}$ sehr klein gegen $r\,n$ und m ist, so liegt eine Wurzel[1]) nahe bei $r = \frac{m}{n}$ und zwar ist sie sehr wenig größer. Dies ist nun der induzierte Widerstand der Generator-

[1]) Die beiden anderen Wurzeln liegen näherungsweise bei $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$ und sind zu verwerfen, wie schon aus ihrer Größenordnung ersichtlich.

lösung P_1, und wie es physikalisch wahrscheinlich ist, wird in nächster Nähe von P_1 ein Maximum des induzierten Widerstandes zu suchen sein.

Der Ort dieses Maximums läßt sich am einfachsten dadurch feststellen, daß man erstens den Punkt der Kurve aufsucht, in dem derselbe induzierte Widerstand erreicht wird wie in P_1. Wir werden also setzen:

$$r = \frac{m}{n}$$

und es folgt außer $c = 1$

$$c = \frac{1 - \frac{m^2}{n}}{1 - m}. \tag{5}$$

Aus $m < n$ folgt $\frac{m^2}{n} < m$ und:

$$1 - \frac{m^2}{n} > 1 - m,$$

mithin ist der Kapazitätswert dieses Punktes wenig größer als die Resonanzkapazität. Das Maximum liegt aber zwischen diesen beiden Werten. Zweitens läßt sich aus der Richtung der Tangente in P_1 ersehen, in welchem Maße das Maximum sich von dem in P_1 (und P_2) induzierten Widerstand unterscheidet. Die Gleichung der Tangente in P_1 ist gegeben durch:

$$\frac{r - \frac{m}{n}}{c - 1} = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1 - \frac{m}{n}}.$$

Die Richtung der Tangente hängt also nur von $\frac{m}{n}$ ab. In Bild 3 ist $\frac{m}{n}$ ungefähr $1/2$, der tg der Richtung daher $1/2$.

Da der in (5) aufgefundene Punkt in der Nähe der Resonanzlage sich befindet, ist er auch für die folgende Untersuchung von Bedeutung, und wir geben ihm daher eine besondere Bezeichnung P_2. Die Bestimmung der Frequenz vermöge der Substitution (9) des vorigen Artikels ergibt:

$$p = \frac{1}{1 - \frac{m^2}{n}}. \tag{6}$$

Sie ist also größer als in P_1.

Dieselbe Untersuchung über Maxima und Minima führen wir an der Frequenzgleichung durch. Wir lösen die Gleichung nach $\frac{1}{c}$ oder besser nach $p - \frac{1}{c}$ auf und erhalten:

$$\frac{1}{c} = p - \frac{m\,p^2}{2(p-1)} \pm \frac{1}{2(p-1)} \cdot \sqrt{p\,[m^2 p^3 - 4\,n\,(p-1)^2]}. \tag{7}$$

Der Ausdruck unter der Quadratwurzel:

$$p\,[m^2 p^3 - 4\,n\,(p-1)^2] \tag{8}$$

ist dann Null zu setzen. Die Wurzel $p = 0$ ist zu verwerfen, wie ohnehin klar ist. Was den übrigbleibenden kubischen Faktor anbetrifft, so können wir in den Sachverhalt am klarsten einsehen, wenn wir die ursprünglichen Variabeln einführen. Aus (8) ergibt sich zunächst:

$$m^2 p^2 = 4\,\frac{n}{p}\,(p-1)^2,$$

oder indem wir die Wurzel ausziehen:

$$m\,p = \pm 2\sqrt{\frac{n}{p}} \cdot (p-1) \tag{9}$$

erhalten wir zufolge (5), (6), (7) in Artikel 4:

$$\pm \frac{1}{2} \frac{(L_{12}\,\omega_1)^2}{R_2} = L_1\,\omega_1 - \frac{1}{C_1\,\omega_1}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite liegt in der Größenordnung des induzierten Widerstandes, während die Scheinwiderstände $L_1\,\omega_1$ und $\frac{1}{C_1\,\omega_1}$ viel größer als dieser sind. Somit folgt, daß zwei Wurzeln der Gleichung vom Vorzeichen abgesehen sich in der Nähe von $\frac{1}{\sqrt{L_1\,C_1}}$ befinden, und zwar ist die eine kleiner, die andere größer als $\frac{1}{\sqrt{L_1\,C_1}}$. Diese beiden Wurzeln liegen auf dem physikalischen Teil der Kurve, während die dritte Wurzel von kleinerer Größenordnung ist und schon deshalb im voraus zu verwerfen ist. Da also nur zwei Werte in Betracht kommen, so folgt, daß die kleinere Wurzel ein Minimum ist und die größere ein Maximum.

Die zugehörigen Kapazitätswerte werden zufolge (7) bestimmt aus:

$$\frac{1}{c} = p - \frac{m\,p^2}{2\cdot(p-1)}. \tag{10}$$

Es ergibt sich aber aus (9)

$$\frac{m\,p^2}{2\,(p-1)} = \pm\sqrt{n\,p}.$$

Dies in (10) eingesetzt, ergibt für $\frac{1}{c}$:

$$\frac{1}{c} = p \mp \sqrt{n\,p}. \tag{11}$$

Ähnlich folgt aus (10) für die dem Maximum und Minimum der Frequenz zugehörigen Werte des induzierten Widerstandes:

$$r = \frac{p-1}{p-\frac{1}{c}} = 2\,\frac{(p-1)^2}{m\,p^2} = \frac{1}{2}\,\frac{m}{n}\cdot p.$$

Es ist aber $\frac{m}{n}$ der induzierte Widerstand, welcher bei Resonanz erreicht wird. Daher sind die dem Maximum und Minimum der Frequenz angehörenden Werte bei loser Kopplung annähernd gleich der Hälfte des Resonanzwertes und weichen von diesem Wert entsprechend der maximalen Frequenzänderung ab[1]).

Nehmen wir die Kopplung extrem lose, so wird $p = 1$, und wir erhalten die Grenzwerte:

$$\frac{1}{c} = 1 \mp \sqrt{n}. \tag{12}$$

Dieselben befinden sich nahe an der Resonanzlage, und zwar zu beiden Seiten derselben.

Führen wir wieder die ursprünglichen Größen ein, so wird aus (11)

$$\frac{1}{C_2\,\omega_1} = L_2\,\omega_1 \mp R_2.$$

Da $L_2\,\omega_1$ viel größer als R_2 ist, können wir zunächst allgemein aussprechen, daß in beiden Fällen C_2 beziehungsweise c positiv ist.

Die Untersuchung über dieses Maximum und Minimum der Frequenz haben nun für die Theorie insofern Bedeutung, als es möglich ist, mit Hilfe des Überlagerungsempfängers die Ergebnisse experimentell genau zu verfolgen, und es erscheint daher angezeigt, diesen Gegenstand noch eingehender zu behandeln.

---

[1]) Bild 3a ist in Rücksicht auf die Punkte P_1 und P_2, die nur $\frac{1}{2}$ mm auseinander liegen dürften, etwas breiter gezeichnet.

Dazu fassen wir zusammen, was wir bisher über den Verlauf der Frequenzkurve wissen. Die p-Achse wird bei $p = 1$ geschnitten, in der Resonanzlage in P_1 wird derselbe Wert erreicht, hingegen ist bei P_2 zufolge (6) die Frequenz größer. Mithin liegt zwischen $c = 0$ und $c = 1$ das Minimum, über $c = 1$ hinaus das Maximum, da ja in beiden Fällen c positiv ist. Mithin gehört der Grenzwert in (12):

$$\frac{1}{c} = 1 - \sqrt{n} \tag{13}$$

dem Maximum an, der andere dem Minimum. Und ebenso gilt allgemein für das Maximum nach (11)

$$\frac{1}{c} = p - \sqrt{n\,p}. \tag{14}$$

Nun ist dabei zu beachten, daß p als Maximum größer als 1 ist und mit zunehmender Kopplung wächst, während $\frac{1}{c}$ bei der gemachten Voraussetzung, daß P_0 isoliert ist, zufolge der zuletzt erhaltenen Ergebnisse stets kleiner als 1 ist. Da p schneller wächst als $\sqrt{n\,p}$, so muß c mit zunehmender Kopplung an die Resonanzlage heranrücken, und es muß eine Kopplung oberhalb der kritischen geben, bei der c in (14) gleich 1 wird[1]). Eine ähnliche Überlegung gilt für das Minimum. Nun ist aber bei loser Kopplung p sehr nahe an 1, und es folgt daraus, daß das Aneinanderrücken von Minimum und Maximum bei zunehmender Kopplung anfangs fast unmerklich vor sich geht[2]).

Wir hatten bereits festgestellt, daß bei Resonanz in der Generatorlösung P_1 der Sender die primäre Frequenz wiederum erreicht[3]). Wir befinden uns dann auf dem Wege vom Minimum zum Maximum, und es ist zu erwarten, daß in der Nähe von P_1 die größte Frequenzänderung stattfindet. Ein Einblick gewährt uns die Richtung der Tangente in P_1. Die Gleichung derselben ist:

$$\frac{p-1}{c-1} = \frac{1}{\frac{n}{m} - 1}. \tag{15}$$

Die Richtung der Tangente ist wiederum nur von dem in P_1 induzierten Widerstand $\frac{m}{n}$ abhängig, in Bild 3b etwa 45°. Um über die Lage des Wendepunktes etwas Genaueres auszusagen, betrachten wir die Frequenzgleichung in den Variabeln p und $\frac{1}{c}$. Dann ist die Gleichung der Tangente in P_1:

$$\frac{p-1}{\frac{1}{c} - 1} = -\frac{1}{\frac{n}{m} - 1}.$$

Diese schneidet die Kurve nochmals in P_2, wie man durch Einsetzen der Koordinaten von P_2 findet. Es liegt daher der Ort größter Frequenzänderung unmittelbar bei P_1, also bei Resonanz.

Es hat noch ein Interesse, die Frequenzänderung zu bestimmen, welche die kurzgeschlossene Spule auf den Primärkreis ausübt. Dieser Fall ist dargestellt durch $c = \infty$. Aus der Frequenzgleichung folgt dann:

$$(p-1)(p+n) - m\,p^2 = 0.$$

---

1) Und zwar für $\frac{m}{n} = 2\left(1 - \sqrt{\frac{m}{2}}\right)$.

2) Durch Feststellung der Lage von Maximum und Minimum mit Hilfe eines Überlagerungsempfängers kann daher bei loser Kopplung und einer Welle unter 1000 aus (12) die Dämpfung $\sqrt{n}$ des Sekundärkreises ermittelt werden.

3) Durch Öffnen und Schließen des Sekundärkreises kann man also denselben durch den Ton eines Überlagerungsempfängers auf die primäre Frequenz einstimmen.



Indem wir nach p ausrechnen:

$$p = \frac{(1-n) + \sqrt{(1+n)^2 - 4nm}}{2 \cdot (1-m)}.$$

Da ist $4nm$ gegen $(1+n)^2$ zu vernachlässigen, und man erhält:

$$p = \frac{1}{1-m}.$$

Die Formel gilt in erster Annäherung sowohl für freie wie erzwungene Schwingungen [1]).

6. Kritische Kopplung.

Wenn wir nunmehr die Kopplung so vergrößern, daß der maximale induzierte Widerstand sich dem kritischen Widerstand nähert, so gewinnen die Abbildungen ein wesentlich anderes Aussehen (Bild 4–6). Wie bereits bemerkt, unterscheiden wir theoretisch drei Fälle. Wir beginnen zunächst mit dem einfachsten. Dies ist der Fall, in dem der kritische Widerstand in der Resonanzlage erreicht wird, in dem also die Generatorlösung P_1 mit P_0 zusammenfällt. Dann fällt auch der Punkt P_2 mit P_0 zusammen, da er mit P_1 auf gleicher Höhe liegt.

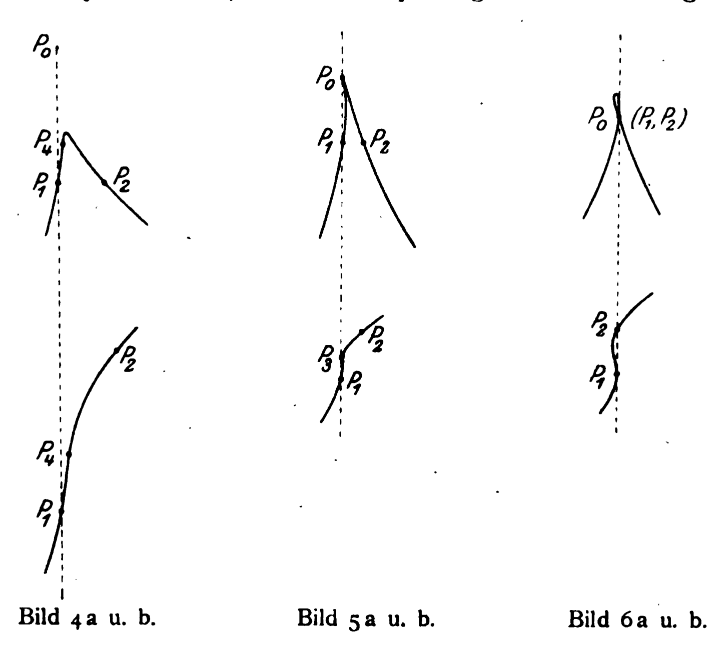


Bild 4a u. b. Bild 5a u. b. Bild 6a u. b.

Zufolge (1) und (2) des vorigen Artikels besteht dann:

$$m = n. \tag{1}$$

Die Kurve des induzierten Widerstandes schneidet im Doppelpunkte P_0 nunmehr sich selbst, und so existieren daher in P_0 zwei reelle Tangenten, für die man unter Anwendung von (1) zufolge (13) in Artikel 4 erhält:

$$(c-1)^2 + n(c-1)(r-c) = 0$$

oder

$$c - 1 = 0 \qquad nr = -c(1-n) + 1.$$

Die erste Tangente steht zur c-Achse senkrecht, die zweite ist gegen die erste ein wenig darüber hinaus geneigt. Die Kurve berührt daher in P_0 die Resonanzgerade, kehrt um eine sehr kleine Schleife beschreibend und schneidet unter spitzem Winkel sich selbst (Bild 6a).

[1]) Die Frequenzänderung kann wiederum durch den Überlagerungsempfänger festgestellt werden. Aus Frequenz und Frequenzänderung ergibt sich dann m. Die Methode, den Kopplungskoeffizienten aus der Verstimmung, die die kurzgeschlossene Sekundärspule hervorruft, zu berechnen, rührt von Kiebitz, Verhandlungen der d. physikalischen Gesellschaft. XV. Jahrg. Nr. 23.

Der Verlauf der Frequenzkurve ergibt sich, wenn wir den Durchschnitt der Resonanzgeraden durch die Kurve betrachten. Setzen wir in der Frequenzgleichung $c = 1$, so ergibt sich zunächst allgemein:

$$(p - 1)\cdot[(p - 1)^2 + p\,n - m\,p^2] = 0. \tag{2}$$

Der erste Faktor gehört der Generatorlösung an, den zurückbleibenden quadratischen Faktor schreiben wir

$$(p - 1)^2 - n(p - 1)\cdot p + (n - m)\,p^2 = 0$$

und erkennen, daß nach den in (14) und (17) in Artikel 4 abgeleiteten Kriterien die Punkte imaginär oder reell sind. Für den zu untersuchenden Fall in (1) erhalten wir daher die drei Lösungen:

$$(p - 1)^2[(1 - n)\,p - 1] = 0$$

und lesen daraus ab, daß die Frequenzkurve die Resonanzgerade in P_1 berührt, sodann zurückkehrend dieselbe in dem oberhalb P_1 gelegenen Punkte P_2 durchschneidet (Bild 6b).

Wir betrachten den zweiten Fall der kritischen Kopplung, in welchem die Kurve des induzierten Widerstandes in P_0 zu einer Spitze ausartet (Bild 5a). Daselbst ist dann zugleich das Maximum der Kurve. Nach (15) in Artikel 4 besteht:

$$m = n\left(1 - \frac{n}{4}\right). \tag{3}$$

Die Generatorlösung P_1 liegt noch sehr wenig unter P_0 nämlich zufolge (3) bei:

$$r = \frac{m}{n} = 1 - \frac{n}{4}.$$

Die Kurve des induzierten Widerstandes tritt in P_1 durch die Resonanzgerade hindurch, um in P_0 zu ihr wieder zurückzukehren. Dieses Übertreten über die Resonanzgerade ist aber ganz außerordentlich geringfügig, denn berechnen wir den Ort des weiter abliegenden Punktes P_2, so erhalten wir:

$$c = \frac{1 - \frac{m^2}{n}}{1 - m} = \frac{1 - n\left(1 - \frac{n}{4}\right)^2}{1 - n\left(1 - \frac{n}{4}\right)} = 1 + * + \frac{n^2}{4} + \ldots \tag{4}$$

Schon bei P_2 ist für c das Glied erster Ordnung null. Die Gleichung der Doppeltangente wird zu:

$$\frac{n}{2}\,r = -c\left(1 - \frac{n}{2}\right) + 1 \tag{5}$$

und sie bildet mit der Ordinate einen noch spitzeren Winkel als zuvor.

Die Frequenzkurve ist wiederum durch den Schnitt mit der Resonanzgeraden gekennzeichnet. Aus (2) ergibt sich

$$(p - 1\left[\left(1 - \frac{n}{2}\right)p - 1\right]^2 = 0.$$

Die Kurve durchschneidet jetzt die Resonanzgerade in P_1, während sie zurückkehrend dieselbe in einem Punkte P_3 berührt, welcher nunmehr allein dem Doppelpunkte P_0 entspricht[1]) (Bild 5b).

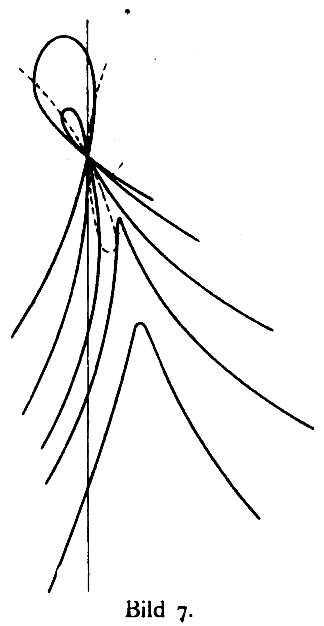
Obwohl bei noch loserer Kopplung der kritische Widerstand nicht mehr überschritten werden kann, sind die theoretischen Erörterungen über die kritische Kopp-

[1]) Dieser Fall gestattet am einfachsten, den Ort von Maximum und Minimum der Frequenz bei kritischer Kopplung zu ermitteln. Denn die kubische Gleichung für p in Artikel (5), (9)

$$m\,p^{\frac{3}{2}} \mp 2n^{\frac{1}{2}}(p - 1) = 0$$

zerfällt für diesen Fall zufolge der Bedingung $m = n\cdot\left(1 - \frac{n}{4}\right)$ in:

lung hiermit noch nicht erschöpft. Lassen wir Bild 5a und b kontinuierlich übergehen in Bild 3a und b, so wird ein Stadium eintreten, bei welchem die Kurven nicht mehr zurücklaufen, aber in einem bestimmten Punkte noch senkrecht ansteigen. In diesem Punkte, der überaus nahe an der Resonanzgeraden liegt, haben dann die Kurven eine Wendetangente, die der Ordinatenachse parallel läuft. Dieser dritte Fall ist mathematisch am interessantesten. Er steht in enger Beziehung zu den Eigenschaften der elliptischen Funktionen[1]). Eine Entwicklung dieses Zusammenhanges geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Um den Fall entwickeln zu können, nehmen wir die Differentialgeometrie zu Hilfe. Allerdings bleibt uns diese Methode die tiefere Begründung der algebraischen Eigentümlichkeiten des Resultates schuldig.


Bild 7.

Wir betrachten die Frequenzkurvenscharen des induzierten Widerstandes, welche bei Änderung der Kopplung erhalten werden (Bild 7) und ermitteln den geometrischen Ort der Rückkehrpunkte. Dazu schreiben wir die Gleichung des induzierten Widerstandes zufolge (12) in Artikel 4 in der Form:

$$\varphi = \frac{r(c-1)^2}{(r-c)^2} + \frac{n\,c\,r\,(c-1)}{(r-c)} + n\,c\,r - m = 0. \qquad (6)$$

Bei Differentiation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} \cdot \frac{d c}{d r} = 0$$

fällt die Kopplungsgröße m heraus. Für die Rückkehrpunkte wird $\frac{dc}{dr}$ zu Null. Mithin ergibt sich die gesuchte Kurve aus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Diese Rechnung ergibt die Gleichung:

$$(r+c)(c-1)^2 - c\,n\,[(r-c)^3 - (r-c)\cdot(c-1)\cdot c] = 0. \quad (7)$$

$$\left[(n\,p)^{\frac{1}{2}} \mp 2\right]\left[\left(1-\frac{n}{4}\right)p \mp \frac{1}{2}(n\,p)^{\frac{1}{2}} - 1\right].$$

Die in Frage kommenden Frequenzen enthält dann der zweite Faktor. Für das Maximum ergibt sich:

$$p^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{n} + \sqrt{1-\frac{3}{16}n}}{1-\frac{n}{4}} = 1 + \frac{1}{4}n^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{32}n \ldots$$

$$p = \qquad 1 + \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}n \ldots$$

Zufolge Artikel 5, (11)

$$\frac{1}{c} = p - \sqrt{n\,p} = 1 - \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}n \ldots$$

Bei kritischer Kopplung ist also das Maximum ungefähr halb so weit von der Resonanzlage entfernt wie der Grenzwert bei extrem loser Kopplung in Artikel 5, (13). Für das Minimum gilt das positive Vorzeichen von $\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}$.

[1]) Indem wir zu den $\varkappa$, λ, μ Größen hinabsteigen, ist das algebraische Problem in tranzendenter Form dargestellt durch die Dreiteilung des bestimmten elliptischen Integrals:

$$\int_{\infty}^{0} \frac{d\varkappa}{\sqrt{4\,\mu\,\varkappa^2(\varkappa-1)+1}}.$$

Diese Kurve hat wiederum in P_0 einen Doppelpunkt, dessen Tangenten gegeben sind aus:

$$2(c-1)^2 + n(c-1)(r-c) = 0$$

oder

$$c - 1 = 0 \qquad \frac{n}{2} r = -c\left(1 - \frac{n}{2}\right) + 1.$$

Mithin berührt die Kurve bei dem einen Durchgang durch P_0 die Resonanzgerade, bei dem anderen Durchgang hat sie zufolge (5) die Richtung der Spitze in P_0 im zweiten Falle der kritischen Kopplung.

Beim Durchlaufen der Schleife hat die Kurve (7) außer in P_0 noch einen zweiten Rückkehrpunkt. Dies ist aber der gesuchte Punkt, in welchem die Kurve des induzierten Widerstandes senkrecht ansteigt ohne zurückzulaufen, wie geometrisch ohnehin ersichtlich ist. In Bild 4 ist dieser Punkt mit P_4 bezeichnet. Wir können daher diesen Punkt finden, wenn wir dasselbe Verfahren auf die soeben gefundene Kurve (7) noch einmal anwenden. Um dabei n sogleich zu eliminieren, schreiben wir die Gleichung in der Form:

$$\varphi^1 = \frac{r + c}{(r - c)(r^2 - 2rc + c)} - \frac{cn}{(c-1)^2} = 0 \tag{8}$$

und bilden:

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial r}$$

dieser Ausdruck Null gesetzt ergibt die Abhängigkeit:

$$c^2 = -r^3 + 3rc^2 - c^3$$

oder

$$\frac{1}{c} = -\left(\frac{r}{c}\right)^3 + 3\left(\frac{r}{c}\right) - 1.$$

Führen wir den Parameter q ein vermittels

$$\frac{r}{c} = \frac{1}{1+q},$$

so wird:

$$c = \frac{(1+q)^3}{1 + 3q - q^3} \qquad r = \frac{(1+q)^2}{1 + 3q - q^3}$$

$$p = \frac{r - c}{c \cdot (r - 1)} = \frac{1 + 3q - q^3}{1 - 2q^2 - q^3}.$$

In derselben Weise können wir n und m nach (8) und (6) ausdrücken und erhalten:

$$m = \frac{(3 + 2q)^2 \cdot q}{(1 + 3q - q^3)(1+q)^3} \qquad n = \frac{(1 + 3q - q^3)(3 + 2q)^2 q}{(1+q)^6},$$

Aus den Formeln für m und n ersehen wir, daß der eingeführte Parameter q in erster Annäherung der neunte Teil von m und n ist, welche selber nahezu einander gleich sind $\left(\text{aber immerhin ist } m < n\left(1 - \frac{n}{4}\right)\right)$.

Ein Überblick über die Entwicklung gibt die Zusammenstellung:

	c	p	r
P_1:	1	1	$1 - 3q + 12q^2 + \ldots$
P_4:	$1 + {}^* + 3q^2 + \ldots$	$1 + 3q + 2q^2 + \ldots$	$1 - q + 4q^2 + \ldots$
P_2:	$1 + {}^* + 27q^2 + \ldots$	$1 + 9q + 12q^2 + \ldots$	$1 - 3q + 12q^2 + \ldots$

Indem wir q kleiner als $\frac{1}{1000}$ annehmen können, sehen wir aus den Werten von c, wie nahe P_4 und auch P_2 an der Resonanzgeraden liegt, und aus den Werten von p, daß der Sender an dieser Stelle sehr frequenzempfindlich ist. Es hat ein Interesse, die Lage von P_4 zum Maximum des induzierten Widerstandes näher anzugeben.

Das Ergebnis ist, daß der induzierte Widerstand nur noch um $\frac{1}{4}$ q wächst und die Kapazität nur um $\frac{3}{8}\, q^2$ zu vergrößern ist.

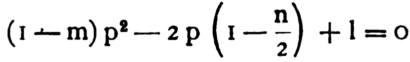
7. Verlauf der Kurven für den Fall, daß die kritische Kopplung überschritten ist.

(Bild 8a und b.)

Im Falle

$$m > n$$

schneidet sich die Kurve des induzierten Widerstandes stets in P_0. Es ist nunmehr ein leichtes, sich von dem Verlauf der Kurven eine Vorstellung zu machen. Die Generatorlösung P_1 rückt über den Punkt P_0, und P_2 kommt links von P_1 zu liegen. Die Schleife wird mit zunehmender Kopplung größer, indem sie sich auf beiden Seiten der Resonanzgeraden ausdehnt. Entsprechend hat die Frequenzkurve zu beiden Seiten der Resonanzgeraden je einen Rückkehrpunkt. Die Generatorlösung P_1 kommt auf den rückläufigen Teil der Frequenzkurve zu liegen, während die dem Doppelpunkt P_0 entsprechenden Lösungen, die sich nach (2) des vorigen Artikels aus:



$$(1-m)\,p^2 - 2\,p\left(1-\frac{n}{2}\right) + l = 0$$

ergeben, ober- und unterhalb von P_1 liegen. Man bemerkt leicht, daß diese Wellen sich bei zunehmender Kopplung den Kopplungswellen annähern, welche sich aus der Theorie der freien Schwingungen bei zu vernachlässigender Dämpfung ergeben.

Wie bereits in Artikel 4 ausgeführt, ist der Zustand des Senders in der über P_0 aufgesetzten Schleife ein labiler, weil daselbst der kritische Widerstand überschritten wird. Nun ist es tatsächlich möglich, den Sender sowohl von der einen, wie von der anderen Seite durch P_0 hindurch in das labile Gebiet hineinzuziehen, jedoch nur bis zum Rückkehrpunkt. Daselbst muß der Sender in den stabilen Zustand, also auf den kleineren zugehörigen induzierten Widerstand abfallen, während zuvor in jedem labilen Punkte nur die Möglichkeit besteht. Der rückläufige Teil der Kurven kann indessen in keiner Weise verwirklicht werden. Auf diesem Teile liegt nun aber gerade die Generatorlösung P_1 und es folgt, daß diese beim Überschreiten der kritischen Kopplung ausscheidet.

Bild 8a u. b.

8. Induktivität, L_2 veränderlich.

Wir betrachten noch kurz den Fall, daß C_2 konstant gehalten wird und die Selbstinduktion L_2 des Sekundärkreises geändert wird, um die Gleichwertigkeit beider Fälle nachzuweisen. Produzieren läßt sich der Fall, indem man eine drehbare Kopplungsspule mit wenigen Windungen für sich herstellt und von dieser getrennt eine veränderliche weit größere Selbstinduktion. (Variometer.)

Wegen der Kopplung kann die Selbstinduktion des Sekundärkreises nicht beliebig herabgesetzt werden, und die untere Grenze derselben ist gegeben durch:

$$L_1 L_2 = L_{12}^2 \qquad (1)$$

Für den vorliegenden Fall haben wir zu substituieren:

$$\left.\begin{array}{l} w_1^2 = \dfrac{p}{L_1 C_1} \qquad L_2 = \dfrac{L_1 C_1}{C_2}\cdot l \qquad -R_n = \dfrac{C_2 R_2}{C_1}\cdot r \\ \dfrac{L_{12}^2 C_2}{L_1^2 C_1} = m' \qquad \dfrac{R_2^2 C_2^2}{L_1 C_1} = n' \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Gleichung für den induzierten Widerstand kann dann geschrieben werden

$$r(l-1)^2 + n' r^2 (r-1)(l-1) + (n' r - m')(r-1)^2 = 0 \qquad (3)$$

und die Frequenzgleichung:

$$(p-1)[p n' + (l p - 1)^2] - m' p^2 (l p - 1) = 0.$$

Die Beziehung zwischen den Variabeln wird [1]:

$$p = \frac{1-r}{1-l r}.$$

Als Tangenten für den Doppelpunkt P_0 erhält man sogleich:

$$(l-1)^2 + n'(r-1)\cdot(l-1) + (n'-m')(r-1)^2 = 0. \qquad (4)$$

Die Kriterien bleiben also dieselben. Für $l = 1$ folgt wiederum

$$(r-1)^2 (n' r - m') = 0$$

und die Generatorlösung P_1 hat dieselben Werte:

$$r = \frac{m'}{n'} \qquad p = 1. \qquad (5)$$

Für den Punkt P_2 von gleichem induzierten Widerstand wird:

$$l = 1 - \frac{m'^2}{n'} + m', \qquad p = \frac{1}{1 - \frac{m'^2}{n'}}. \qquad (6)$$

Unter Voraussetzung, daß $m' < n'$ ist, wird $l > 1$, und p ist stets größer als 1. Somit liegt das Maximum des induzierten Widerstandes wiederum rechts von P_1. Auch geht dieselbe Gleichung für das Maximum hervor bei Auflösung der Gleichung des induzierten Widerstandes nach l oder $l-1$. Denn der Ausdruck unter der Quadratwurzel ist:

$$(r-1)^2 \cdot r \cdot \left[r^3 \frac{n'^2}{4} - r n' + m'\right] = 0.$$

Indessen berührt die Kurve die l-Achse nicht im Koordinatenanfangspunkt, sondern in $l = \infty$. Sie schneidet die r-Achse wenig oberhalb des Nullpunktes, auch kann l physikalisch zufolge (1) nicht unter:

$$l = m'$$

herabgehen. Dementsprechend weist für diesen Grenzwert die Frequenz eine Abweichung gegen die primäre Frequenz auf. In die Frequenzgleichung $l = m'$ gesetzt, ergibt:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(1 - n' + 2 m' + \sqrt{(1+n')^2 - 4 n' m'}\right).$$

Indem wir wiederum $4 n' m'$ gegen $(1 + n')^2$ vernachlässigen, erhalten wir

$$\frac{1}{p} = 1 + m'.$$

Hingegen bedeutet $l = \infty$ Öffnen des Sekundärkreises und der zugehörige Frequenzwert ist $p = 1$.

Die Theorie des Maximums und Minimums der Frequenz stimmt jedoch völlig überein. Man findet dieselben aus der Gleichung:

$$m'^2 p^3 - 4 n' (p-1)^2 = 0.$$

Die zugehörigen Werte von l und r werden dann:

$$l = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{m' p^2}{2(p-1)}\right) \qquad r = \frac{1-p}{1-l p}$$

oder

[1]) Um zu den $\varkappa$- λ-Größen zu gelangen, ist zu substituieren:

$$p = \frac{1}{1-\varkappa} \qquad l = 1 - \varkappa + \lambda m' \qquad r = \frac{\varkappa}{\lambda m'}.$$

$$l = \frac{1}{p} \pm \sqrt{\frac{n'}{p}}, \qquad r = \frac{1}{2}\frac{m'}{n'} \cdot p,$$

indem das positive Zeichen dem Maximum zugehört.

Die Vorgänge bei kritischer Kopplung sind durchaus dieselben, da sie sich in unmittelbarer Nähe der Resonanz abspielen.

Im Falle $m' = n'$ rückt die Generatorlösung P_1 nach dem Doppelpunkt P_0. Die Tangenten in P_0 sind bereits reell und voneinander verschieden. Zufolge (4):

$$l = 1 \qquad n' r = -l + n' + 1.$$

Im Falle, daß:

$$m' = n'\left(1 - \frac{n'}{4}\right),$$

ist in P_0 eine Spitze. Die Gleichung der Tangente wird zufolge (4):

$$\frac{n'}{2} \cdot r = -l + \frac{n'}{2} + 1.$$

Die Entwicklung der Abszisse von P_2 stimmt bis zu den Gliedern zweiter Ordnung mit (4) in Artikel 6 überein:

$$l = 1 - \frac{m'^2}{n'} + m' = 1 + * + \frac{n'^2}{4} + \ldots.$$

Für den dritten Fall erhalten wir als Ort der Rückkehrpunkte:

$$(r+1) \cdot (l-1)^2 - n'\left[r(r-2)(l-1)(r-1) + (r-1)^3\right] = 0.$$

Die Gleichung der Tangenten im Doppelpunkt P_0

$$2(l-1)^2 + n'(l-1) \cdot (r-1) = 0$$

oder

$$l = 1 \qquad \frac{n'}{2} r = -l + \frac{n'}{2} + 1$$

und schreiben wir die Gleichung:

$$\frac{r+1}{(r-1) \cdot \left(r^2 - 2r + \frac{1}{l}\right)} = \frac{l n'}{(l-1)^2},$$

so ergibt die nochmalige Differentiation nach r:

$$\frac{1}{l} = -r^3 + 3r - 1.$$

Indem gesetzt wird:

$$r = \frac{1}{1+q}$$

$$l = \frac{(1+q)^3}{1+3q-q^3} \qquad p = \frac{1-r}{1-lr} = \frac{1+3q-q^2}{1-2q^2-q^3}$$

$$m' = \frac{(3+2q)^2 \cdot q}{(1+3q-q^3)^2} \qquad n' = \frac{(3+2q)^2 \cdot q}{1+3q-q^3}.$$

Die Entwicklung der Koordinaten p und l der Punkte P_1 P_4 P_2 stimmen mit Artikel 6 bis zu Gliedern zweiter Ordnung überein. Die von r weichen um $3q^2$ ab, was aber nicht ins Gewicht fällt.

9. Vergleich der Ergebnisse mit der Wienschen Untersuchung über die Rückwirkung eines resonierenden Systems[1]).

Wie bereits am Schluß von Artikel 2 betont worden ist, besteht der eigentliche Unterschied der untersuchten Schwingungsart gegenüber den freien Schwingungen darin, daß in unserem Falle zwischen den einzelnen Größen von Primär- und Sekundär-

[1]) Wiedemanns Annalen Bd. 61, S. 151—189.

kreis eine Beziehung stattfindet, nämlich die Gleichung für den induzierten Widerstand, welche dadurch zustande kommt, daß die Dämpfung einer der beiden resultierenden Schwingungen immer Null sein muß. Diese Beziehung, welche bei den freien Schwingungen nicht vorhanden ist, bildet gerade die Grundlage der Theorie. Indessen zeigt ein Vergleich unserer Theorie mit der Wienschen Untersuchung über freie Schwingungen, daß der Verlauf der Frequenz eine auffallende Ähnlichkeit mit den hier wiedergegebenen Kurven hat, und es ergibt sich daraus die für unsere Untersuchung wesentliche Aufgabe, den Ursachen dieser Erscheinung nachzugehen. Es sei voraus bemerkt, daß der mathematische Zusammenhang der Wienschen Untersuchung im allgemeinen zwar noch komplizierter ist, indessen es aber keineswegs möglich ist, die Theorie des Zwischenkreisröhrensenders durch Grenzübergang dieser Theorie unterzuordnen, vielmehr stellt dieselbe etwas durchaus Neues dar und der mathematische Zusammenhang ist auch ein ganz anderer.

Wir beginnen mit dem Fall vorwiegender Dämpfung S. 168. Da sei zunächst nochmals bemerkt, daß die daselbst mit δ_1 bezeichnete Dämpfung in unserer Theorie dauernd Null ist. Ein Bild des Verlaufs der δ_2 entsprechenden Dämpfung gibt, wie in Artikel 4 (11) bemerkt, die Funktion:

$$1 - r. \tag{1}$$

In der Wienschen Untersuchung ist nunmehr die Annahme gemacht, daß die Dämpfung h_1 des Primärkreises klein sei, dagegen h_2 des Sekundärkreises groß. Daraus ergibt sich nun, daß δ_1 — vom Maximum in der Resonanzlage abgesehen — zu vernachlässigen ist und δ_2 einen ähnlichen Verlauf wie in unserer Theorie hat, nur daß der Zipfel unserer Kurve ungefähr doppelt so tief eintaucht. Bei dieser Sachlage ist zu erwarten, daß unsere Kurve mit dem Verlauf der Frequenz v_1 übereinstimmt. Nun sehen wir, daß v_1 in der Resonanzlage wenig unter der Resonanzfrequenz zurückbleibt, was davon herrührt, daß δ_1 dort sein Maximum hat. Was das Maximum und Minimum der Frequenz betrifft, so befinden dieselben sich schon ein Stück außerhalb der Resonanz, und es stimmen daher auch unsere Ergebnisse mit Wien überein. Aus dem durch Kürzung erhaltenen Endresultat auf Seite 169 geht zunächst der Grenzwert der Lage des Maximums und Minimums bei extrem loser Kopplung:

$$\varepsilon = \pm (h_2 - h_1) \tag{2}$$

hervor, und dieser stimmt näherungsweise mit dem in Artikel 5 (12) hergeleiteten überein, wenn h_1 gegen h_2 vernachlässigt wird. Bei genauerer Betrachtung rücken wie in Artikel 5 (14) Maximum und Minimum bei zunehmender Kopplung an die Resonanzlage heran. Ebenso gilt in erster Annäherung der Satz, daß bei loser Kopplung die Kurve δ_2 im Maximum und Minimum der Frequenz halb so tief herabfällt wie bei Resonanz. Die zentrisch-symmetrische Gestalt der Frequenzkurve in bezug auf den Durchschnittspunkt mit der Resonanzgeraden bei Wien ist ebenfalls aus den Kürzungen zu erklären. Die Frequenz p_2 der zweiten resultierenden Schwingung, welche in unserer Untersuchung keine Bedeutung besaß, ergibt sich zufolge Artikel 3 (6) dritte Zeile aus:

$$p_2 = \frac{1}{p \cdot c \cdot (1 - m)}. \tag{3}$$

Es ist p_2 bei loser Kopplung in erster Annäherung proportional $\frac{1}{c}$, und somit liegt auch hier Übereinstimmung vor.

Noch deutlicher treten die unterscheidenden Merkmale bei Resonanz in der kritischen Kopplung hervor, S. 172. Wir haben daher den Verlauf der Dämpfung der beiden resultierenden Schwingungen in der Wienschen und unserer Unter-



suchung in Bild 9 und 10 wiedergegeben. Die Dämpfung δ_2 taucht eine Spitze bildend zur Hälfte hinab, während δ_1 ihr spiegelbildlich entgegenkommt. In unserem Falle taucht δ_2 bei Resonanz bis zur Dämpfung Null herab. Die Bestimmung der Lage von Maximum und Minimum der Frequenz ergibt bei kritischer Kopplung nach Wien:

$$\varepsilon = \pm (h_2 - h_1) \cdot \sqrt{-2 + \sqrt{5}} = \pm (h_2 - h_1) \cdot 0{,}49. \tag{4}$$

Der Ort von Maximum und Minimum ist zufolge (2) und (4) um ungefähr die Hälfte an die Resonanzlage herangerückt, was mit der Anmerkung zum zweiten Falle der kritischen Kopplung in Artikel 6 übereinstimmt.

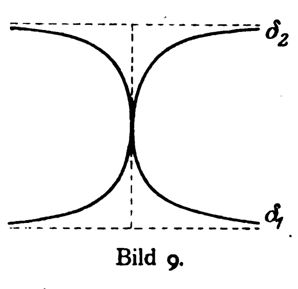
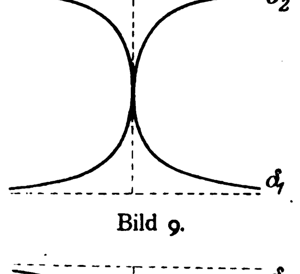



Bild 9.

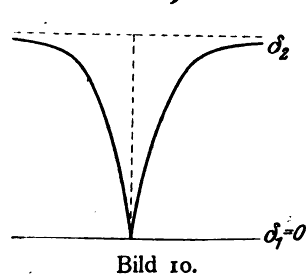


Bild 10.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß das Wiensche Kriterium der kritischen Kopplung:

$$h_2 - h_1 = \tau \gamma_1 \tag{5}$$

mit unserem Kriterium

$$m = n$$

in der Weise in Übereinstimmung gebracht werden kann, daß man die durch die Gleichung des induzierten Widerstandes bedingte Beziehung unter h_2 und h_1 berücksichtigt. Nach Artikel 4 (1) ist bei kritischer Kopplung

$$\beta = L_1 R_2 + L_2 R_n = 0.$$

$$\frac{R_n}{2 L_1} = -\frac{R_2}{2 L_2} \qquad \text{oder } h_1 = -h_2. \tag{6}$$

Dies in (5) eingesetzt:

$$2 h_2 = \tau \gamma_1.$$

Indem wir setzen:

$$h_2 = \frac{R_2}{2 L_2} \qquad \tau = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

(es bedeutet bei Wien γ_1 allerdings die Eigenschwingung des Primärkreises unter Berücksichtigung der Dämpfung) und quardrieren, folgt unsere Beziehung.

Gehen wir in das Gebiet vorherrschender Kopplung über (S. 174), so können wir nur den stabilen Teil unserer Kurven zum Vergleich heranziehen. In der Resonanzlage finden dann bei Wien Schwebungen statt, vorausgesetzt, daß beide Schwingungen annähernd gleich stark erregt werden. Ganz abgesehen davon, daß die Röhre sich auf Schwebungen überhaupt nicht einläßt, könnten der Theorie nach beim Zwischenkreissender in P_0 Schwebungen eintreten.

10. Ausdehnung der Untersuchung auf andere Schaltungen.

Schon in der Einleitung bemerkten wir, daß die untersuchten Erscheinungen nicht allein bei der Kathodenröhre auftreten, sondern sie stellen sich mehr oder weniger bei jeder durch eine aperiodische, konstante Kraft erzeugten Schwingung ein. Es hängen daher die Erscheinungen auch nicht von der Art der Schaltung ab, und wir kommen dazu, in aller Kürze zu zeigen, wie die Untersuchung auf andere Schaltungen ausgedehnt werden kann.

Wir betrachten die Schaltung in Bild 11. Als Röhrenrückkopplung dient ein Kondensator C_{10}. Damit der Anodengleichstrom fließen kann und das mittlere Gitterpotential gleich dem der Kathode wird, ist an Gitter und Kathode eine Drosselspule von geringem Widerstand gelegt.

Das Ergebnis der Rechnung ist hier eine Gleichung 5. Grades:

$$\left.\begin{array}{c} L_{12}^2 x^5 \left(1 + \frac{1}{C_0 x R_i}\right) = \\ \left[L_1 x^3 + \left(R_1 + \frac{L_1}{C_0 R_i}\right) x^2 + \left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_{10}} + \frac{R_1}{C_0 R_i}\right) x + \frac{1}{C_0 C_{10}}\left(S + \frac{1}{R_i}\right)\right] \cdot \\ \left[L_2 x^2 + R_2 x + \frac{1}{C_2}\right] = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Mit ebenderselben Begründung wie in Artikel 2 können wir für

$$\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_{10}} + \frac{R_1}{C_0 R_i}$$

eine neue Konstante $\frac{1}{C_1}$, einführen, die von $\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_{10}} = \frac{1}{C_1}$ nur sehr wenig abweicht. Ebenso können wir $\frac{1}{C_0 x R_i}$ gegen 1 vernachlässigen. Die Gleichung (1) geht nunmehr über in die Schwingungsgleichung von Artikel 3 (1), wenn gesetzt wird:

$$R_n = R_1 + \frac{L_1}{C_0 R_i} + \frac{1}{C_0 C_{10} x^2} \cdot \left(S + \frac{1}{R_i}\right).$$

Da $x^2 = -\omega^2$, so ist der Ausdruck reell und kann auch vermöge S negativ werden. Es bedeutet R_n wiederum der negative durch den Sekundärkreis im Primärkreis induzierte Leistungswiderstand. Der einzige Unterschied, der durch die Gleichung 5. Grades in (1) hervorgerufen wird, ist, daß die Punkte indifferenten Zustandes geringfügig gegen den Doppelpunkt P_0 abweichen.

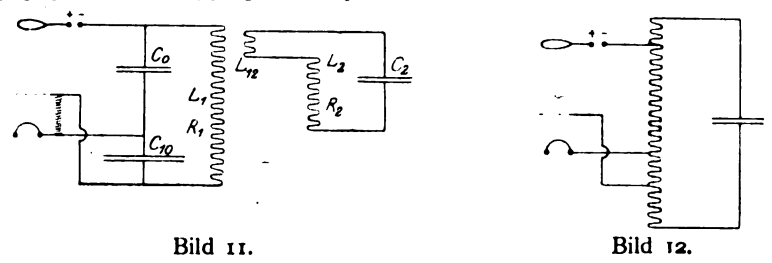


Bild 11. Bild 12.

Die Schaltung in Bild 12 bezeichnet man gewöhnlich als Spannungsunterteilungs-Schaltung. Sie steht mit der soeben besprochenen in gewissem Dualismus, indem nur statt der Kapazitäten Selbstinduktionen und umgekehrt zu setzen sind. Die Rechnung ist daher analog.

Gehen wir zu Mehrkreisschaltungen über, bei denen ein Schwingungskreis bei der Rückkopplung der Röhre mitwirkt, so werden die Verhältnisse durch diesen allerdings noch komplizierter. Dies ist aber weder physikalisch von Interesse, noch wird man solche Schaltungen mit einem Zwischenkreis versehen.

Hingegen ist es möglich, die ganze Untersuchung mit guter Annäherung auf das von A. W. Hull konstruierte Dynatron zu übertragen, wenn der negative Widerstand desselben nicht zu klein ist.

II. Anwendung der Untersuchung auf die Technik.

Bei der Konstruktion des Zwischenkreissenders war anscheinend eines der Ziele, der Antenne eine möglichst konstante Wellenlänge aufzudrücken, nämlich die des Zwischenkreises.

Wir erörtern auf Grund unserer Theorie die Frage, wieweit dieses Ziel erreicht werden kann, und untersuchen daraufhin zunächst die Resonanzlage.

Die Generatorlösung P_1 in der Resonanzlage erfüllt unsere Forderung, daß die primäre Frequenz durch die Antenne nicht geändert werden soll, Artikel 5 (3). Zugleich hatten wir aber festgestellt, daß gerade in der Resonanzlage die größte

Steigung der Frequenz stattfindet. Die Richtung der Tangente in P_1 gibt uns ein Maß für die Frequenzempfindlichkeit des Senders in der Resonanzlage. Die Gleichung derselben ist nach Artikel 5 (15):

$$\frac{p-1}{c-1} = \frac{1}{\frac{n}{m}-1}. \tag{1}$$

Wir erkennen, daß der Zwischenkreissender nur dann in der Resonanzlage weniger frequenzempfindlich ist als ein Sender ohne Zwischenkreis, wenn:

$$\frac{m}{n} < \frac{1}{2} \tag{2}$$

ist. Eine Verkleinerung der Kopplung m oder eine Vergrößerung der Dämpfung n ohne Vergrößerung der Kopplung wird im allgemeinen auf eine Verringerung der Energieausnützung führen. Eine gute Energieausnützung ist vorhanden, wenn der induzierte Widerstand $-R_n$ groß gegen R_1 ist. Nun bedeutet aber in (2) zufolge Artikel 5 (2) $\frac{m}{n}$ den induzierten Widerstand in P_1 gemessen in der Maßeinheit des kritischen Widerstandes. Es kommt also darauf an, zunächst den kritischen induzierten Widerstand

$$\frac{L_1}{L_2} \cdot R_2 \tag{3}$$

möglichst groß gegen R_1 zu machen. Wenn wir an der Antenne nichts ändern wollen, so bleibt nichts anderes übrig als L_1 möglichst groß zu wählen. Dies gelingt noch am besten an der Schaltung in Bild 12, insofern man die Spule über Anoden- und Gitterzuführung verlängern kann. Indessen ist dabei zu beachten, daß Schwingungskreise mit großen Selbstinduktionen und kleinen Kapazitäten einen verhältnismäßig hohen Widerstand R_1 besitzen, so daß ein gewisses Optimum vorhanden ist. Ein anderes Mittel ist $\frac{R_2}{L_2}$ zu vergrößern, also die Antenne so zu bauen, daß sie größere Dämpfung besitzt. Danach wäre die Aufgabe lediglich eine Antennenfrage.

Es bleibt übrig zu untersuchen, wie sich die Frequenz bei Verstimmung der Antenne gegen den Zwischenkreis verhält. Da ist zunächst klar, daß, wenn wir in die Nähe des Maximums oder Minimums gelangen, die Frequenzempfindlichkeit beliebig herabgemindert werden kann. Maximum und Minimum ergibt sich aus Gleichung in Artikel 5 (8) oder angenähert:

$$p = 1 \pm \frac{m}{2\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Die Frequenzänderung durch Kopplung ist also dem Quadrat des Kopplungskoeffizienten ungefähr proportional. Hinzukommt, daß bei guter Energieausnutzung stärker gekoppelt werden muß als bei Resonanz. Außerdem darf nach wie vor der induzierte Widerstand nicht in der Nähe des kritischen liegen. Somit ist zwar die Frequenzempfindlichkeit beseitigt, aber es wird im allgemeinen nicht möglich sein, den Sender bei guter Energieausnutzung mit vorgeschriebener Genauigkeit auf eine Welle einzustellen.

12. Zusammenfassung und Zahlenbeispiel.

Durch Nullsetzung der Dämpfung einer der beiden resultierenden Schwingungen, die sich aus dem analytischen Ansatz ergeben, wird eine Beziehung hergeleitet, die den durch den Sekundärkreis im Primärkreis induzierten effektiven Widerstand enthält (Gleichung des induzierten Widerstandes) und mit Hilfe dieser die Frequenzgleichung.

Beim Überschreiten des kritischen Widerstandes $\frac{L_1 R_2}{L_2}$ wird die Dämpfung der zweiten resultierenden Schwingung negativ, der Zustand des Senders ein labiler.



Ähnlich wie in der Wienschen Untersuchung sind drei Fälle, vorherrschende Dämpfung, kritische Kopplung, vorherrschende Kopplung zu unterscheiden.

Im ersten Fall ist bei Veränderung der Kapazität (oder der Selbstinduktion) des Sekundärkreises der Zustand des Senders überall stabil ($n > m$). Die Kurve des induzierten Widerstandes hat in der Resonanzlage ein Maximum. Die Frequenzkurve geht bei Resonanz durch die primäre Frequenz hindurch (Generatorlösung) und hat daselbst die größte Steigung. Gehen wir aus der Resonanzlage heraus zu größeren Kapazitätswerten, so treffen wir auf ein Maximum der Frequenz, im umgekehrten Falle auf ein Minimum. Der Unterschied der Kondensatoreinstellungen bei Maximum und Minimum ist bei loser Kopplung durch die Dämpfung des Sekundärkreises bestimmt. Die kurzgeschlossene Spule des Sekundärkreises ruft eine Frequenzvergrößerung hervor, die durch die Kopplung der beiden Kreise bestimmt ist.

Die kritische Kopplung ist dadurch gekennzeichnet, daß erstens die Kurve des induzierten Widerstandes in der Resonanzlage den kritischen Widerstand erreicht, zweitens daselbst in eine Spitze ausartet, daß drittens die Frequenzkurve in der Resonanzlage senkrecht ansteigt ohne jedoch zurückzulaufen, daß also daselbst die Frequenz unbestimmt wird. ($m = n$.) Die theoretische Behandlung zerfiel in drei Fälle entsprechend diesen drei Eigenschaften der kritischen Kopplung.

Bei vorherrschender Kopplung bildet die Kurve des induzierten Widerstandes eine Schleife, besitzt also einen Doppelpunkt. ($m > n$). Derselbe liegt in der Höhe des kritischen Widerstandes auf der Resonanzgeraden, so daß der Zustand des Senders in der aufgesetzten Schleife ein labiler ist. Entsprechend besitzt die Frequenzkurve zwei Rückkehrpunkte, in denen der Sender unbedingt in den stabilen Zustand abfällt. Die Generatorlösung scheidet aus.

Was die experimentelle Bestätigung der Resultate anbetrifft, so gibt jede gut evakuierte Senderöhre die abgeleiteten Erscheinungen qualitativ wieder. Zu Meßzwecken sind Röhren mit großem innerem Widerstand erforderlich, wie die Theorie ohne weiteres ergibt. Am geeignetsten sind da die mit 90 Volt betriebenen Verstärkerröhren, dennoch könnte in dieser Hinsicht noch anderes geschaffen werden. Im folgenden geben wir ein Zahlenbeispiel für eine gewöhnliche 10 Watt Senderöhre, welches ohne Schwierigkeiten nachgeprüft werden kann.

Eine solche Röhre gibt bei 400 Volt Anodenbetriebsspannung und 270 Volt maximaler Anodenwechselspannung, 100 Volt maximaler Gitterspannung, indem die Heizung der Kathode auf 100 MA Sättigungsstrom eingestellt wird, ca. 7 Watt. Wir legen die Schaltung von Bild 11 zugrunde und setzen fest, daß die effektive Stromstärke im Zwischenkreise 0,6 Ampere betragen soll. Dann ergeben sich sogleich die Scheinwiderstände, nämlich:

$$\frac{1}{C_0 \omega} = \frac{270}{0{,}6 \cdot \sqrt{2}} = 318 \text{ Ohm} \qquad \frac{1}{C_{10} \omega} = \frac{100}{0{,}6 \cdot \sqrt{2}} = 118 \text{ Ohm}$$

$$\frac{1}{C_0 \omega} + \frac{1}{C_{10} \omega} = \frac{1}{C_1 \omega} = 436 \text{ Ohm}$$

aber auch der effektive Gesamtwiderstand

$$\frac{7}{(0{,}6)^2} = 19{,}4 \text{ Ohm.}$$

Wir können annehmen, daß bei einer einigermaßen gut ausgewählten Spulenform das Verhältnis $\frac{R_1}{L_1 \omega} = R_1 \cdot (C_1 \omega)$ etwa $\frac{1}{100}$ beträgt. Indem wir in den Zwischenkreis zur Beobachtung der Stromstärke noch ein Amperemeter von ca. 0,7 Ohm eingeschaltet denken, setzen wir für den Widerstand des Zwischenkreises an sich $R_1 = 5$ Ohm an. Dann bleibt für den durch den Sekundärkreis induzierten Widerstand $-R_n = 14{,}4$ Ohm und für die Leistung im Sekundärkreis 5,2 Watt.

Um zuerst die elektrischen Größen des Primärkreises endgültig festzulegen, wählen wir als Welle

$$500\,\text{m} \quad \text{also} \quad \omega = 3{,}77 \cdot 10^6.$$

Dann ergibt sich:

$$C_0 = 750\ \text{cm} \qquad C_{10} = 2020\ \text{cm} \qquad C_1 = 550\ \text{cm}.$$

Eine Energieentziehung aus dem Primärkreis von 5,2 Watt ist unter Umständen überhaupt nicht möglich, oder nur im labilen Gebiet. Wir fragen daher: Wie muß der Sekundärkreis beschaffen sein, damit er 5,2 Watt im stabilen Zustand aufnehmen kann? Dann muß zufolge unserer Theorie der bereits angegebene induzierte Widerstand $-R_n = 14{,}4$ Ohm kleiner als der kritische sein. Denken wir uns, wie es gewöhnlich in einem Antennenkreise der Fall ist, die Selbstinduktion variabel, so ist der kritische induzierte Widerstand ausgedrückt durch $\frac{C_2 R_2}{C_1}$, es muß also:

$$\frac{C_2 R_2}{C_1} > 14{,}4\ \text{Ohm} \qquad C_2 \omega R_2 > C_1 \omega \cdot 14{,}4\ \text{Ohm}$$

$$C_2 \omega R_2 > 0{,}033.$$

Es ist aber $(C_2 \omega R_2)^2$ nichts anderes als die Größe n, von der die Antennendämpfung abhängt, und es muß also:

$$n > 0{,}0011$$

sein. Für $R_2 = 20$ Ohm folgt aus $C_2 > \frac{C_1 \cdot 14{,}4}{R_2}$

$$C_2 > 396\ \text{cm}.$$

Hat also eine Antenne bei Welle 500 einen Widerstand von 20 Ohm, so muß zugleich ihre Kapazität größer als 396 cm sein, damit aus dem Zwischenkreise die maximale Energie von 5,2 Watt herausgezogen werden können, ohne daß labile Zustände eintreten können. Ist die Kapazität nur wenig größer als 396 cm, so wird der Sender in der Resonanzlage bei Entnahme von 5,2 Watt sehr frequenzempfindlich sein.

Wir stellen uns eine zweite interessante Aufgabe: Wie muß der Sekundärkreis beschaffen sein, daß er durch Kopplung den Sender auslöschen kann? Dann muß offenbar der Grenzwiderstand im Primärkreis, bei dem die Schwingungen aussetzen, um den Widerstand $R_1 = 5$ Ohm des Primärkreises vermindert kleiner als der kritische Widerstand sein. Den Grenzwiderstand können wir nach der Formel

$$\frac{1}{C_0 \omega} \cdot \frac{1}{C_{10}\, \omega} \left(S - \frac{C_{10}}{C_0} \frac{1}{R_i} \right)$$

berechnen, und unter der Annahme, daß $S = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ $\frac{1}{R_i} = 0{,}6 \cdot 10^{-4}$ ist, erhalten wir für den Grenzwiderstand 39 Ohm. Somit muß jetzt

$$\frac{C_2 R_2}{C_1} > 34\ \text{Ohm} \qquad C_2 \omega R_2 > 0{,}078$$

sein, mithin $\qquad n > 0{,}0061.$

Für $R_2 = 20$ Ohm folgt $C_2 > 935$ cm.

Je fester wir die Kopplung nehmen, um so größer wird der Bereich sein, in dem der Sender erdrückt wird, indessen nehmen wir die Kopplung so lose, daß gerade nur noch an einem Punkte das Erlöschen eintritt, so wird diese Stelle die Resonanz bezeichnen, während zu beiden Seiten der Resonanz der Strom im Sekundärkreis ein Maximum von ca. 0,51 Ampere erreicht. Einen Zwischenkreisüberlagerungsempfänger kann man durch Erdrücken der Überlagerung in der Resonanzlage bei Hinzunahme eines kleinen Senders (Überlagerer) auf die Antenne abstimmen.

Die magnetischen Eigenschaften von ungleichmäßigem Material.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Von

E. Gumlich [1]).

Übersicht.

Es wird teils rechnerisch, teils experimentell der Einfluß von Ungleichmäßigkeiten des Materials auf die ballistisch bzw. magnetometrisch aufgenommenen Magnetisierungskurven ermittelt, und zwar für den Fall, daß die inhomogenen Bestandteile in Gestalt von Längsschichten oder von kornförmigen Einschlüssen angeordnet sind. Für die im ersten Falle auftretenden starken Verzerrungen der Magnetisierungskurven werden mehrere praktische Beispiele auf Grund von mikrographischen Aufnahmen besprochen.

Verschiedene Arten von Ungleichmäßigkeit. — Zweck der Untersuchung. Kein magnetisches Material ist vollkommen gleichmäßig, denn selbst unser reinstes, das Elektrolyteisen, besteht nach Beseitigung des härtenden Wasserstoffgehalts aus Ferritkristallen, deren Größe und Anordnung unter Umständen auch in der Gestalt der Magnetisierungskurven zum Ausdruck kommen dürften; zumeist aber enthält das magnetische Material noch mehr oder weniger erhebliche Verunreinigungen durch C, Mn, Si, P, S, Schlacke usw. in gelöstem oder ungelöstem Zustande, und wenn auch die Frage nach der Wirkung derartiger Verunreinigungen auf die magnetischen Eigenschaften des Grundmaterials durch die noch nicht völlig abgeschlossenen Untersuchungen der Reichsanstalt der Hauptsache nach geklärt worden ist [2]), so wurden diese Versuche zunächst doch nur nnter der Annahme durchgeführt, daß die Fremdkörper im Eisen gleichmäßig verteilt sind. Das wird aber im allgemeinen nur dann mit einiger Sicherheit angenommen werden können, wenn sich der Fremdkörper beim Schmelzen im Eisen vollkommen löst und beim Erkalten nicht wieder ausscheidet (beispielsweise Si, Al, Mn), nicht aber beim Kohlenstoff, der als Fe_3C in der Grundsubstanz Ferrit als Zementit (Perlit) eingebettet ist, und zwar unter Umständen auch da nicht einmal vollkommen gleichmäßig.

Andererseits kommen auch Fälle vor, wo durch äußere Bearbeitung (mechanische Härtung beim Walzen und dergleichen) oder durch chemische Einflüße (Oxydation, Entkohlung u. dgl.) ganze Schichten in ihren magnetischen Eigenschaften erheblich verändert werden und nun ihrerseits wieder die magnetischen Eigenschaften der gesamten Probe beeinflussen. In welcher Weise dies geschieht, darüber liegen bis jetzt noch keine Erfahrungen vor. Nur ein in der Reichsanstalt früher ausgeführter Versuch mit einer Kombination von Streifen aus weichem Dynamoblech und aus gehärtetem Stahlblech hat außerordentlich verzerrte Magnetisierungskurven ergeben [3]), deren Charakter an einige bis dahin unerklärte verzerrte Magnetisierungskurven errinnerte, die gelegentlich bei den zur Prüfung eingesandten Proben gefunden worden waren. Es ist sehr wahrscheinlich, daß auch die vielen, kaum sichtbaren Verzerrungen der Magnetisierungskurven, beispielsweise die vielfach zu beobachtende mehr oder weniger starke Verbreiterung der Hystereseschleife in der Gegend des

[1]) Die Schliftbilder sind im metallographischen Laboratorium der Technischen Hochschule zu Berlin unter Leitung von Herrn Professor Hanemann und Fräulein Schrader von Herrn Steinhagen hergestellt worden.

[2]) Wissenschaftliche Abhandlungen der Phys.-Techn. Reichanstalt IV, Heft 3.

[3]) A. a. O. S. 344.

Knies u. dgl. auf Unhomogenität des Materials zurückzuführen sind, und es erschien daher erwünscht, den Einfluß harter oder weicher Beimengungen zu weichem oder hartem Grundmaterial auf die Gestalt der Magnetisierungskurven etwas genauer zu untersuchen.

Material aus harten und weichen Schichten ohne freie Enden. Dies war in den Fällen, wo es sich um Längsschichten von abweichender Beschaffenheit handelt, verhältnismäßig einfach und konnte sogar rechnerisch durchgeführt werden. Es hat sich nämlich gezeigt, daß man bei derartigen, in sich selbst oder durch ein Joch geschlossenen Proben die resultierende Magnetisierungs-

Weiches Eisen AV_1H
Weiches Eisen mit 30% Stahl
Weiches Eisen mit 50% Stahl
Weiches Eisen mit 70% Stahl
Gehärteter Cr-C-Stahl

Bild 1. Hystereseschleifen.

Gehärteter Cr-C-Stahl
Stahl mit 2% weichem Eisen
Stahl mit 10% weichem Eisen
Stahl mit 30% weichem Eisen
Stahl mit 50% weichem Eisen

Bild 2. Hystereseschleifen.

kurve erhält, wenn man bei jeder Feldstärke die zugehörige Induktion des weichen und harten Bestandteils proportional dem zugehörigen Querschnitt nimmt. Dies ist auch ohne weiteres klar, denn der resultierende Induktionsfluß, welcher bei einer ballistischen Messung durch die die Probe umschließende Sekundärspule hindurchtritt, setzt sich ja aus den Induktionsflüssen in den einzelnen Schichten zusammen.

Als Material für die einzelnen Schichten wurde, um den Einfluß möglichst auffällig zu machen, solches mit sehr verschiedenen Eigenschaften gewählt, nämlich weicher Dynamostahl AV_1H und bei 900° gehärteter Chrom-Kohlenstoffstahl mit 1,1% C und 5,8% Cr, deren Hystereseschleifen in Bild 1 unter —— und •• — ••



angegeben sind. Die Koerzitivkraft betrug 0,47 bzw. 72 Gauß, die Remanenz 11300 bzw. 9200. Aus dem Bild 1, welche die berechneten Hystereseschleifen der Kombinationen von weichem Eisen mit 0%; 30%; 50%; 70%; 100% hartem Material darstellt, ergibt sich nun folgendes:

Mit steigendem Prozentsatz an hartem Material tritt neben dem Sinken der Maximalinduktion eine anfänglich schwache und bei geringem Zusatz von wenigen Prozent kaum sichtbare, bei stärkerem Zusatz aber immer mehr wachsende Ausbauchung des aufsteigenden Astes zunächst in der Gegend von $\mathfrak{H} = 40 - 60$ Gauß auf, welche naturgemäß den Hystereseverlust erheblich beeinflussen muß, während die scheinbare Koerzitivkraft selbst bei dem Zusatz von etwa 30% Stahl nur wenig und sogar bei einem Zusatz von 50% nur auf etwa das Doppelte, also von 0,47 auf etwa 1 Gauß anwächst. Bei einem Zusatz von 70% hartem Material hat der immer größer werdende Bauch bereits die Abszissenachse ($\mathfrak{H}$-Achse) überschritten, die Koerzitivkraft ist dabei sehr rasch und stark angewachsen, aber der größte Teil des absteigenden Astes zwischen Remanenz und Koerzitivkraft trägt noch immer den Charakter des weichen Materials, liegt also sehr nahe an der Ordinatenachse und geht erst allmählich in die Gestalt der Schleife für Stahl über.

Bei der Kombination von weichem Grundmaterial mit Stahl erstreckt sich also die Wirkung der harten Beimengung zunächst und hauptsächlich auf den aufsteigenden Ast, während, wie Bild 2 zeigt, bei der Kombination von Stahl mit weichem Zusatz eine Wirkung zunächst auf den absteigenden Ast sichtbar wird. Diese tritt ganz in der Nähe der Remanenz zwischen Remanenz und Koerzitivkraft als Einbuchtung auf, ist schon bei 2% Zusatz recht deutlich und prägt sich mit wachsendem Prozentgehalt des weichen Materials immer stärker aus, während die Koerzitivkraft zunächst nur sehr wenig abnimmt. Erst allmählich wird auch hier eine starke Einwirkung merklich; bei etwa 40% Zusatz würde die Koerzitivkraft schon mehr den Charakter des weichen Materials angenommen haben und etwa von der Größenordnung 2 sein, bei 50% ist sie nur noch etwa 1 Gauß, die Einbuchtung ist über die Abszissenachse hinweg in den aufsteigenden Ast gerückt und bildet hier den kollosalen Bauch, der schon oben erwähnt wurde und der sich nun mit weiterer Zunahme des weichen Bestandteils immer mehr abflacht.

Der Charakter der Einbuchtung hängt naturgemäß von der Beschaffenheit der beiden Materialien ab, die hier absichtlich außerordentlich verschieden gewählt wurden. Sinkt der absteigende Ast des weichen Teiles nicht so außerordentlich rasch, ist also die Remanenz kleiner, die Koerzitivkraft erheblich größer als hier angenommen wurde, so wird natürlich auch die Verzerrung weniger scharf hervortreten, und zwar nur als langgestreckte schwache Einbuchtung, wie sie etwa die Bilder 8 und 10 zeigen und die in ganz geringem Maß auch bei gewöhnlichem Material oft zu beobachten ist.

Eigentümlich und beachtenswert ist die außerordentlich niedrige Koerzitiskraft, welche die Kombination aufweist, auch wenn der Gehalt an hartem Material bereits bis auf 50% angestiegen ist, denn man würde von vornherein geneigt sein, auch für die Koerzitivkraft einen mittleren Wert von etwa 35 Gauß anzunehmen, während man tatsächlich nur 2 Gauß findet. Der Grund für diese eigentümliche Erscheinung liegt darin, daß die gewöhnliche Definition der Koerzitivkraft als derjenigen Feldstärke, welche notwendig ist, um den remanenten Magnetismus mit seiner Wirkung auf Induktionsspule und Magnetometer zu beseitigen, bei magnetisch ungleichmäßigem Material versagt. Hier wird diese Wirkung null, wenn die beiden Induktionsflüsse in dem weichen und harten Material sich gerade aufheben; dies tritt aber bei verhältnismäßig niedriger Feldstärke ein, wo im harten Material noch eine erhebliche positive Magnetisierung vorhanden ist, während der weiche Teil bereits eine ebenso hohe negative Magnetisierung angenommen hat.



Material mit stetig ineinander übergehenden Schichten. Bisher hatten wir angenommen, daß das Material aus zwei scharf getrennten Schichten verschiedener Beschaffenheit zusammengesetzt sei; dies wird aber zumeist nicht der Fall sein, vielmehr wird es vielfach aus einer größeren Anzahl von Schichten

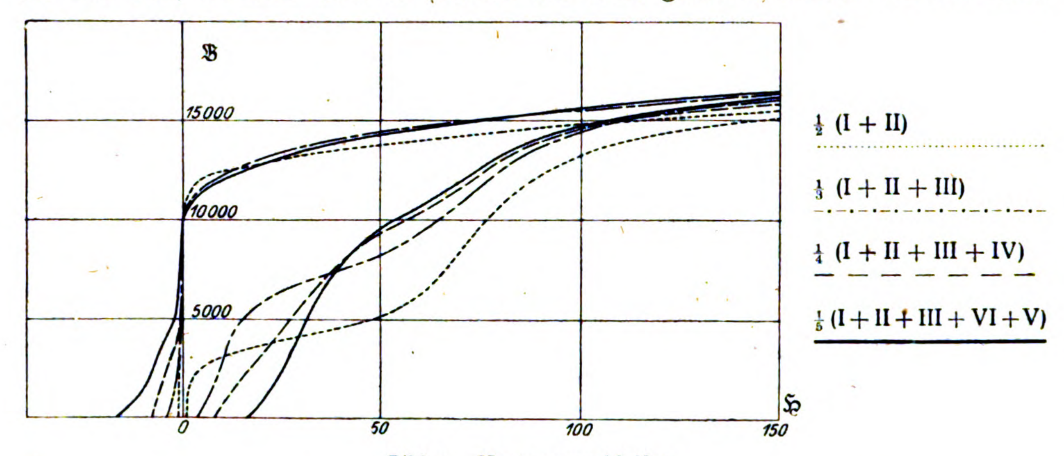


Bild 3. Hystereseschleifen.
Kombination von hartem und weichem Material mit Zwischenstufen.

bestehen, die stetig ineinander übergehen. In diesem Fall muß, wie eine einfache Überlegung zeigt, die Verzerrung der Hystereseschleife um so mehr verschwinden, je stetiger die Änderung der Materialbeschaffenheit ist. Zum Nachweis dafür wurden

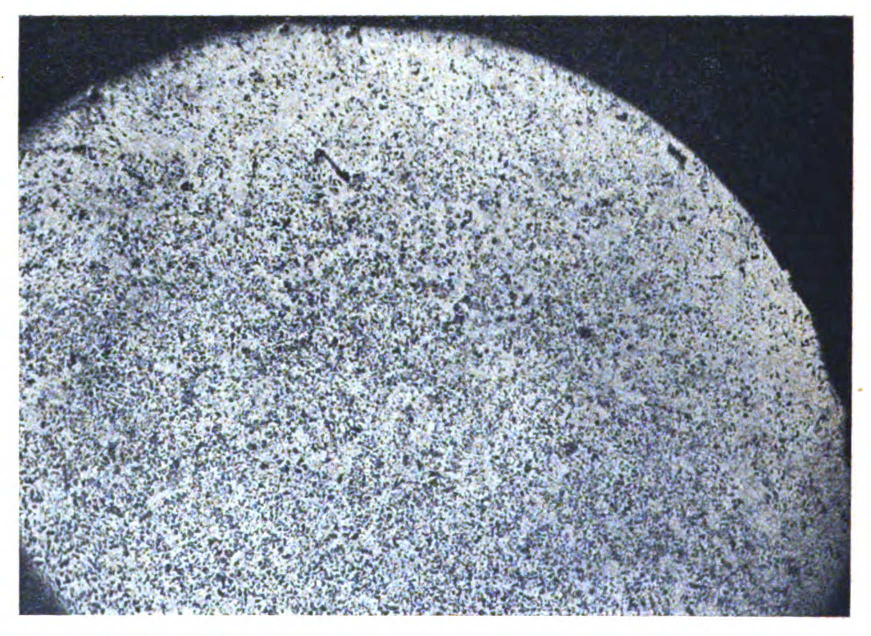


Bild 4. Kohlenstoff-Legierung mit 0,55 % C; Randpartie unvollständig entkohlt.

mit den beiden eben benutzten Materialien I und II noch drei andere Materialien III, IV, V kombiniert, welche die Koerzitivkräfte 6,5; 23; 37 und die Remanenzen 8500; 10100 und 11200 besassen, und zwar bildete man für eine Anzahl von Feldstärken die Induktionen $\frac{I+II}{2}$; $\frac{I+II+III}{3}$; $\frac{I+II+III+IV}{4}$; $\frac{I+II+III+IV+V}{5}$.

Hierbei bedeuten die Werte I, II, III, IV, V die zu der betreffenden Feldstärke gehörigen Induktionswerte der 5 Originalkurven; die so berechneten Zahlen sind in Bild 3 wiedergegeben. Man sieht, wie die Kurve $\frac{I + II}{2}$, welche mit der in Bild 1 und 2 für 50% dargestellten Kurve identisch ist, durch Hinzunahme der 1, 2 und 3 andern Materialien mit Magnetisierungskurven, deren Charakter zwischen denen von I und II liegt, ihre Verzerrung immer mehr verliert und normaleren Charakter annimmt.

Es war nun von Interesse, dieses rechnerische Ergebnis auch experimentell zu bestätigen. Zu diesem Zweck wurde ein Stab AV6 mit ursprünglich 0,55% Kohlestoff durch 5 stündiges Glühen bei 900° in einer mit Eisen-Oxydul gefüllten Röhre am Rande stark entkohlt und dann bei 850° gehärtet. Bild 4 gibt das Schliffbild vor der Härtung in etwa 20facher Vergrößerung; man sieht, wie der schwarze perlitische Gefügebestandteil nach dem Rande zu nicht vollkommen, aber doch ziemlich regelmäßig abnimmt. Die Hystereseschleife nach dem Härten ist in Bild 5

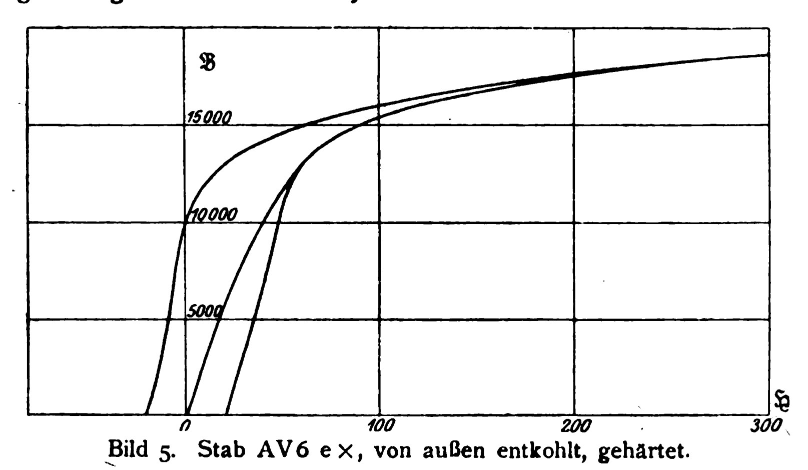


Bild 5. Stab AV6 e ×, von außen entkohlt, gehärtet.

wiedergegeben; sie ist, wie zu erwarten war, nicht ganz frei von Verzerrung, namentlich zeigt sie die oben erwähnte schwache Einbuchtung zwischen Remanenz und Koerzitivkraft, aber die Verzerrung hält sich doch in sehr mässigen Grenzen.

Einfluß der Unstetigkeiten auf die Permeabilitätskurven. Am deutlichsten tritt hier die noch vorhandene Anomalie in der Lage der Nullkurve hervor, die sich nicht, wie sonst, von vorn herein dem aufsteigenden Ast nähert, und deren eigentümliche, in der Wiedergabe etwas verwischte Krümmungen nicht ohne weiteres zu erklären sind. Es wurden daher, um auch hierüber einen gewissen Überblick zu gewinnen, die Kombinationsrechnungen mit den beiden bei Bild 1 und 2 angegebenen Materialien in derselben Weise durchgeführt, wie bei den Hystereseschleifen. Die erhaltenen Nullkurven zeigen tatsächlich denselben Charakter wie in Bild 5, sie lassen aber die Einzelheiten viel weniger gut erkennen, als die zugehörigen in Bild 6 und 7 wiedergegebenen Permeabilitätskurven. Geht man bei diesen vom weichen Grundmaterial aus (Bild 6), so sieht man, wie mit wachsendem Zusatz von hartem Material des Maximum von μ, das beim Grundmaterial etwa 11500 betrug und etwa bei $\mathfrak{B} = 6500$ lag, immer niedriger wird und bei immer kleineren Werten der Induktion auftritt, so daß es bei etwa 10% von weichem Eisen und 90% Stahl nur noch 1200 beträgt und bei $\mathfrak{B} = 800$ liegt; die zugehörige Feldstärke dagegen bleibt nahezu konstant. Von $\mathfrak{B} = 2000$ ab nimmt die Permeabilität gleichmäßig ab; das ist aber auch nur scheinbar, wie sich aus Bild 7 ergibt, welches in stark vergrößertem Maßstabe den Einfluß von weichem Material auf hartes Grundmaterial wiedergibt:

Man sieht, daß schon bei einer Kombination mit 2% weichem Material auf der ursprünglich ganz gleichmäßig und flach verlaufenden Permeabilitätskurve des Stahles mit seinem Maximum von $\mu = 85$ bei etwa $\mathfrak{B} = 9000$ ein zweites, außerordentlich starkes Maximum von etwa $\mu = 250$ bei $\mathfrak{B} = 200$ auftritt, das bei weiterer Steigerung des weichen Bestandteils immer höher und höher ansteigt und auch zu immer höheren Werten der Induktion hinaufrückt. Das ursprüngliche Maximum der Grundsubstanz wird dabei immer flacher, ist aber auch bei Zusatz von 30% Eisen noch deutlich zu erkennen, bei noch höheren Werten markiert es sich nur noch als Wendepunkt. Hier also, und das ist ganz besonders wichtig und interessant,

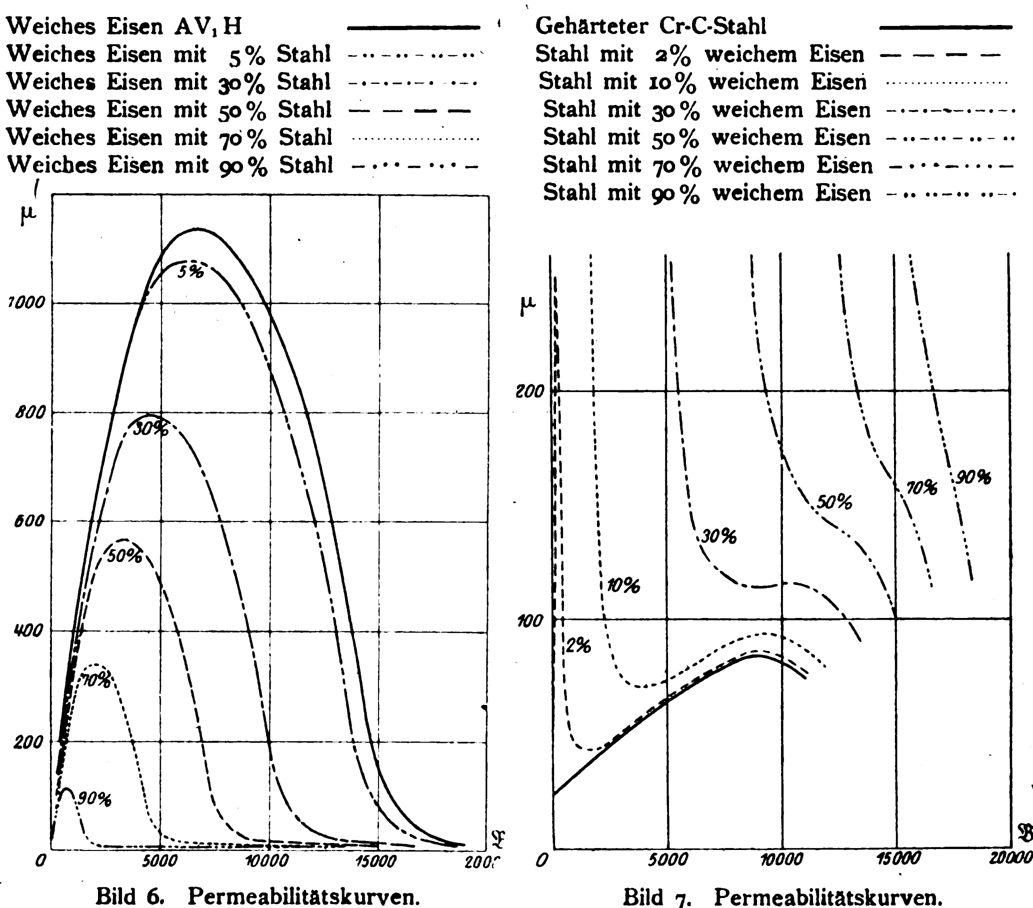


Bild 6. Permeabilitätskurven.

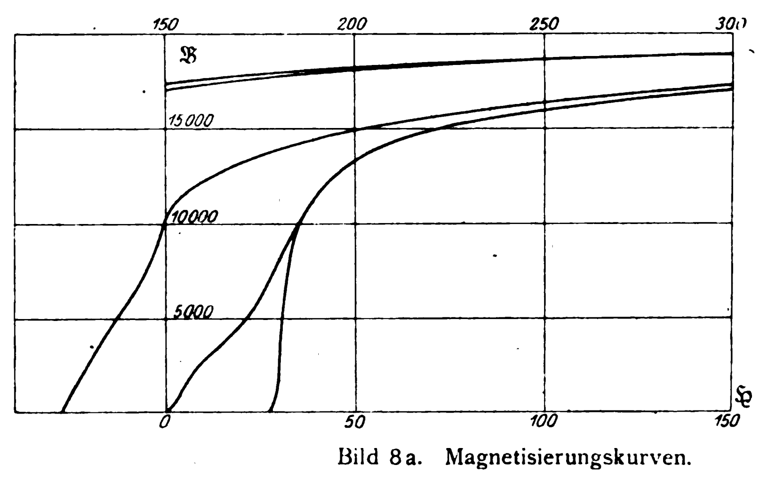
Bild 7. Permeabilitätskurven.

treten in den Maximis der Permeabilität die beiden Bestandteile des kombinierten Materials getrennt deutlich hervor und lassen unter Umständen sogar eine gewisse Analyse des Materials zu. Ein Beispiel möge dies zeigen.

Beispiel einer magnetischen Analyse; Schliffbild einer Probe. Ein an die Reichsanstalt eingesandter Draht aus reinstem Elektrolyteisen sollte angeblich 0,9% Kohlenstoff und 5% Wolfram enthalten, versprach also nach der Härtung bei 850° bzw. 950° gute magnetische Eigenschaften für permanete Magnete, insbesondere eine Koerzitivkraft von mindestens 60 Gauß. Die Untersuchung ergab die in Bild 8a und b dargestellten Magnetisierungs- und Permeabilitätskurven. Danach beträgt die Koerzitivkraft statt 60 nur 27,5 Gauß, man wird also nur auf etwa 0,4% C schließen dürfen[1]). Außerdem zeigen die Magnetisierungskurven aus-

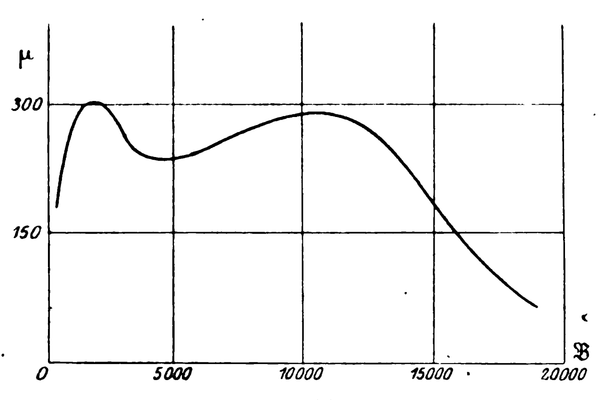
[1]) Wissenschaftl. Abh. IV, Heft 3, Abb. 47 und 48.

gesprochene Verzerrungen und die Permeabilitätskurve 2 Kuppen, welche auf das Vorhandensein zweier scharf getrennter Bestandteile in dem Material hinweisen. Das Permeabilitätsmaximum des weichen Bestandteils beträgt rund 300 und liegt bei $\mathfrak{B} = 1800$, dasjenige des harten Teiles beträgt 285 bei etwa $\mathfrak{B} = 10700$. Ein Vergleich mit Bild 7 sagt uns, daß der harte Teil in unserem Draht magnetisch erheblich weicher sein muß, als die dortige Chrom-Kohlenstoff-Legierung, denn die Maximalpermeabilität ist hier reichlich dreimal so hoch wie dort, während die geringere Höhe bei größerer Breite des Permeabilitätsmaximums des weicheren Teils



Draht aus 5%igem Wolframstahl, bei 950° gehärtet.

Bild 8a. Magnetisierungskurven.



Draht aus 5%igem Wolframstahl, bei 950° gehärtet.

Bild 8b. Permeabilitätskurven.

im Draht dafür spricht, daß hier der weichere Teil erheblich schlechtere magnetische Eigenschaften hat, als bei dem in Bild 7 dargestellten kombinierten Material.

Nun ergibt sich aus der Nullkurve Bild 8a, daß den beiden Permeabilitätsmaximis bei $\mathfrak{B} = 1800$ und $\mathfrak{B} = 10700$ eine Feldstärke von $\mathfrak{H} = 6$ bzw. $\mathfrak{H} = 37$ entspricht; es wurde aber früher[1]) die empirische Regel gefunden, daß das Maximum der Permeabilität bei einer Feldstärke liegt, die etwa dem 1,3fachen der Koerzitivkraft entspricht. Somit würde die Koerzitivkraft für den weichen Bestandteil etwa $6 : 1{,}3 = 4{,}6$ und für den harten etwa $37 : 1{,}3 = 28{,}4$ Gauß betragen. Der letztere Wert stimmt mit dem gemessenen Wert der Koerzitivkraft des ganzen Drahtes 27,5 Gauß durchaus befriedigend überein, da ja durch den weichen Bestandteil die Koerzitivkraft des harten Materials etwas herabgesetzt werden muß.

Es war nun interessant, die gefundenen magnetischen Ergebnisse an einem Schliffbild zu prüfen, das der größeren Deutlichkeit halber an einem schrägen Schnitt

[1]) Gumlich und Schmidt, ETZ. 1901. 22. S. 697.

durch den Draht ausgeführt wurde. Bild 9a und b geben die Aufnahmen des ungehärteten Materials im Anlieferungszustand wieder. Sie zeigen deutlich, daß offenbar bei der Herstellung des Drahtes eine Entkohlung der äußeren Randschicht

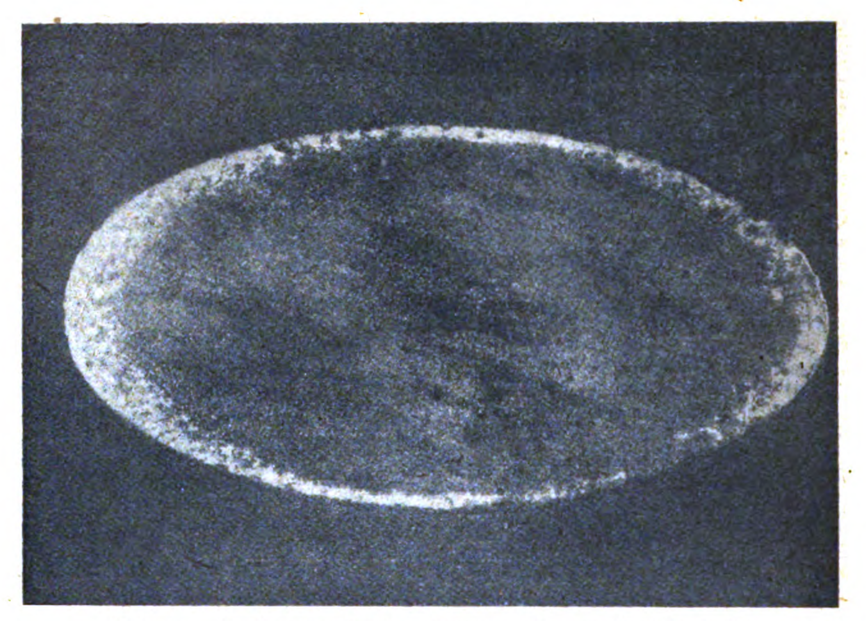


Bild 9a Draht aus Cr-C-Legierung; schräger Durchschnitt. 50 ×



Bild 9b. Draht aus Cr-C-Legierung; Rand. 500 ×

stattgefunden hat, die ungefähr 13% des gesamten Querschnitts in Anspruch nimmt und im wesentlichen nur noch einen auf dem Schliffbild nicht erkennbaren Anteil an Wolfram in Lösung enthält, während der gesamte innere Teil aus der normalen Wolfram-Kohlenstoff-Legierung besteht, deren Aussehen auch nach der Härtung

keine besonderen charakterischen Änderungen erleidet. Eine nachträgliche Anfrage bei der liefernden Firma bestätigte die Annahme eines Irrtums bei der chemischen Analyse, infolgedessen der Kohlestoffgehalt nicht 0,9%, sondern nur 0,3 bis 0,4% betrage. Außerdem wurde mitgeteilt, daß die Probe bei der Verarbeitung in Wasserstoff bei 850° geglüht worden war; hierdurch erklärt sich also das Entstehen der entkohlten Randzone.

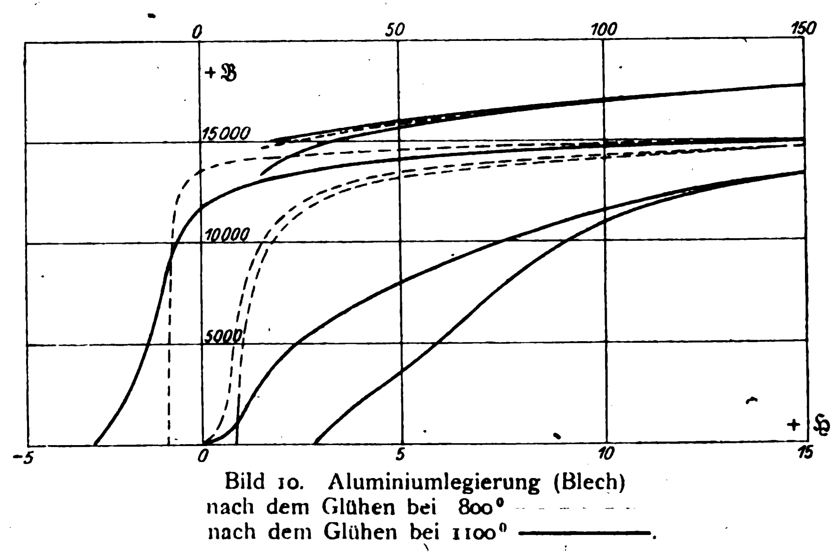


Bild 10. Aluminiumlegierung (Blech)
nach dem Glühen bei 800° - - - - - -
nach dem Glühen bei 1100° ————.

Praktische Beispiele von Schichtungen; mikroskopische Aufnahmen. Zwei weitere instruktive Beispiele hat die Untersuchung der Aluminium-

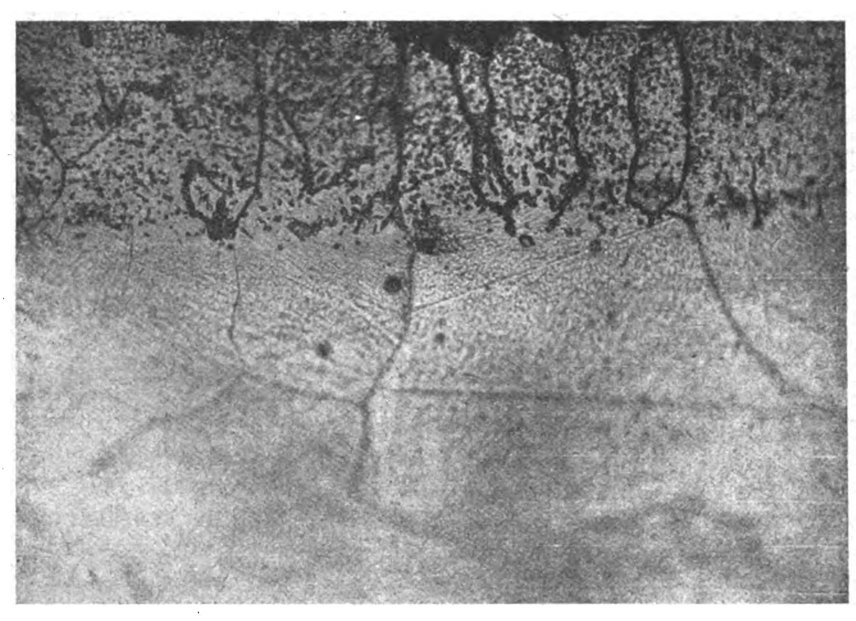


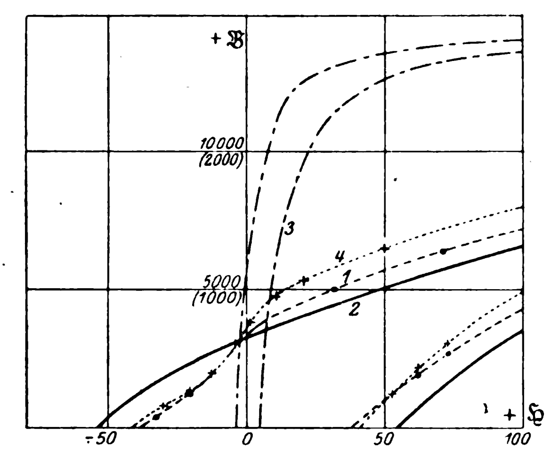
Bild 11. Legierung mit 0,70% Al (Blech) nach dem Glühen bei 1100° Randpartie. 500 ×

und der Mangan-Legierungen ergeben[1]). Bei den zu Blech ausgewalzten Aluminium-Legierungen traten bei niedrigem Prozentgehalt mit der Glühtemperatur (bis 1100°)

[1]) Wissenschaftl. Abh. IV, S. 371 u. 389.

wachsende starke Verzerrungen der Magnetisierungskurven anf (vgl. Bild 10), zu deren Erklärung damals mangels mikrographischer Unterlagen nur Vermutungen geäußert werden konnten, die sich nunmehr nach photographischer Aufnahme mehrerer Schliffe als richtig erwiesen. Danach besteht (Bild 11) die Hauptmasse des Grundmaterials mit 0,7 % Al aus wohl ausgebildeten, magnetisch weichen Ferrit-Mischkristallen, die von einem offenbar magnetisch harten Rand von etwa $^1/_6$ der Blechdicke umgeben ist, welcher bei der entsprechenden, bei nur 800° geglühten Probe vollkommen fehlt. Über die eigentliche Natur dieser Randzone läßt sich natürlich ohne eingehende Untersuchungen nichts feststellen; wahrscheinlich handelt es sich um Beimischungen von Eisenxyd-Oxydul, das ja als magnetisch ziemlich harte Substanz anzusehen ist.

Endlich zeigte ein Stab aus einer Eisenlegierung mit 12,4 % Mn nach dem Abschrecken von 800° eine starke Verzerrung zwischen Remanenz und Koerzitivkraft (Abb. 12), welche offenbar durch die Kombination des harten Grundmaterials



Stab mit Oxydschicht, Kurve beobachtet
1. •-•-•-•-•-•-•

Stab ohne Oxydschicht, Kurve beobachtet
2. ————

Ideale Eisenkurve, zur Berechnung benützt
3. · · -·-·- · -·-

Kurve berechnet aus 2 und 3.
4. + · · · · + · · · · + · ·

1., 2., 4. größerer Maßstab,
3. kleinerer Maßstab.

Bild 12. Manganlegierung 124 C nach dem Abschrecken von 800°.

mit einer dünnen weichen Oberflächenschicht hervorgerufen wurde und nach oberflächlichem Abschmirgeln des Stabes verschwand. Diese Schicht ist jedenfalls dadurch entstanden, daß während der Erhitzungen vor dem Abschrecken der Mangan-Gehalt der Oberfläche oxydiert wurde, so daß sich eine dünne Schicht von reinem Eisen oder niedrigeren Mn-Legierungen bildete, welche den Charakter der ursprünglichen Kurve entsprechend veränderte; dies ließ sich sogar rechnerisch verfolgen: nimmt man nämlich den Querschnitt des ausgeschiedenen Eisens zu $^1/_{50}$ von demjenigen des Kernes an, so erhält man unter Verwendung der Hystereseschleife 3 für reines Eisen nach der Beziehung $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_2 + {}^1/_{50}\,\mathfrak{B}_3$ die Kurve 4, welche tatsächlich zwischen Remanenz und Koerzitivkraft sehr nahe mit der beobachteten Kurve zusammenfällt.

Berücksichtigung des Einflusses von Luftschichten usw. Zu dieser Art von Kombination gehört im grunde genommen auch die Verbindung der ferromagnetischen Probe mit einer umgebenden Luftschicht, wie sie bei jeder ballistischen Messung vorkommt. Da nämlich die sekundäre Spule die Probe niemals vollkommen eng umschließt, sondern immer durch eine mehr oder weniger dicke Unterlage, eine Luftschicht und dergleichen von ihr getrennt ist, und da sich außerdem bei der Messung von Blechen und Drähten auch zwischen den einzelnen Probeteilen Luftschichten befinden, so rührt der ballistische Ausschlag des Galvanometers nicht nur von der Induktion $\mathfrak{B}$ im Eisen, sondern auch von den Kraftlinien in dieser von der Spule umschlossenen Schicht her. Diese Kraftlinien sind durch

die innerhalb der Magnetisierungsspule herrschende Feldstärke $\mathfrak{H}$ gegeben. Bezeichnet also q' den mittleren Querschnitt der Sekundärspule, q denjenigen der Probe, so ist der gesamte gemessene Kraftlinienfluß $\Phi = q \times \mathfrak{B} + (q' - q) \times \mathfrak{H}$, oder die gesuchte Induktion $\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{q} - \left(\frac{q'}{q} - 1\right) \times \mathfrak{H}$.

Auch die unkorrigierte $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$-Kurve wird also durch die mitgemessenen Luftlinien etwas deformiert, wenn auch bei niedrigen Feldstärken kaum merklich. Dagegen spielen diese Korrektionen bei den höheren Induktionen und hauptsächlich bei der Bestimmung der Sättigungswerte eine geradezu ausschlaggebende Rolle und erfordern namentlich bei den sogenannten Isthmus-Methoden eine besonders sorgfältige Berücksichtigung.

Ungleichmässige, geschichtete Proben mit freien Enden. Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf den Fall, daß die zu untersuchende Probe in sich selbst oder vermittelst eines Jochs zu einem magnetischen Kreis zusammengeschlossen ist, also keine freien Enden besitzt; sie haben also nicht ohne weiteres Gültigkeit für die magnetometrischen Messungen, bei denen das Vorhandensein freier Enden geradezu Vorbedingung ist. Es erschien deshalb erwünscht, auch diese Wirkung der freien Enden von Probestücken zu berücksichtigen. Hier hat man an allen den Stellen, wo Induktionslinien aus dem Innern nach außen treten, freien Magnetismus anzunehmen, der auf das Innere des Stabes entmagnetisierend zurückwirkt, d. h. die dort vorhandene Feldstärke verringert. Infolgedessen verlaufen die mit einem freiem Stabe aufgenommenen Magnetisierungskurven schräger, als die mit dem geschlossenen magnetischen Kreis gewonnenen, und zwar um so mehr, je kürzer und dicker die Proben, also je kleiner das Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d}$ ist (l = Länge, d = Durchmesser). Ganz besonders tritt dies hervor bei der scheinbaren Remanenz, die infolgedessen namentlich bei weichen Materialien unter Umständen sehr erheblich geringer wird als die wahre, im geschlossenen Kreis gemessene Remanenz. Außerdem ist die Rückwirkung proportional der Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}$, so daß für die wahre, im Innern der Probe herrschende Feldstärke $\mathfrak{H}$ die Beziehung gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' - N \times \mathfrak{J};$$

dabei ist $\mathfrak{H}'$ die Feldstärke der Magnetisierungsspule und N der sogenannte Entmagnetisierungsfaktor, der durch die Gestalt der Probe gegeben ist, aber nur beim Ellipsoid für jede Magnetisierung konstant ist und sich aus den Dimensionen berechnen läßt, beim Stab oder Blechbündel aber auch noch von $\mathfrak{J}$ abhängt.

Besteht nun die Probe, wie in unserem Fall, aus einem stärker und einem schwächer magnetisierbaren Teil, so wird die magnetische Belegung der Enden und infolgedessen auch die Rückwirkung beider Teile auf die Feldstärke im Innern ganz verschieden sein; die Rückwirkung wird nicht nur die Feldstärke des zugehörigen, sondern auch diejenige des anderen Bestandteiles beeinflussen, und zwar um so stärker, je näher die beiden Bestandteile aneinander liegen. Um dies möglichst deutlich zu machen, kombinierte man ein Bündel von Blechstreifen aus magnetisch vorzüglichem Elektrolyteisen mit einem Bündel von Streifen aus gehärteter Kohlenstoff-Legierung mit 1,5 % C, und zwar einmal, indem man das weiche und das harte Bündel durch eine 4,5 mm dicke Zwischenlage aus Holz trennt, so daß die gegenseitige Wirkung der Enden des einen Bündels auf das andere Bündel noch verhältnismäßig gering blieb, und ferner, indem man die beiden Materialien abwechselnd schichtete, so daß die gegenseitige Wirkung ein Maximum wurde. Beides wurde mit Bündeln von möglichst gleichem Querschnitt und von 22,5 cm bzw. 7,5 cm Länge durchgeführt, um auch über die Zunahme der Wirkung mit der Verringerung der Dimensions-



verhältnisses Aufschluß zu erhalten. Die Aufnahme erfolgte mit dem störungsfreien Magnetometer von Kohlrausch und Holborn, und zwar befanden sich die von der Magnetisierungsspule umschlossenen Probebündel stets im gleichen Abstand vom Magnetometermagnet, so daß es gestattet war, als Maß für die Magnetisierung vergleichsweise direkt die Magnetometerausschläge zu benutzen. In derselben An-



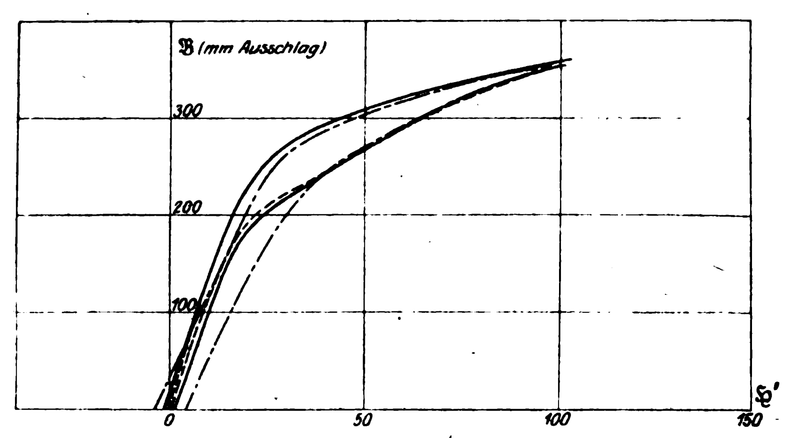


Bild 13. Magnetometrische Beobachtung.

5 Streifen Elektrolyteisen,
4 Streifen Stahlblech; Länge 7,5 cm.
berechnet in zwei Bündeln
abwechselnd geschichtet

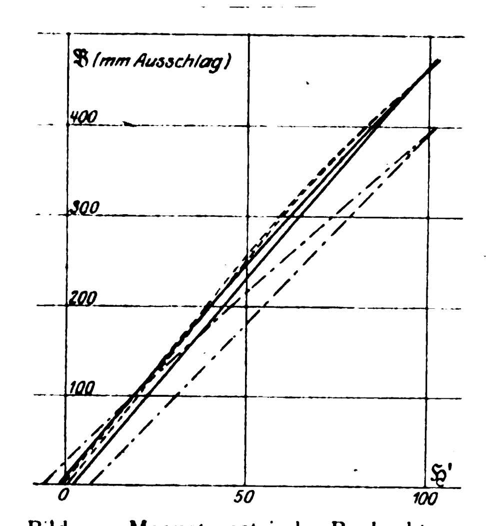


Bild 14. Magnetometrische Beobachtung.

ordnung wurden auch die weichen und harten Bündel für sich allein untersucht und in der früher angegebenen Weise rechnerisch kombiniert; der Vergleich der so berechneten mit den experimentell gefundenen Schleifen läßt dann den wechselseitigen Einfluß der freien Enden erkennen.

Das Ergebnis ist in Bild 13 und 14 für Bündel von 22,5 bzw. 7,5 cm Länge dargestellt. Die aus den Schleifen der beiden Bestandteile berechneten Hystereseschleifen zeigen sich in beiden Fällen weit weniger stark verzerrt, als dies unter denselben Verhältnissen beim geschlossenen Kreis der Fall gewesen wäre (vgl. Bild 1 und 2, 50%), da hier infolge der Einwirkung der freien Enden die 𝔅/𝔥'-Schleife viel weniger steil ansteigt, als dort die 𝔅/𝔥-Schleife. Die Verzerrung wächst jedoch deutlich bei den experimentell aufgenommenen Kurven in Abb. 13, und zwar noch in erhöhtem Maße bei der abwechselnd geschichteten Probe. Weniger deutlich ausgeprägt ist sie bei Bild 14, die dafür wieder den ganzen Charakter der Einwirkung der Enden am stärksten hervortreten läßt. Hiernach liegt die tatsächlich beobachtete Induktion der kombierten Bündel erheblich höher als der berechnete Wert (rund 475 gegen 400 mm) und ebenso liegt der absteigende Ast bis in die Gegend von 100 mm Ausschlag weit oberhalb der berechneten Werte, um dann darunter zu sinken. Der aufsteigende Ast liegt durchweg oberhalb des berechneten,

so daß also die experimentell erhaltene Hystereseschleife gegenüber der berechneten im unteren Teil außerordentlich zusammenschrumpft. Dies erklärt sich folgendermaßen:

Denkt man sich in einem homogenen Bündel weichen Materials einzelne Streifen durch hartes Matetial ersetzt, so wird die Wirkung von deren freien Enden auf die Feldstärke im Innern geringer, bei gleichbleibender Feldstärke der Magnetisierungsspule muß also die wahre Feldstärke und somit auch die Induktion gegenüber der berechneten steigen. Dies ist solange der Fall, als die wahre Induktionskurve des harten Materials unterhalb derjenigen des weichen liegt. Zwischen Remanenz und Koerzitivkraft aber dreht sich dies um; hier sinkt mit wachsender Feldstärke die Induktion des weichen Materials außerordentlich rasch, um bald negativ zu werden, während diejenige des harten Materials noch lange positiv bleibt. Nunmehr wird die entmagnetisierende Wirkung der Enden des harten Materials auf das gesamte Bündel größer, als es im Fall des gleichmäßig weichen Materials gewesen wäre, die Feldstätke und somit auch die Induktion müssen also unter den berechneten Wert sinken. Eine Übersicht hierüber gibt die nachstehende Tabelle.

	Scheinbare Remanenz in mm			Scheinbare Koerzitivkraft in Gauß		
l cm	berechnet	kombiniert in zwei Bündeln	abwechselnd geschichtet	berechnet	kombiniert in zwei Bündeln	abwechselnd geschichtet
22,5	244,3	108.5	37,6	4.0	1,3	0.4
7.5	133,2	41.4	10.2	6.7	1,85	0,4

Hieraus geht hervor, daß die scheinbare Remanenz und die scheinbare Koerzitivkraft namentlich bei abwechselnder Schichtung ganz außerordentlich stark unter die berechneten Werte sinken, und zwar auf den 13. bzw. 17. Teil. Es folgt daraus, daß auch die Bestimmung der Koerzitivkraft mit dem Magnetometer, die bei gleichmäßigem Material von der Wirkung der freien Enden unabhängig ist (wegen $\mathfrak{J} = 0$ in der Formel $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' - N\mathfrak{J}$), bei ungleichmäßigem geschichtetem Material vollkommen versagt; sie liefert unter sonst gleichen Verhältnissen um so kleinere Werte, je geringer das Dimensionsverhältnis der Probe ist.

Einfluß vereinzelter harter oder weicher Stellen. Während die bisher betrachtete Wirkung der Kombination verschiedenartigen Materials in Form von Längsschichten verhältnismäßig recht gut zu übersehen und experimentell zu prüfen ist, bietet die Untersuchung der Wirkung von vereinzelten abgegrenzten harten Stellen in weichem Material, oder umgekehrt, erhebliche Schwierigkeit. Zwar ist der Einfluß des wachsenden Gehaltes an hartem Eisenkarbid Fe_3C in Gestalt von Perlit in weichem Ferritgefüge durch die Untersuchung der langsam abgekühlten Eisen-Kohlenstoff-Legierungen in der Reichsanstalt eingehend untersucht worden, und ebenso die Wirkung des gelösten Kohlenstoffs bei abgeschreckten C-Legierungen[1]), aber die Anschaulichkeit des Ergebnisses wird dadurch beeinträchtigt, daß die magnetischen Eigenschaften des einen Bestandteils, des Zementits, nicht bekannt sind. Man könnte daran denken, die Kombination von hartem und weichem Material mit bekannten Eigenschaften in Form von Pulvern oder Feilspänen gemischt zu untersuchen; dies hat aber einmal den Nachteil, daß die Zerkleinerung von weichem Eisen mit einer starken mechanischen und magnetischen Härtung verbunden ist, und daß weiterhin die Magnetisierungskurven von derartigen pulverförmigen Proben infolge der Luftzwischenräume und der außerordent-

[1]) Wissenschaftl. Abb. IV, H. 3.



lich stark entmagnetisierenden Wirkung der freien Enden der kleinen Teilchen so gestreckt verlaufen, daß geringere Änderungen der magnetischen Eigenschaften kaum festzustellen sind. Es wurde nun versucht, wenigstens einen gewissen Überblick dadurch zu gewinnen, daß man die mittleren Teile eines Stabes aus Stahl und eines solchen aus weichem Eisen von bekannten magnetischen Eigenschaften in einzelne Stücke von 5 bzw. 10 mm Länge zerlegte, von denen die kürzeren beiderseits einen Zapfen von 2,5 mm Länge mit Gewinde trugen, die längeren mit entsprechendem Gewinde versehene Bohrungen von gleicher Länge, so daß man Stäbe beliebig aus harten und weichen Materialteilen zusammensetzen und im Joch untersuchen konnte. Um den Gegensatz zu vermehren, wurden die Stahlstücke nachträglich noch gehärtet. Auch hier war der Einfluß der Luftschlitze zwischen den einzelnen Einsatzstücken störend und bedingte einen schrägeren Anstieg der Magnetisierungskurve; man konnte dem aber dadurch einigermaßen Rechnung tragen, daß man die Proben zunächst aus identischem Material zusammensetzte und dann erst einzelne Stücke durch Material aus anderen Sorten ersetzte, wobei die Anzahl der Luftschlitze ungeändert blieb. Das Ergebnis der ganzen ziemlich umfangreichen Messungen läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Im Gegensatz zu den Kombinationen von Längsschichtungen tritt hier eine Verzerrung der Magnetisierungskurven überhaupt nicht auf. Jede Einfügung eines harten Teils in weiches Grundmaterial oder umgekehrt macht sich natürlich durch entsprechende Abflachung bzw. Erhöhung der Gestalt der Magnetisierungskurven sowie durch eine entsprechende Vergrößerung oder Verringerung der Koerzitivkraft bemerkbar; die Kurven verlaufen aber durchaus regelmäßig, einerlei, ob sich die mit dem ballistischen Galvanometer verbundene Induktionsspule direkt über der Unstetigkeitsstelle befindet oder ein Stück seitlich davon. Auch die mit dem Joch aufgenommenen Kurven der abwechselnd aus harten und weichen Teilen zusammengesetzten Stäbe verliefen durchaus normal und gaben auch, abgesehen von der üblichen Scherung, dieselbe Koerzitivkraft wie das Magnetometer, und zwar ließ sich in diesem Falle die Koerzitivkraft der kombinierten Proben aus den Koerzitivkräften der einzelnen Teile ziemlich genau berechnen. Beispielsweise bestand ein derartiger Stab aus 9 weichen und 8 harten Stücken, deren Gesamtgewicht sich wie $53:47$ verhielt; die Koerzitivkraft des weichen Materials betrug 1,2, diejenige des harten 45 Gauß. Die Berechnung lieferte $0{,}47 \cdot 45{,}0 + 0{,}53 \cdot 1{,}2 = 21{,}8$ Gauß, während die Beobachtung mit dem Magnetometer 21,9 Gauß ergab.

Hiernach würde sich beispielsweise auch die Koerzitivkraft des Eisenkarbids, das ja bei jedem käuflichen Eisen als Verunreinigung in größerer oder geringerer Menge vorkommt, überschlagen lassen. Die Koerzitivkraft der eutektoiden Legierung mit rund 1% C beträgt nach den Messungen der Reichsanstalt (a. a. O. S. 334) für eine maximale Feldstärke $\mathfrak{H} = 150$ etwa 8 Gauß. Nun nimmt bei der eutektoiden Legierung das Eisenkarbid etwa 15% des Volumens ein, das reine Eisen dagegen 85%; setzt man die Koerzitivkraft des letzteren zu 0,7, so erhält man aus der Beziehung $15\,x + 85 \cdot 0{,}7 = 100 \cdot 8{,}0$ für die gesuchte Koerzitivkraft des im des im Eisen eingebeteten Eisenkarbids für eine Feldstärke von $\mathfrak{H} = 150$ rund 50 Gauß.

Jedenfalls geht aus dem Obigen hervor, daß die magnetometrische Bestimmung der Koerzitivkraft, dieser zur Charakterisierung des Materials so wichtigen Konstante, auch bei inhomogenem Material, falls dies nur die verschiedenen Bestandteile nicht in geschichtetem Zustand enthält, richtige Werte liefert, welche mit der gewöhnlichen Definition der Koerzitivkraft als derjenigen Feldstärke, die zur Beseitigung der Remanenz notwendig ist, im Einklang stehen.



Über die Fehlerkurven des Pendelzählers.

Von

G. Hommel, Frankfurt a. M.

Unter den Meßgeräten zur Bestimmung der elektrischen Arbeit nimmt der Pendelzähler eine besondere Stellung ein. Infolge seiner eigenartigen Wirkungsweise, die hier als bekannt vorausgesetzt werden darf, kann von dem Einfluß der Reibung auf sein Verhalten im Betriebe völlig abgesehen werden. Hauptsächlich aus diesem Grunde ist zu erwarten, daß der Versuch, die Fehlerkurven des Pendelzählers auf analytischem Wege abzuleiten, zu Ergebnissen führen wird, die mit der Erfahrung in befriedigender Weise übereinstimmen und die einer hinreichenden Verallgemeinerung fähig sind, um aus wenigen meßtechnischen Daten einen Rückschluß auf das Verhalten des Zählers im ganzen Meßbereich zu ermöglichen. Die Darstellung dieser Zusammenhänge soll in der vorliegenden Arbeit versucht werden.

1. Die Soll-Fehlerkurven des Pendelzählers.

Die Fehlerkurve eines Zählers ist das Bild der Funktion

$$f = F\ (J),$$

wobei f die Gangabweichungen vom Sollwerte bei der jeweiligen Stromstärke J bezeichnet. Da die Spannung als konstant betrachtet werden darf, so stellt J gleichzeitig ein Maß für die jeweilige Belastung in Watt dar. Stimmen bei einem Zähler für alle Belastungen die Angaben mit den Sollwerten überein, so fällt seine Fehlerkurve mit der Abszissenachse (J-Achse) zusammen; ihre Gleichung ist:

$$f = 0.$$

Sie möge die Soll-Fehlerkurve heißen.

Beim Pendelzähler ist nun wegen der absatzweisen Registrierung in einzelnen Umschalteperioden zu unterscheiden zwischen dem Gesamtfehler f und den Gangabweichungen f_1 und f_2 in zwei aufeinander folgenden Perioden. Diese Fehler stehen untereinander in der Beziehung:

$$f = \frac{1}{2}\ (f_1 + f_2),$$

wobei f_1 und f_2 mit ihrem jeweiligen Vorzeichen einzusetzen sind. Die Gleichung der Soll-Fehlerkurve geht daher für den Pendelzähler über in die folgende:

$$f_1 + f_2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt rein mathematisch eine unbegrenzte Anzahl Lösungen zu, die aber meßtechnisch durchaus nicht gleichwertig sind. Je nach der Belastungsart, bei welcher die Arbeitsmessung erfolgt, ergeben sich vielmehr wesentliche Unterschiede in der Genauigkeit der Gesamtangaben des Zählers, die von der Form der Funktionen: $f_1 = F'\ (J)$ und $f_2 = F''\ (J)$ abhängen. Handelt es sich z. B. um eine Belastung, die überhaupt unveränderlich ist, oder die während eines Zeitraumes, der mit einem geraden Vielfachen der Periodendauer zusammenfällt, konstant bleibt, so können die Periodenfehler f_1 und f_2 ganz beliebige Funktionen von J sein, die nur die eine Bedingung erfüllen müssen, daß ihre Abbildungen Kurven ergeben, welche spiegelbildlich zur Abszissenachse liegen.

Sind im besonderen die Fehlerkurven f_1 und f_2 zwei zur J-Achse parallele Gerade, also f_1 und f_2 über den ganzen Meßbereich konstant und mit entgegengesetztem Vorzeichen einander gleich, so verschwindet der Gesamtfehler f auch dann noch, wenn die mittlere Belastung während zweier aufeinanderfolgender Perioden denselben Wert beibehält, sonst aber beliebigen Schwankungen unterworfen ist.



Trifft jedoch keine der erwähnten Voraussetzungen über die Art der Belastung zu, so läßt sich von vornherein nur sagen, daß jedenfalls die Bedingung der Soll-Fehlerkurve

$$f = 0$$

auch meßtechnisch erfüllt wird, wenn sowohl f_1 als auch f_2 für sich derselben Gleichung genügen.

Bei endlichen Werten von f_1 und f_2 dagegen ergibt sich die einzuhaltende Gesetzmäßigkeit für den Verlauf der Periodenfehler, wenn die Forderung $f = 0$ bei beliebig gearteter Belastung erfüllt sein soll, aus folgender Überlegung:

In Bild 1 ist ein solcher Fall dargestellt, bei welchem der jeweilige Belastungsstrom in regelloser Folge verschiedene Werte aufweist. Bedeutet T die Gesamtdauer des Belastungsvorganges und τ die Dauer einer Meßperiode des Zählers, so werde T gegenüber τ von solcher Größe angenommen, daß in der Gleichung:

$$n \cdot \tau = T$$

für die Anzahl n der Umschalteperioden stets eine gerade Zahl gesetzt werden darf. Von den gewählten Indexen der Größen J und t bedeutet die erste Ziffer die Ordnungsnummer des Stromes, bzw. seiner Zeitdauer in einer bestimmten Um-

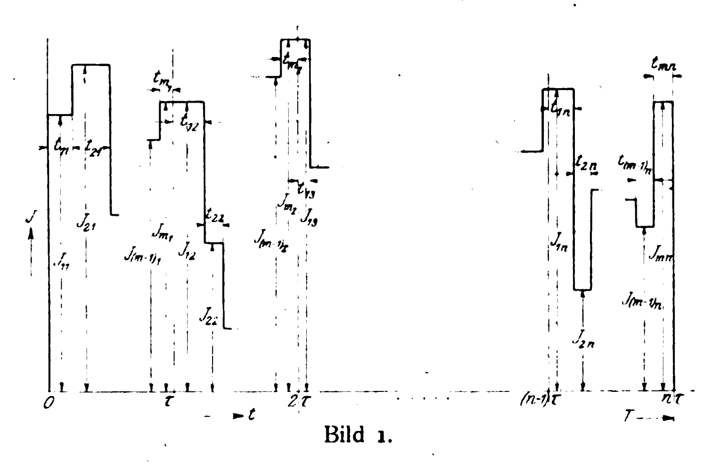


Bild 1.

schalteperiode; die zweite Ziffer gibt an, zu welcher Periode die betreffenden Strom- und Zeitwerte gehören. Bezeichnet ferner E die (konstante) Spannung, a_1, a_2 usw. den jeweiligen Arbeitsbetrag in der 1., 2., ... usw. Umschalteperiode, so sind die Sollwerte dieser Einzelarbeiten durch die Ausdrücke bestimmt:

$$a_1 = E[J_{11} \cdot t_{11} + J_{21} \cdot t_{21} + \ldots\ldots + J_{m1} \cdot t_{m1}]$$
$$a_2 = E[J_{12} \cdot t_{12} + J_{22} \cdot t_{22} + \ldots\ldots + J_{m2} \cdot t_{m2}]$$

usf. bis:

$$a_n = E[J_{1n} \cdot t_{1n} + J_{2n} \cdot t_{2n} + \ldots\ldots + J_{mn} \cdot t_{mn}]$$

und die Gesamtarbeit ist: $A = \sum_1^n a$.

Zur Darstellung der vom Zähler angezeigten Hatwerte dieser Arbeiten (z_1, z_2 usw.) sind noch die Periodenfehler f mit entsprechenden Indexen einzuführen, und zwar sollen diese Gangabweichungen in allen ungeradzahligen Perioden positives, in den geradzahligen aber negatives Vorzeichen haben. Damit erhält man für die angezeigten Werte des Zählers in den einzelnen Perioden:

$$z_1 = E[J_{11} \cdot t_{11} (1 + f_{11}) + J_{21} \cdot t_{21} (1 + f_{21}) + \ldots\ldots + J_{m1} \cdot t_{m1} (1 + f_{m1})]$$
$$z_2 = E[J_{12} \cdot t_{12} (1 - f_{12}) + J_{22} \cdot t_{22} (1 - f_{22}) + \ldots\ldots + J_{m2} \cdot t_{m2} (1 - f_{m2})]$$

usf. bis

$$z_n = E[J_{1n} \cdot t_{1n} (1 - f_{1n}) + J_{2n} \cdot t_{2n} (1 - f_{2n}) + \ldots\ldots + J_{mn} \cdot t_{mn} (1 - f_{mn})]$$

und die Gesamtangabe des Zählers: $Z = \sum_1^n z$.

Die Bedingung für fehlerlosen Gang oder m. a. W. für die Einhaltung der Soll-Fehlerkurve lautet:

$$A - Z = 0.$$

Die Ausführung der Subtraktion ergibt:

$$A - Z = E\,[(J_{12}\,t_{12}\cdot f_{12} + \ldots\ldots + J_{m2}\cdot t_{m2}\cdot f_{m2} + \ldots\ldots + J_{1n}\,t_{1n}\,f_{1n} + \ldots\ldots + J_{mn}\cdot t_{mn}\cdot f_{mn}) - (J_{11}\,t_{11}\cdot f_{11} + \ldots\ldots + J_{m1}\cdot t_{m1}\cdot f_{m1} + \ldots\ldots + J_{1\,(n-1)}\cdot t_{1\,(n-1)}\cdot f_{1\,(n-1)} + \ldots\ldots + J_{m\,(n-1)}\cdot t_{m\,(n-1)}\cdot f_{m\,(n-1)})].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet, wenn alle Produkte $J\cdot f$ den gleichen Betrag haben; denn in diesem Falle wird:

$$A - Z = E\cdot J\cdot f\,[(t_{12} + \ldots\ldots + t_{m2} + \ldots\ldots + t_{1n} + \ldots\ldots + t_{mn}) - (t_{11} + \ldots\ldots + t_{m1} + \ldots\ldots + t_{1\,(n-1)} + \ldots\ldots + t_{m\,(n-1)})].$$

Die Teilsummen der Belastungszeiten sind einander gleich, da jede von ihnen den Zeitraum von $\frac{n}{2}$ Umschalteperioden ausmacht. Sonach ist schließlich:

$$A - Z = E\cdot J\cdot f\left(\frac{n}{2}\cdot\tau - \frac{n}{2}\cdot\tau\right) = 0,$$

d. h. die soeben erwähnte Bedingung: $J\cdot f = \text{const.}$ ist die Gesetzmäßigkeit, welche von den Periodenfehlern befolgt werden muß, wenn der Zähler bei beliebig wechselnder Belastung im ganzen Meßbereich genau richtig zeigen soll.

Im einzelnen gilt für zwei aufeinanderfolgende Perioden:

$$J\cdot f_1 = -J\cdot f_2 = \pm\,\text{const.}$$

Die Gleichungen stellen zwei Äste von gleichseitigen Hyperbeln dar, welche zur J-Achse symmetrisch liegen und umschließen auch den Spezialfall: $J\cdot f_1 = J\cdot f_2 = 0$, für welchen die Soll-Kurven der Periodenfehler mit der Abszissenachse zusammenfallen. In Bild 2 sind die typischen Formen dieser Soll-Kurven dargestellt. Es entsprechen:

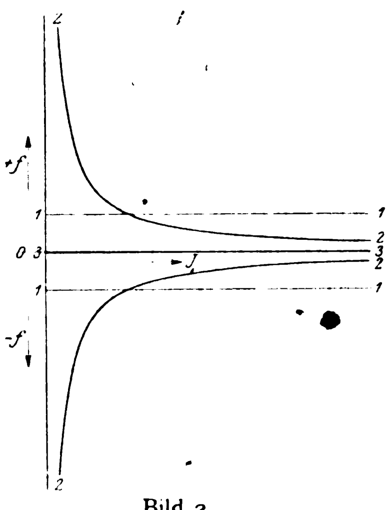


Bild 2.

die Kurven 11 den Fehlergleichungen: $f_1 = -f_2 = \pm\,c$
die Kurven 22 den Fehlergleichungen: $J\cdot f_1 = -J\,f_2 = \pm\,c'$, endlich
die Kurven 33 den Fehlergleichungen: $f_1 = f_2 = 0$.

2. Die Hat-Fehlerkurven des Pendelzählers.

Der Vortrieb des Zählwerkes beim Pendelzähler ist bekanntlich proportional der Differenz der Pendelschwingungszahlen. Diese erfahren infolge der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den festen und beweglichen Spulen eine gegensätzliche Veränderung derart, daß ein Pendel beschleunigt, das andere verzögert wird, und zwar erfolgt diese Beeinflußung in jeder Umschalteperiode im umgekehrten Sinne wie in den nächstbenachbarten.

Bei unbelastetem Zähler seien n_l^0 und n_r^0 die Grundschwingungszahlen des linken bzw. rechten Pendels pro Sekunde und für irgend einen Belastungsstrom J die Zunahme oder Abnahme der Schwingungszahlen proportional[1]) dieser Stromstärke, was durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden kann:

[1]) Die Gleichungen zwischen n und J enthalten in Wahrheit noch quadratische Glieder, die aber bei den Differenzen der Schwingungszahlen, auf die es in den folgenden Betrachtungen allein ankommt, herausfallen.

$$n_l' = n_l^0 + \alpha \cdot J; \qquad n_r' = n_r^0 + \gamma \cdot J$$
$$n_l'' = n_l^0 - \beta \cdot J; \qquad n_r'' = n_r^0 - \delta \cdot J.$$

Die einmal gestrichenen Größen bedeuten Beschleunigung, die zweimal gestrichenen Verzögerung des betreffenden Pendels. Die Proportionalitätsfaktoren α, β, γ und δ sind im allgemeinen sämtlich untereinander verschieden.

Ist ferner v_l und v_r das Übersetzungsverhältnis vom linken bzw. rechten Steigrad bis zur letzten Zählwerksache, so beträgt der sekundliche Vortrieb:

in der ersten Umschalteperiode: $\frac{n_l'}{v_l} - \frac{n_r''}{v_r}$

und in der zweiten Umschalteperiode: $\frac{n_r'}{v_r} - \frac{n_l''}{v_l}$.

(Als erste Umschalteperiode wird in der Folge immer diejenige bezeichnet, in welcher das linke Pendel eine Beschleunigung erfährt.)

Der absolute Betrag der Übersetzungsverhältnisse ist bei den Pendelzählern vom Meßbereich abhängig; das Verhältnis $v_l : v_r$ ist aber für alle Zähler konstant und gleich 91 : 89. In demselben Verhältnis stehen auch die Grundschwingungszahlen der Pendel, wenn der Zähler richtig einreguliert ist.

Die wirklichen Übersetzungszahlen v_l und v_r enthalten also eine Konstante, die von Fall zu Fall bestimmt werden muß[1]). Es ist:

$$v_l = k \cdot \frac{227{,}5}{9} \quad \text{und} \quad v_r = k \cdot \frac{222{,}5}{9}.$$

Der Vortrieb des Zählwerkes in t Sekunden beträgt daher:

In der ersten Periode: $t \cdot \frac{9}{k \cdot 25} \cdot \left(\frac{n_l'}{9{,}1} - \frac{n_r''}{8{,}9}\right)$

In der zweiten Periode: $t \cdot \frac{9}{k \cdot 25} \cdot \left(\frac{n_r'}{8{,}9} - \frac{n_l''}{9{,}1}\right)$

Umdrehungen der letzten Zeigerwelle. Entspricht ein voller Umgang dieses Zeigers U kWh oder U · 3600 kWs, so bestehen bei fehlerlosem Gang des Zählers die Gleichungen:

$$U \cdot 3600 \cdot t \cdot \frac{9}{k \cdot 25} \left(\frac{n_l'}{9{,}1} - \frac{n_r''}{8{,}9}\right) = J \cdot E \cdot t$$

und

$$U \cdot 3600 \cdot t \cdot \frac{9}{k \cdot 25} \left(\frac{n_r'}{8{,}9} - \frac{n_l''}{9{,}1}\right) = J \cdot E \cdot t$$

J in kA wenn U in kWh.

Umgekehrt liefern diese Beziehungen bei einem Zähler mit endlichen Gangabweichungen für U die Hatwerte U_1 und U_2, welche die Zählerkonstante haben müßte, wenn die vorstehenden Gleichungen befriedigt werden sollen. Man erhält nach einigen Umrechnungen zunächst:

$$U_1 = \frac{J \cdot E \cdot k}{1296 \left(\frac{n_l'}{(9 + 0{,}1)} - \frac{n_r''}{(9 - 0{,}1)}\right)}$$

und

$$U_2 = \frac{J \cdot E \cdot k}{1296 \left(\frac{n_r'}{9 - 0{,}1} - \frac{n_l''}{9 + 0{,}1}\right)}.$$

Der Hauptnenner in der Klammer ist $9^2 - 0{,}1^2$ oder mit ausreichender Genauigkeit: 81; so daß:

$$U_1 = \frac{J \cdot C}{8{,}9\, n_l' - 9{,}1\, n_r''}; \quad U_2 = \frac{J \cdot C}{9{,}1\, n_r' - 8{,}9\, n_l''}$$

[1]) Vgl. Orlich, ETZ. 1901, S. 96.

wobei: $\frac{E \cdot k}{16} = C$ gesetzt wurde.

Der Nenner dieser Ausdrücke enthält konstante und mit dem Belastungsstrom veränderliche Größen. Zu ihrer Trennung dienen die Gleichungen für die Schwingungszahlen, die zu Beginn dieses Abschnittes aufgestellt wurden. Hiermit ergibt sich:

$$U_1 = \frac{J \cdot C}{J\,(8{,}9\,\alpha + 9{,}1\,\delta) + (8{,}9\,n_1^0 - 9{,}1\,n_r^0)}$$

$$U_2 = \frac{J \cdot C}{J\,(9{,}1\,\gamma + 8{,}9\,\beta) - (8{,}9\,n_1^0 - 9{,}1\,n_r^0)}$$

und nach Ersatz der Klammer-Werte durch die Abkürzungen a_1, a_2 und b:

$$U_1 = \frac{J \cdot C}{J \cdot a_1 + b}; \quad U_2 = \frac{J \cdot C}{J \cdot a_2 - b}.$$

Die Gangabweichungen f_1 und f_2 in den einzelnen Perioden sind nach Größe und Vorzeichen:

$$f_1 = U - U_1 = U - \frac{J \cdot C}{J \cdot a_1 + b}; \qquad f_2 = U - U_2 = U - \frac{J \cdot C}{J \cdot a_2 - b}.$$

Zur besseren Beurteilung der Gestalt dieser Fehlerkurven für den Vergleich mit den Soll-Kurven des 1. Abschnittes werde die erste dieser Gleichungen zunächst in anderer Form geschrieben:

$$J \cdot f_1 - J\left(U - \frac{C}{a_1}\right) + f_1 \cdot \frac{b}{a_1} = \frac{b \cdot U}{a_1}$$

nach Addition von $-\frac{b}{a_1}\left(U - \frac{C}{a_1}\right)$ auf beiden Seiten und entsprechender Zusammenfassung folgt:

$$\left(J + \frac{b}{a_1}\right) \cdot \left(f_1 - \left(U - \frac{C}{a_1}\right)\right) = \frac{b\,C}{a_1^2} \quad \text{und ähnlich für die zweite Periode:} \qquad \text{(I a)}$$

$$\left(J - \frac{b}{a_2}\right) \cdot \left(f_2 - \left(U - \frac{C}{a_2}\right)\right) = -\frac{b\,C}{a_2^2}. \qquad \text{(I b)}$$

Nunmehr ist ersichtlich, daß die Hat-Fehlerkurven des Pendelzählers in den einzelnen Perioden ebenfalls gleichseitige Hyperbeln sind, aber mit dem Unterschiede, daß deren Asymptoten nicht mit den J — f-Koordinaten zusammenfallen, wie es die Bedingung der Soll-Kurven verlangt.

In den letzten Ableitungen wurde die Konstante b, welche den Ausdruck: $8{,}9\,n_1^0 - 9{,}1\,n_r^0$ vertritt, als eine endliche Größe behandelt. Werden nun die Grundschwingungszahlen auf ihren Sollwert, der durch die Beziehung:

$$n_r^0 = \frac{89}{91} \cdot n_1^0 \qquad \text{(II)}$$

gekennzeichnet ist, einreguliert, so geht die Konstante b in den Wert Null über. Damit degenerieren aber die Hat-Fehlerkurven (I a) und (b) in die zur J-Achse parallelen Geraden:

$$f_1 = U - \frac{C}{a_1} \text{ und } f_2 = U - \frac{C}{a_2}.$$

Demnach ist es grundsätzlich ausgeschlossen, die Hat-Fehlerkurven der einzelnen Meßperioden mit den für endliche Gangabweichungen gefundenen Soll-Kurven vollständig zur Deckung zu bringen. Es bleibt noch zu prüfen, ob die für verschwindend kleine Periodenfehler gültigen Gleichungen der Soll-Kurven:

$$J \cdot f_1 = J \cdot f_2 = 0$$

befriedigt werden können.

$$f_1 = 0 \text{ liefert: } a_1 = \frac{C}{U} \text{ und } f_2 = 0;\ a_2 = \frac{C}{U}.$$

Sonach ist: $a_1 = a_2$ die Voraussetzung für die Einhaltung der Soll-Kurven: $J \cdot f_1 = J \cdot f_2 = 0$. Sie kann, wie in den folgenden Betrachtungen noch gezeigt wird, durch Regulierung nur in besonderen Fällen erfüllt werden.

Dagegen ergibt sich noch aus der Beziehung:

$$f_1 + f_2 = 0$$

Die Gleichung:

$$\frac{2\, a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2} = \frac{C}{U} = \frac{E \cdot k}{16\, U} \tag{III}$$

welche die Bedingung für die allgemein zur Regulierung der Pendelzähler angewendete Abgleichung des Spannungsstromes darstellt. Die Verwendung der letzten Gleichung erfordert zunächst die Überführung der mit a_1 und a_2 bezeichneten Ausdrücke in Größen, die der Messung unmittelbar zugänglich sind.

3. Die Kennlinien und Kennwerte des Pendelzählers.

Die zu Beginn des vorigen Abschnittes aufgestellten Gleichungen für die Pendelschwingungszahlen beim belasteten Zähler sind in bezug auf die Stromstärke J linear und entsprechen daher vier Geraden, die in Bild 3 dargestellt sind. Da durch ihre gegenseitige Lage das Verhalten des Zählers vollständig bestimmt ist, mögen sie als „Kennlinien" bezeichnet werden.

Wie schon erwähnt, treten bei Belastung des Zählers immer nur die beschleunigten Schwingungen des linken und die verzögerten Schwingungen des rechten Pendels oder umgekehrt gleichzeitig auf. Den Differenzen dieser Schwingungszahlen entsprechen in dem Bild die Ordinatenabschnitte zwischen den beiden äußeren bzw. den inneren Kennlinien. Diese Abschnitte sind mit m_1 und m_2 bezeichnet und können durch Beobachtung einer Anzahl gleichsinniger Koinzidenzen z und der zugehörigen Zeit t in Sekunden direkt gemessen werden. Bei irgend einem Belastungsstrom J ist:

$$n_l' - n_r'' = \frac{2\, z_1}{t_1} = m_1 \quad \text{(1. Periode)}$$

sowie:

$$n_r' - n_l'' = \frac{2\, z_2}{t_2} = m_2 \quad \text{(2. Periode)}$$

ferner bei unbelastetem Zähler:

$$n_l^0 - n_r^0 = \frac{2\, z_0}{t_0} = m_0 \quad \text{(1. Periode)}$$

und:

$$n_r^0 - n_l^0 = -\frac{2\, z_0}{t_0} = -m_0 \quad \text{(2. Periode).}$$

Bild 3.

Die Strecken $J\alpha$ und $J\beta$ bzw. $J\gamma$ und $J\delta$ bedeuten die Zu- oder Abnahme der Schwingungszahlen des linken bzw. rechten Pendels. Aus dem geometrischen Zusammenhang der Schaulinien folgt:

$$m_1 - m_0 = J(\alpha + \delta) \tag{1}$$

und

$$m_2 + m_0 = J(\beta + \gamma). \tag{2}$$

Nach den früheren Ableitungen war (Seite 171):

$$a_1 = 8{,}9\,\alpha + 9{,}1\,\delta = 9 \cdot (\alpha + \delta) - 0{,}1\,(\alpha - \delta)$$

$$a_2 = 8{,}9\,\beta + 9{,}1\,\gamma = 9 \cdot (\beta + \gamma) - 0{,}1\,(\beta - \gamma).$$

[1]) Vgl. Fußnote 2, S. 169.

Die Unterschiede der Proportionalitätskonstanten α, β, γ und δ sind nun erfahrungsgemäß so gering, daß der zehnte Teil ihrer Differenz gegenüber ihrer neunfachen Summe von höherer Ordnung klein ist. Mit Vernachlässigung dieser Differenzglieder ergibt sich daher:

$$a_1 = 9(\alpha + \delta); \qquad a_2 = 9(\beta + \gamma) \ldots\ldots \qquad (3) \text{ und } (4)$$

und die Verbindung von Gleichung (1) bis (4) liefert:

$$a_1 = \frac{9(m_1 - m_0)}{J}; \qquad a_2 = \frac{9(m_2 + m_0)}{J}.$$

Zur Abkürzung werde noch gesetzt:

$$m_1 - m_0 = s_1 \text{ und } m_2 + m_0 = s_2;$$

so daß schließlich:

$$a_1 = \frac{9 \cdot s_1}{J} = 9 s_1'; \qquad a_2 = \frac{9 s_2}{J} = 9 s_2'. \qquad (5) \text{ und } (6)$$

Die Größen s_1 und s_2 werden wegen ihrer Bedeutung für das Verhalten des Zählers weiterhin kurz als „Kennwerte" bezeichnet. Sie sind — im Gegensatz zu m_1 und m_2 — dem Strome J direkt proportional und, wie man sich aus Bild 3 leicht überzeugt, in bezug auf m_0 invariant. Durch die letztere Eigenschaft wird die Spannungsabgleichung vollständig unabhängig von der Einstellung der Grundschwingungszahlen; es ist daher gleichgültig, in welcher Reihenfolge diese Regulierungen ausgeführt werden. Für die weiteren Betrachtungen werden noch die spezifischen Kennwerte s_1' und s_2' eingeführt, die für jeden Pendelzähler charakteristische Konstante sind.

Die auf Seite 171 abgeleiteten Gleichungen für die Periodenfehler f_1 und f_2 können jetzt mit den Werten für a_1 und a_2 aus (5) und (6) und mit Berücksichtigung daß:

$$b = 8{,}9\, n_l^0 - 9{,}1\, n_r^0 = 9(n_l^0 - n_r^0) - 0{,}1(n_l^0 + n_r^0), \text{ somit } b = 9 m_0 - 0{,}2\, n_0$$

(wobei n_0 gleich dem arithmetischen Mittel aus den Grundschwingungszahlen n_l^0 und n_r^0 ist) in der Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= U - \frac{J \cdot C}{9 m_1 - 0{,}2\, n_0} \\ f_2 &= U - \frac{J \cdot C}{9 m_2 + 0{,}2\, n_0} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{IV a und b})$$

Die am Schluß des vorigen Abschnittes gefundene Bedingungsgleichung für die Regulierung des Spannungsstromes (III) lautet mit den Werten für a_1 und a_2 aus (5) und (6)

$$\frac{2 s_1' \cdot s_2'}{s_1' + s_2'} = \frac{C}{9 U}. \qquad (7\text{a})$$

Hier steht auf der linken Seite das „harmonische Mittel" der spez. Kennwerte; wenn nun deren gegenseitiges Verhältnis nicht mehr als um etwa 10 v. H. von der Einheit abweicht, so kann es mit ausreichender Genauigkeit durch das arithmetische Mittel ersetzt werden.. Die Gleichung (7a) geht damit über in:

$$s_1' + s_2' = \frac{2 C}{9 U}. \qquad (7\text{b})$$

Durch den Übergang von den spezifischen zu den absoluten Kennwerten für einen bestimmten Meßstrom J ergibt sich schließlich die Form:

$$\mathbf{m_1 + m_2 = \frac{2 J \cdot C}{9 U}}. \qquad (8)$$

Für die folgenden Untersuchungen, die sich nur mit allgemein gültigen Beziehungen beschäftigen, soll aber von jeder derartigen einschränkenden Annahme abgesehen werden, obwohl sie in den weitaus meisten Fällen zutrifft. Das wird zum Ausdruck gebracht durch den Ansatz:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{s_1'}{s_2'} = \varphi.$$

Für einen Zähler, dessen Spannungsstrom so abgeglichen wurde, daß Gleichung (7a) befriedigt wird, ist dann:

$$s_1' = \frac{C}{9U} \cdot \frac{1+\varphi}{2} \text{ und } s_2' = \frac{C}{9U} \cdot \frac{1+\varphi}{2\varphi}$$

und ferner:

$$a_1 = 9\,s_1' = \frac{C}{U} \cdot \frac{1+\varphi}{2}$$

$$a_2 = 9\,s_2' = \frac{C}{U} \cdot \frac{1+\varphi}{2\varphi}.$$

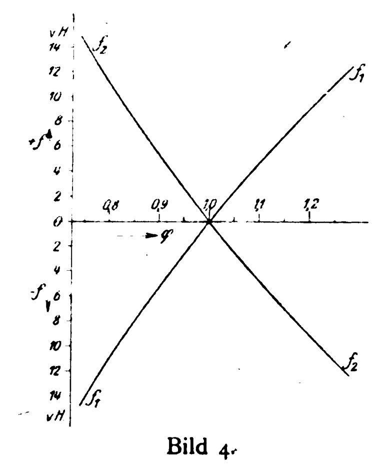


Bild 4.

Sind auch die Grundschwingungszahlen im Verhältnis $n_l^0 : n_r^0 = 91 : 89$ einreguliert worden ($b = 0$), so gelten für den Zähler die Hat-Fehlerkurven:

$$f_1 = U - \frac{C}{a_1}; \qquad f_2 = U - \frac{C}{a_2} \text{ (Seite 171).}$$

Nach Einsetzen der vorstehenden Werte für a_1 und a_2 folgt:

$$f_1 = -U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}; \qquad f_2 = +U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi} \quad (9) \text{ und } (10)$$

Die Gleichungen (9) und (10) stellen die kleinsten Werte dar, welche man den Periodenfehlern für ein bestimmtes Verhältnis der Kennwerte geben kann, wenn die Bedingung

$$f_1 + f_2 = 0$$

über den ganzen Meßbereich erfüllt sein soll. Das Bild 4 zeigt den Verlauf der Fehlergrößen für Werte von φ, die zwischen den Grenzen 0,75 und 1,25 liegen, und zwar, wenn $U = 100$ gesetzt wird, in v. H. des Sollwertes. Die Fehler nehmen für $\varphi < 1$ schneller zu, als bei $\varphi > 1$; im Mittel ist in dem aufgezeichneten Bereiche des Verhältnisses φ, der alle praktisch vorkommenden Fälle umfaßt, dieser Fehlerbetrag:

$$f_1 = -f_2 \sim \pm \frac{1-\varphi}{2}.$$

4. Der Einfluß veränderter Grundschwingungszahlen auf die Hat-Fehlerkurven.

Im 2. Abschnitt wurden für die Hat-Fehlerkurven der einzelnen Meßperioden Hyperbeln gefunden, deren Asymptotengleichungen in abgekürzter Schreibweise lauten:

$$J' \cdot f_1' = \frac{b \cdot C}{a_1^2} \text{ und } J'' \cdot f_2'' = -\frac{b \cdot C}{a_2^2}.$$

Die Transformationsgleichungen in bezug auf die, zu diesen Koordinaten parallel verschobenen $J - f$-Achsen sind hierbei:

$$J' = J + \frac{b}{a_1}; \qquad J'' = J - \frac{b}{a_2}$$

$$f_1' = f_1 - \left(U - \frac{C}{a_1}\right); \qquad f_2'' = f_2 - \left(U - \frac{C}{a_2}\right).$$

Die Voraussetzung für die Hyperbelform dieser Fehlerkurven ist, wie schon gezeigt wurde, daß b einen endlichen, somit das Verhältnis: $n_l^0 : n_r^0$ einen von seinem

Sollwert 91 : 89 abweichenden Betrag hat. Es ist nun die Frage, wie in diesem Falle die beiden Hyperbeläste zur J-Achse liegen, und bis zu welchem Grade die Bedingung für die Soll-Kurven der Gesamt-Fehler des Zählers:

$$f_1 + f_2 = 0$$

erfüllt bleibt. Da bei längerer betriebsmäßiger Verwendung der Pendelzähler mit einer Veränderung der ursprünglich einregulierten Grundschwingungszahlen gerechnet werden muß, so ist die Untersuchung dieser Frage von besonderem praktischen Interesse.

Zu diesem Zweck ist zunächst von der letzterwähnten Bedingungsgleichung für die Soll-Kurve der Gesamt-Fehler auszugehen, die nach Einsetzen der auf Seite 171 abgeleiteten Werte für f_1 und f_2 die Form annimmt:

$$2\,U - \left[\frac{J \cdot C}{J \cdot a_1 + b} + \frac{J \cdot C}{J\,a_2 - b}\right] = 0$$

und nach entsprechender Zusammenfassung:

$$J^2 \left[a_1\,a_2 - \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{C}{U}\right] - b\,[J\,(a_1 - a_2) + b] = 0.$$

Da jetzt b einen endlichen Wert behalten soll, so kommt für die Befriedigung dieser Gleichung nur die Nullsetzung der beiden Klammerausdrücke in Betracht. Das liefert:

$$\frac{2\,a_1\,a_2}{a_1 + a_2} = \frac{C}{U} \tag{11}$$

und

$$J\,(a_1 - a_2) + b = 0. \tag{12}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist identisch mit der bereits bekannten Bedingung für die Spannungsabgleichung (siehe am Schlusse des 2. Abschnittes, Gleichung III); der zweite, in welchem noch der Belastungsstrom J vorkommt, läßt erkennen, daß sich unter der Voraussetzung $b \gtrless 0$ die Periodenfehler nur für eine bestimmte Belastung gegenseitig völlig aufheben. Der dieser Belastung entsprechende Strom werde in der Folge zur Unterscheidung von dem variablen Belastungsstrom J mit J_φ bezeichnet.

Ist der Spannungsstrom gemäß Gleichung (11) abgeglichen, so gelten auch für a_1 und a_2 wieder die früheren Werte:

$$a_1 = \frac{C}{U} \cdot \frac{1 + \varphi}{2}; \qquad a_2 = \frac{C}{U} \cdot \frac{1 + \varphi}{2\,\varphi}$$

damit ergibt sich für b aus (12):

$$b = \frac{C}{U} \cdot J_\varphi \frac{1 - \varphi^2}{2\,\varphi} = \frac{C}{U} \cdot J_0. \tag{13}$$

Zur Klarstellung der physikalischen Bedeutung dieses Ausdruckes ersetzen wir b und C durch ihre ursprünglichen Werte und nehmen eine Umordnung der einzelnen Größen vor, so daß:

$$U \cdot \frac{16}{k} \cdot (8{,}9\,n_l^0 - 9{,}1\,n_r^0) = E \cdot J_0. \tag{14}$$

Die rechte Seite der Gleichung (14) stellt jetzt die Leerlaufsleistung dar, welche bei einem endlichen Werte von b, (in Klammern) in der ersten Periode auftritt. Daß der Zähler in den einzelnen Perioden für $b \gtrless 0$ Leerlauf zeigen würde, war ohne weiteres vorauszusehen; wesentlich ist, daß durch die Gleichung (14) ein Zusammenhang gefunden wurde, der es ermöglicht, den Einfluß unrichtiger Grundschwingungszahlen auf den Zählergang mit Hilfe eines fiktiven Leerlaufstromes J_0 zur Darstellung zu bringen. Mit diesem Leerlaufstrom steht die Stromstärke J_φ, welche Gleichung (12) befriedigt, in der Beziehung:

$$J_\varphi = J_0 \cdot \frac{2\,\varphi}{1 - \varphi^2}, \tag{15}$$

wovon später noch Gebrauch gemacht wird.

In der folgenden Periode bleiben beim stromlosen Zähler die Schwingungszahlen beider Pendel unverändert, der Drehsinn der Übersetzung von den Steigrädern auf das Differentialgetriebe des Zählwerkes wird jedoch nach jeder Umschaltung umgekehrt. Demgemäß wechseln auch die Vorzeichen in der Klammer und man erhält für die 2. Periode:

$$U \cdot \frac{16}{k} \cdot (9{,}1\, n_r^0 - 8{,}9\, n_l^0) = -E \cdot J_0. \qquad (16)$$

Der fiktive Strom J_0 ist jetzt ebenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen zu schreiben, weil sonst Gleichung (13) nicht mehr erfüllt wäre. Aus (14) und (16) geht hervor, daß die Leerlaufsleistungen in zwei aufeinander folgenden Perioden mit entgegengesetzten Vorzeichen gleich sind und sich daher aufheben. Dauernder Leerlauf könnte also unter diesen Verhältnissen nur dann zustande kommen, wenn die Leerlaufsarbeiten der einzelnen Perioden verschieden, d. h. die Zeiten zwischen zwei Umschaltungen, die als Periodendauer τ bezeichnet wurden, ungleich groß sind[1].

Um einen Überblick über die Größenordnung dieses Leerlaufes zu bekommen, ist es vielleicht zweckmäßig, hier ein Zahlenbeispiel einzuschalten.

Ein Zähler habe den Meßbereich: $E = 600$ V. $J = 3000$ A. Es sei ferner gefunden: $U = 100$ kWh; $k = 4$; sowie $n_l^0 = 3{,}033$ (Sollwert) und $n_r^0 = 2{,}947$ (Sollwert 2,966) dann wird aus Gleichung (14):

$$100 \cdot \frac{16}{4} (27{,}0 - 26{,}82) = 600 \cdot J_0$$

somit:

$$J_0 = \frac{4}{6} \cdot 0{,}18 = 0{,}12 \text{ kA oder } 120 \text{ Amp.}$$

Der Vor- und Rücklauf je Periode ergibt sich zu:

$$E \cdot J_0 \cdot \tau = 600 \cdot 0{,}12 \cdot 600 = 12 \text{ kWh},$$

wenn die Periodendauer τ zu 10 Minuten gerechnet wird.

Die angenommene Änderung von n_r^0 gegenüber dem Sollwerte: 2,966 beträgt etwa 0,67 v. H. dieses Wertes. Ihr entspricht nach dem Vorstehenden eine periodische Leerlaufsleistung von 72 kW bei einer fiktiven Nullstromstärke $J_0 = 120$ Amp., d. i. 4 v. H. der Vollast. Die berechnete Leerlaufsarbeit von 12 kWh je Periode bewirkt ein Pendeln des letzten Zeigers am Zählwerk im Ausmaße von 1,2 Teilstrichen.

Unter der weiteren Annahme, daß für diesen Zähler das Kennwertverhältnis $\varphi = 0{,}9$ ist, folgt aus (15):

$$J_\varphi = 120 \cdot \frac{1{,}8}{0{,}19} = 1140 \text{ Amp.}$$

Die Hyperbeln der Periodenfehler würden daher in diesem Falle eine solche Lage zu den $J - f$-Achsen haben, daß bei einer Stromstärke von 1140 Amp. oder 38 v. H. der Vollast die Hat-Kurve der Gesamtfehler f durch Null geht:

$$f_1 + f_2 = 0.$$

Wir gehen nun dazu über, den gesamten Verlauf dieser Kurven festzustellen. Hierzu sind in die allgemeinen Fehlergleichungen I (Seite 171) die mehrerwähnten, auf das Verhältnis φ der Kennwerte bezogenen Ausdrücke für die dort verwendeten Symbole a_1, a_2 und b einzusetzen. Hierbei wird die Größe b zunächst auf den Strom J_φ und nicht auf J_0 bezogen [Gleichung (13)]. Damit ergibt sich für die erste Periode:

$$\left(J + J_\varphi \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi}\right) \cdot \left(f_1 + U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right) = U \cdot J_\varphi \cdot \frac{2(1-\varphi)}{\varphi(1+\varphi)} \qquad (Va)$$

und für die zweite Periode:

$$\left(J - J_\varphi \cdot (1-\varphi)\right) \cdot \left(f_2 - U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right) = -U \cdot J_\varphi \cdot \frac{2\varphi(1-\varphi)}{1+\varphi} \qquad (Vb)$$

[1] Bei ausgeführten Pendelzählern der Firma H. Aron ist die Umschaltung derart eingerichtet, daß für sechs aufeinander folgende Perioden die Gleichung:

$$\tau_1 + \tau_3 + \tau_5 = \tau_2 + \tau_4 + \tau_6$$

genau erfüllt ist.

Die Auflösung nach f_1 und f_2 liefert:

$$f_1 = U \cdot \frac{1 - \frac{\varphi}{1+\varphi}\left(\frac{J}{J_\varphi}\right)}{1 + \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \left(\frac{J}{J_\varphi}\right)} \tag{VIa}$$

$$f_2 = U \cdot \frac{1 - \frac{1}{1+\varphi} \cdot \left(\frac{J}{J_\varphi}\right)}{1 - \frac{1}{1-\varphi}\left(\frac{J}{J_\varphi}\right)} \tag{VIb}$$

sowie:

$$f = U \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{J}{J_\varphi}\right)^2 \cdot \frac{\varphi}{(1-\varphi)^2\left(1 - \frac{J}{J_\varphi}\right)}}. \tag{VIc}$$

Für einige ausgezeichnete Werte des Verhältnisses $\frac{J}{J_\varphi}$ sind die zugehörigen Beträge von f_1, f_2 und f in der beifolgenden Tabelle zusammengestellt, und zwar zur besseren Übersicht für $\varphi < 1$ und $\varphi > 1$ getrennt.

Tabelle.

Nr.	J	$\varphi < 1$			J	$\varphi > 1$		
		f_1	f_2	$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$		f_1	f_2	$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$
1	0	U	U	U	0	U	U	U
2	$J_\varphi(1-\varphi)$	$+U \cdot \frac{1+\varphi^2}{(1+\varphi)^2}$	∞	∞	$J_\varphi \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi}$	∞	$+U \cdot \frac{1+\varphi^2}{(1+\varphi)^2}$	∞
3	J_φ	$+U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}$	$-U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}$	0	J_φ	$-U \cdot \frac{\varphi - 1}{1+\varphi}$	$+U \cdot \frac{\varphi - 1}{1+\varphi}$	0
4	$J_\varphi(1+\varphi)$	$+U \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$	0	$+U \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$	$J_\varphi \frac{1+\varphi}{\varphi}$	0	$+U \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$	$+U \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$
5	$J_\varphi \frac{1+\varphi}{\varphi}$	0	$+U \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$	$+U \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$	$J_\varphi(1+\varphi)$	$+U \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$	0	$+U \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2}$
6	∞	$-U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}$	$+U \cdot \frac{1-\varphi}{1+\varphi}$	0	∞	$+U \cdot \frac{\varphi - 1}{1+\varphi}$	$-U \cdot \frac{\varphi - 1}{1+\varphi}$	0

Bild 5a veranschaulicht den Verlauf der Fehlerkurven unter Anlehnung an die Zahlen des vorausgegangenen Beispiels ($J_\varphi = 38$ v. H. des Vollaststromes J_N; $\varphi = 0{,}9$). Ferner sind in diese Darstellung noch die Fehlergeraden $g_1 - g_1$ und $g_2 - g_2$ aufgenommen, welche für denselben Wert von φ bei richtiger Einstellung der Grundschwingungszahlen gelten ($b = 0$). Die Kurven f_1' und f_2' bedeuten die mittleren Soll-Hyperbeln der Periodenfehler mit den Gleichungen:

$$J \cdot f_1' = - J \cdot f_2' = \pm 4.$$

Dabei ist 4 der mittlere Betrag, der sich mit den angenommenen Zahlenwerten aus den konstanten Gliedern auf der rechten Seite von Gleichung (Va und b) ergibt.

Wenn wir zunächst von den Fehlergrößen bei Belastungen $J < J_\varphi$ absehen, (Nr. 1 und 2 der Tabelle), so folgt für alle Stromstärken $J > J_\varphi$ das bemerkenswerte

Ergebnis, daß jetzt, d. h. für $b \gtrless 0$, in diesem Bereiche die Periodenfehler kleiner sind als diejenigen, welche durch Einregulierung der Grundschwingungszahlen auf ihre Sollwerte bestenfalls erzielt werden können (Fehler-Gerade $g_1 - g_1$ und $g_2 - g_2$ im Bild). Die Kurven f_1 und f_2 erscheinen von diesen Geraden derartig weggekrümmt, daß die letzteren Asymptoten geworden sind (Nr. 6 der Tabelle); die wechselseitigen Schnittpunkte (Nr. 3 der Tabelle) liegen auf einer Ordinate durch $J = J_\varphi$. Der Vorzeichenwechsel, welcher in jeder Meßperiode für die zugehörigen Fehlergrößen auftritt (Nr. 4 und 5 der Tabelle), sowie der Verlauf, den die Kurven von da ab bei wachsender Belastung nehmen, stehen im Gegensatz zu den Bedingungen, welche die Soll-Kurven für endliche Fehlerwerte unabhängig von der Art der Belastung vorschreiben.

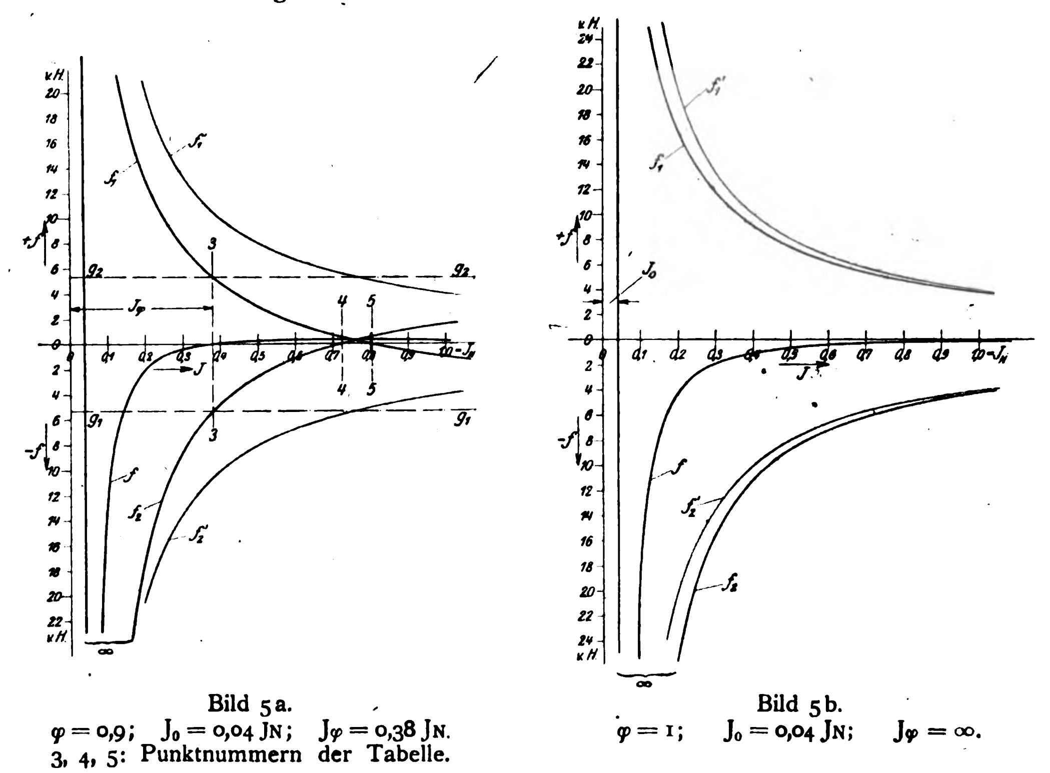


Bild 5a.
$\varphi = 0{,}9$; $J_0 = 0{,}04\, J_N$; $J_\varphi = 0{,}38\, J_N$.
3, 4, 5: Punktnummern der Tabelle.

Bild 5b.
$\varphi = 1$; $J_0 = 0{,}04\, J_N$; $J_\varphi = \infty$.

Die Kurve für den Gesamt-Fehler f entfernt sich in dem Bereich, der normalerweise für die Arbeitsmessung in Frage kommt, nur in geringfügigem Maße von der Abszisse; indessen bildet dieser Umstand allein noch kein hinreichendes Kriterium für die Beurteilung der Genauigkeit der Zählerangaben (vgl. Abschnitt 1).

Für den unbelasteten Zähler ergeben sich in jeder Periode, und demnach auch für f, relative Fehlerbeträge von + 100 v. H.; da diese Größen aber auf den Sollwert bezogen sind, der bei unbelastetem Zähler Null ist, so haben die Werte Nr. 1 der Tabelle nur theoretische Bedeutung.

In dem unter Nr. 2 angeführten Falle wächst einer der Periodenfehler und damit der Gesamtfehler unbegrenzt; in Wirklichkeit bleiben natürlich die Gangabweichungen stets von endlicher Größe. Dieses Verhalten tritt praktisch dadurch in Erscheinung, daß der Zähler, sobald der Fehler den Betrag von — 100 v. H. überschreitet, in der betreffenden Umschalteperiode negative Arbeiten registriert, obwohl die Stromrichtung positiv geblieben ist. Bei den Zahlenwerten, für welche Bild 5a entworfen ist, würde das in dem Bereiche: $J = 0{,}038\, J_N$ bis $J = 0{,}072\, J_N$ zutreffen.

Der bisher eingeschlagene Weg zur Darstellung der Hat-Fehler mit Bezug auf die früher definierte Stromstärke J_φ versagt, wenn das Verhältnis der Kennwerte gleich 1 wird. In diesem Falle würde die Gleichung (15) ergeben:

$$J_\varphi = J_0 \cdot \frac{2\varphi}{1-\varphi^2} = \infty.$$

Für $\varphi = 1$ muß daher die Größe b in den allgemeinen Fehlergleichungen I durch den Ausdruck ersetzt werden:

$$b = \frac{C}{U} \cdot J_0 \text{ vgl. (13),}$$

damit folgt:

$$(J + J_0) \cdot f_1 = U \cdot J_0 \text{ und } (J - J_0) f_2 = - U \cdot J_0 \qquad \text{(Vc, d)}$$

und

$$f_1 = U \cdot \frac{1}{1 + \frac{J}{J_0}}; \; f_2 = U \cdot \frac{1}{1 - \frac{J}{J_0}} \qquad \text{(VId, e)}$$

sowie:

$$f = U \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{J}{J_0}\right)^2}. \qquad \text{(VIf)}$$

Während somit in den Fällen $\varphi \lesseqgtr 1$ die Hat-Hyperbeln der Periodenfehler gegenüber den entsprechenden Soll-Kurven in beiden Achsenrichtungen verschoben sind, liegt in dem besonderen Fall $\varphi = 1$ nur mehr eine Verschiebung parallel zur J-Achse vor, die aber wie dort in den einzelnen Perioden entgegengesetztes Vorzeichen hat. Als ausgezeichnete Werte der Fehlerfunktionen mögen folgende hervorgehoben sein:

Nr.	J	$\varphi = 1$		
		f_1	f_2	$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$
1	0	U	U	U
2	J_0	$+\frac{U}{2}$	∞	∞
3	∞	0	0	0

Bild 5b gibt den Verlauf dieser Kurven unter der Annahme, daß J_0 von derselben Größe ist ($J_0 = 0{,}04\, J_N$), welche der Darstellung in Bild 5a zugrunde liegt; die Soll-Hyperbeln f_1' und f_2' genügen ebenfalls denselben Gleichungen wie dort:

$$J \cdot f_1' = - J \cdot f_2' = \pm U \cdot J_0 = \pm 4.$$

Schon durch sinngemäße Auslegung des Ergebnisses von Gleichung (15), nämlich $J_\varphi = \infty$ konnte geschlossen werden, daß die vollständige gegenseitige Aufhebung der Periodenfehler für $\varphi = 1$ in keinem Falle eintritt; die Kurve der Gesamtfehler f liegt daher für den ganzen Meßbereich, der praktisch in Frage kommt, unterhalb der Abszissenachse. Bei den Hat-Kurven der Periodenfehler f_1 und f_2 ist der Vorzeichenwechsel zwischen $J = J_0$ und $J = \infty$ fortgefallen und ihre weitgehende Annäherung an die Soll-Hyperbeln — besonders gegenüber Bild 5a — ist augenfällig.

5. Die Berichtigung der Kennwerte.

Bei allen seitherigen Betrachtungen hat sich immer wieder die ausschlaggebende Bedeutung der Kennwerte für das Verhalten des Pendelzählers erwiesen, und zwar in dem Sinne, daß die Meßgenauigkeit um so größer wird, je näher das Verhältnis $\frac{s_1}{s_2} = \varphi$ dem Werte 1 kommt. Es soll daher abschließend noch die Frage erörtert

werden, ob dieses Verhältnis durch Reguliervorrichtungen beeinflußt werden ~~kann~~. Sie läßt sich am besten an der Hand des Kennlinien-Schaubildes überprüfen. Im Bild 6 ist dieses Diagramm mit den früheren Bezeichnungen wiederholt, nur sind hier noch die Differenzen d′ und d″ der beschleunigten bzw. verzögerten Pendelschwingungen hinzugekommen. Die Bedingung:

$$s_1 = s_2$$

läßt sich nämlich mit Berücksichtigung der im 3. Abschnitt hergeleiteten Werte von s_1 und s_2 überführen in:

$$m_1 - m_0 = m_2 + m_0;$$

woraus:

$$m_1 - m_2 = 2\,m_0.$$

Nach dem Kennlinienbild ist aber für jede beliebige Stromstärke:

$$m_1 - m_2 = d' + d''$$

Daher lautet die Bedingungsgleichung für $\varphi = 1$ in neuer Form:

$$d' + d'' = 2\,m_0. \qquad \text{(VII)}$$

Über die Größe von m_0 ist bereits durch die Vorschrift für das Verhältnis der Grundschwingungszahlen verfügt [Gleichung II], wobei n_1^0 als fest gegeben anzusehen ist; zur Befriedigung von Gleichung (VII) bleibt demnach nur übrig die Differenzen d′ und d″ derart zu verändern, daß ihre Summe gleich $2\,m_0$ wird. In idealer Weise wird dieser Forderung entsprochen, wenn die Kennlinien paarweise parallel sind. Das ist, wie aus geometrischen Beziehungen hervorgeht, dann der Fall, wenn für

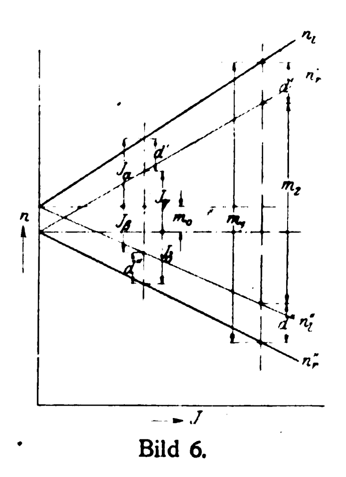


Bild 6.

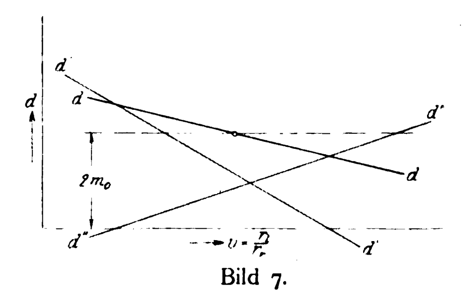


Bild 7.

die Proportionalitätsfaktoren die Gleichungen gelten:

$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \delta.$$

Die Verhältnisse dieser Größen sind aber für jede Zähler-Ausführung Konstruktionskonstante und nur durch Eingriffe zu verändern, die über das Maß einer Regulierung im gewöhnlichen Sinne hinausgehen.

Nachdem jedoch Gleichung (VII) nur verlangt, daß die Summe $d' + d''$ gleich $2\,m_0$ ist — nicht d′ und d″ für sich gleich m_0, was bei parallelen Kennlinien zutrifft — so zeigt sich ein Weg durch folgende Überlegung:

Der Winkel, unter welchem die Kennlinien eines Pendels bei wachsender Belastungsstromstärke auseinander streben, ist offenbar proportional dem Pendelstrom und dieser steht wieder im umgekehrten Verhältnis zum Widerstand der Pendelspule und ihrer Zuleitungen.

Bei Verkleinerung dieses Widerstandes in einem Pendel öffnet sich der Winkel, den die Kennlinien miteinander bilden; er schließt sich, wenn der Pendelwiderstand vergrößert wird. Kann nun eine derartige Widerstandsveränderung an jedem Pendel unabhängig vom anderen vorgenommen werden — wie beispielsweise bei Zählern mit Abweigwiderständen und parallel geschalteten Pendelstromkreisen —, so ist damit, wie man aus dem Diagramm erkennt, eine weitgehende Änderung der Schwingungsdifferenzen d′ und d″ verbunden. Eine Vergrößerung des linken

Pendelwiderstandes, r_l etwa, bewirkt, daß d' abnimmt und d'' zunimmt; die Wirkung wird verstärkt, wenn man gleichzeitig den Widerstand des rechten Pendels r_r verkleinert. Auf diese Weise kann also — unter gewissen Voraussetzungen, die sogleich näher besprochen werden — die Summe $d' + d''$ den Wert erlangen, welcher die Gleichung (VII) befriedigt.

Die Änderungen der Differenzen d' und d'' bei diesem Regulierverfahren sind proportional dem Verhältnis $\frac{r_l}{r_r} = v$, die Aufzeichnung dieses Zusammenhanges ergibt daher in den d—v-Koordinaten des Bildes 7 zwei Gerade, deren Neigungswinkel zur Abszissen-Achse wiederum Konstruktionskonstante des Zählers sind, von deren gegenseitigem Verhältnis das Gelingen der Regulierung abhängt. Die Darstellung enthält ferner noch die Summen-Linie $d = d' + d''$, sowie die Gerade $2\,m_0$, die wegen der Unabhängigkeit dieser Größe von v eine Parallele zur Abszisse im Abstande $2\,m_0$ ist. Der Schnittpunkt der beiden letzterwähnten Linien stellt die Abgleichung des Kennwertverhältnisses φ auf den Wert 1 dar.

Rein geometrisch betrachtet würde dieses Verfahren zur Regulierung von φ überhaupt versagen, wenn die d — und $2\,m_0$-Geraden einander parallel sind, was bei Gleichheit der Neigungswinkel von d' und d'' zutrifft. Allein es zeigt sich, daß gerade in diesem Falle die Gleichung (VII) erfüllt ist. Aus dem Kennlinienbild (Bild 6) sind die Beziehungen zu entnehmen:

$$d' = m_0 + J\,(\alpha - \gamma) \qquad \text{und:} \qquad d'' = m_0 + J\,(\delta - \beta)$$

somit:

$$d = d' + d'' = 2\,m_0 + J \cdot [(\alpha - \gamma) - (\beta - \delta)]$$

Die Proportionalitätskonstanten α, β, γ und δ hängen nun von den Widerständen der Pendelstromkreise r_l und r_r und ihrem Verhältnis v in ähnlicher Weise ab wie d' und d''. Demnach ist bei einem bestimmten Strom J der Klammerausdruck nur eine Funktion von v, welche verschwindet, wenn d parallel zur v-Achse wird (Bild 7). Die Gleichung der d-Geraden in den d—v-Koordinaten lautet dann:

$$d = d' + d'' = 2\,m_0$$

und ist identisch mit der Bedingung VII, die für $\varphi = 1$ gilt.

Den praktischen Lösungen dieser Regulieraufgabe sind aber deswegen Grenzen gezogen, weil das Verhältnis der Pendelwiderstände nicht in beliebig weitem Umfange verändert werden darf, die d- und $2\,m_0$-Geraden also in nicht zu großem Abstande von der Ordinate $v = 1$ zum Schnitt kommen müssen. Denn durch die Gleichung (III) bzw. (8) sind die Werte m_1 und m_2 für jeden Belastungsstrom festgelegt; ihre Einhaltung bildet daher eine grundlegende Voraussetzung für den fehlerfreien Gang des Zählers. Die Abgleichung nach dieser Bedingung könnte nun bei extrem verschiedenen Pendelwiderständen für den vollbelasteten Zähler zu Schwingungszahlen führen, welche diejenigen über- oder unterschreiten, die aus Gründen der Betriebssicherheit als äußerste Grenzen vorgeschrieben sind.

Zusammenfassung.

Mit Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften des Pendelzählers werden die Soll- und Hat-Fehlerkurven in den einzelnen Umschalteperioden abgeleitet unter der Annahme, daß die Beschleunigung und Verzögerung der Pendelschwingungen proportional mit dem Belastungsstrom erfolgt. Der Vergleich dieser Kurven bei normalen und vom Sollwert abweichenden Grundschwingungszahlen führt zu der Definition von „Kennwerten", die für das meßtechnische Verhalten des Zählers von ausschlaggebender Bedeutung sind; es wird gezeigt, daß die Meßgenauigkeit des Pendelzählers um so größer ist, je besser das Verhältnis dieser Kennwerte mit der Einheit übereinstimmt.



Über ein Vibrationswattmeter.

Von

J. Biermanns, AEG-Hochspannungsfabrik.

1. Allgemeines. Es sind Vibrationsgalvanometer zur Messung kleiner Stromstärken bekannt, die sich durch große Empfindlichkeit und geringen Eigenwiderstand auszeichnen. Eine viel benutzte Ausführungsform dieses Instrumentes besteht aus einer kleinen Spule, die drehbar im Felde eines permanenten oder durch Gleichstrom erregten Magneten gelagert ist. Die Drehung der Spule erfolgt entgegen der Kraft einer Torsionsfeder, sodaß die Spule unter dem Einfluß eines sie durchfließenden Wechselstromes in Schwingungen gerät. Die Schwingungsweite wird durch die scheinbare Verbreiterung eines Lichtstrahles gemessen, der von einem auf der Spule befestigten Spiegel auf eine Skala geworfen wird, und ist ein Maß für die Stärke des zu messenden Stromes. Um die Empfindlichkeit des Instrumentes aufs Höchste zu steigern, werden die Verhältnisse so gewählt, daß die mechanische Eigenschwingungszahl des schwingenden Systems mit der Frequenz des zu messenden Stromes übereinstimmt, daß das Vibrationsgalvanometer also in Resonanz arbeitet. Der Ausschlag des Instrumentes steigt dadurch auf etwa den 50fachen Wert, es wird ferner gegenüber Oberschwingungen des Stromes sehr unempfindlich, was für viele Messungen von Vorteil ist. Ein Nachteil der Abstimmung auf Resonanz ist allerdings, daß bei absoluten Messungen eine Wechselstromquelle mit sehr konstanter Frequenz zur Verfügung stehen muß; da indes dieselbe Notwendigkeit sich auch schon in der Hochfrequenztechnik herausstellte, sind neuerdings Methoden ausgearbeitet worden, mit denen sich die Tourenzahl einer Dynamo bis auf Bruchteile eines Promille konstant halten läßt.

2. Beschreibung des Vibrationswattmeters. Man gewinnt in einfachster Weise ein Vibrationswattmeter, indem man an dem drehbaren System des eben beschriebenen Spulengalvanometers eine zweite und zwar die Spannungsspule anbringt, die mit der ursprünglichen, der Stromspule genau in einer Ebene liegt und sich im selben magnetischen Felde wie diese befindet. An diesem Instrument ist die Messung nun in folgender Weise vorzunehmen.

Nachdem man die Stromspule in den Stromkreis eingeschaltet und die Spannungsspule an die zugehörige Spannung gelegt hat, mißt man einen bestimmten Ausschlag $\bar{\alpha}_1$. Nun vertauscht man beispielsweise die Enden der Stromspule, kehrt also die Stromrichtung in dieser um, und mißt nun einen andern Ausschlag $\bar{\alpha}_2$. Die gesuchte Leistung ist dann

$$L = c \cdot (\bar{\alpha}_1{}^2 - \bar{\alpha}_2{}^2). \qquad (I)$$

Diese Gleichung werde nachstehend unter der vereinfachenden Annahme bewiesen, daß die Eigeninduktivität der Spannungsspule klein gegenüber dem Ohmschen Widerstande des Spannungskreises und daß dessen Eigenverbrauch verschwindend gering sei. Schickt man zunächst durch die Stromspule allein einen Strom, so ergibt das Instrument einen Ausschlag[1])

$$\bar{\alpha}_i = c_2 \cdot \bar{i},$$

legt man dagegen die Spannungsspule allein an irgend eine Spannung, so ist der sich einstellende Ausschlag

$$\bar{\alpha}_e = c_1 \cdot \bar{e}.$$

Hierin sind c_1 und c_2 dem Meßinstrument eigentümliche Konstanten, e und i die

[1]) Durch einen wagrechten Strich über dem Buchstaben werden Maximalwerte gekennzeichnet.

Amplituden der sinusförmig verlaufenden Spannungen und Ströme, die das Zeitgesetz befolgen mögen:

$$e = \bar{e} \cdot \sin \omega \cdot t,$$

$$i = \bar{i} \cdot \sin (\omega \cdot t - \varphi).$$

Werden nun beide Spulen gleichzeitig eingeschaltet, so ergibt sich für den jeweiligen Augenblickswert des Ausschlages, da die auf beide Spulen ausgeübten Kräfte sich addieren:

$$\alpha_{1,2} = c_1 \cdot e \pm c_2 \cdot i.$$

Die beiden verschiedenen Werte α_1 und α_2 werden durch das Kommutieren der Stromspule erhalten. Aus dieser Gleichung folgt nun durch Einsetzen der Werte für e und i

$$\alpha_{1,2} = (c_1 \cdot \bar{e} + c_2 \cdot \bar{i} \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \omega \cdot t \mp c_2 \cdot \bar{i} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot t.$$

Für den Maximalwert der Ausschläge ergibt sich hieraus weiter

$$\bar{\alpha}_{1,2}^2 = c_1^2 \cdot \bar{e}^2 + c_2^2 \cdot \bar{i}^2 \pm 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \bar{e} \cdot \bar{i} \cdot \cos \varphi,$$

oder, indem man die Werte von $\bar{\alpha}_1^2$ und $\bar{\alpha}_2^2$ voneinander subtrahiert

$$4 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \bar{e} \cdot \bar{i} \cdot \cos \varphi = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2.$$

Diese Gleichung geht aber, wenn man

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{e} \cdot \bar{i} \cdot \cos \varphi = L$$

und

$$\frac{1}{8 \cdot c_1 \cdot c_2} = c$$

setzt, über in

$$L = c \cdot (\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2),$$

was zu beweisen war.

Da Vibrationsgalvanometer leicht für eine Stromempfindlichkeit von 10^{-7} Amp. und eine Spannungsempfindlichkeit von 10^{-6} Volt gebaut werden können, können mit dem vorgeschlagenen Vibrationswattmeter noch Leistungen von 10^{-13} Watt gemessen werden. Andererseits besitzt das Instrument, wie weiter oben auseinandergesetzt wurde, eine genügende Unempfindlichkeit gegenüber Oberschwingungen des Stromes, die ja nichts zur Leistung beitragen.

Indes soll nicht verschwiegen werden, daß die vorgeschlagene Meßmethode einen prinzipiellen Nachteil besitzt. Sie ist eine Differenzmethode und um so genauer, je mehr die beiden Subtrahenten voneinander verschieden sind. Dies läßt sich nun zwar bei kleinen Phasenverschiebungen erreichen und man wird hier durch Wahl passender Vorschaltwiderstände anzustreben suchen, daß bei $\cos \varphi = 1$ einer der beiden Ausschläge α_1 oder α_2 Null wird. Jemehr indes die Phasenverschiebung wächst, um so mehr nähern sich die Werte von α_1 und α_2, um bei $\cos \varphi = 0$ einander gleich zu werden. Bei sehr großen Phasenverschiebungen wird also die Messung recht ungenau.

3. Theorie des Vibrationswattmeters. Es ist klar, daß wir uns nicht mit der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Gleichung begnügen dürfen, wenn wir mit dem beschriebenen Wattmeter Messungen mit auch nur einiger Genauigkeit ausführen wollen. Denn es sind eine Fülle von störenden Faktoren vorhanden, die das Meßergebnis fälschen, und es muß unsere nächste Aufgabe sein, dieselben aufzufinden und ihren zahlenmäßigen Einfluß festzustellen. Wir wollen zu dem Zweck zunächst die Bewegungsgleichung des Vibrationsgalvanometers aufstellen und diskutieren.

Bild 1 zeigt die schematische Darstellung eines solchen Instrumentes, ferner bedeuten:

z = Zahl der Drähte pro Spulenseite,
l = Länge der Spulenseite im Felde,
α = jeweiliger Drehwinkel der Spule,
H = magnetische Feldstärke im Polzwischenraum,
Θ = Trägheitsmoment des schwingenden Systems,
$K \cdot \alpha$ = Direktionskraft der Feder,
W = Reibungskoeffizient,
r = Ohmscher Widerstand der Spule,
L = deren Eigeninduktivität,
$i = \bar{i} \cdot \sin \omega \cdot t$ = Strom in der Spule in absoluten Einheiten,
$e = \bar{e} \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$ = Spannung an den Spulenklemmen in absoluten Einheiten. Damit lautet die Differentialgleichung des schwingenden Systems:



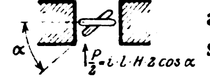


Bild 1.

$$\Theta \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + W \cdot \frac{d\alpha}{dt} + K \cdot \alpha = P = 2 \cdot H \cdot l \cdot z \cdot \cos \alpha \cdot \bar{i} \cdot \sin \omega \cdot t. \quad (1)$$

Diese Gleichung läßt sich in eine lineare Differentialgleichung überführen, wenn wir uns auf kleine Ausschläge des schwingenden Systems, d. h. auf kleine Winkel α beschränken. Dann kann nämlich mit großer Annäherung

$$\cos \alpha = 1 \quad (2)$$

gesetzt werden, schreiben wir ferner zur Abkürzung

$$2 \cdot H \cdot l \cdot z = a, \quad (3)$$

so erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{W}{\Theta} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{K}{\Theta} \cdot d = \frac{a}{\Theta} \cdot \bar{i} \cdot \sin \omega \cdot t. \quad (1a)$$

Da uns in erster Linie der eingeschwungene Zustand interessiert, schreiben wir nur das partikuläre Integral dieser Gleichung an, welches lautet

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a}{\sqrt{(W \cdot \omega)^2 + (\Theta \cdot \omega^2 - K)^2}} \cdot \bar{i} \cdot \cos(\omega \cdot t - \gamma), \\ \text{mit} \quad \gamma &= \frac{\Theta \cdot \omega^2 - K}{W \cdot \omega}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ferner ist die mechanische Eigenfrequenz des schwingenden Systems

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\Theta} - \frac{W^2}{4 \cdot \Theta^2}} = \sim \sqrt{\frac{K}{\Theta}}. \quad (5)$$

Wird nun diese auf die aufgezwungene elektrische Frequenz abgestimmt, also $\omega_0 = \omega$ gewählt, so gehen die Gleichungen (4) über in

$$\alpha = -\frac{a}{W \cdot \omega} \cdot \bar{i} \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (4a)$$

der Ausschlag wird also ein Maximum und die Bewegung eilt dem elektrischen Impuls genau um 90^0 nach. Es ist dabei wichtig, zu wissen, um wieviel sich die Frequenz des zu messenden Stromes ändern darf, ohne daß die Genauigkeit der Messung leidet bzw. wie empfindlich die Tourenregulierung des benutzten Antriebsmotors sein muß.

Die erste der Gleichung (4) kann unter Beachtung der Gleichung (5) auch geschrieben werden

$$\bar{\alpha} = \frac{a \cdot i}{W \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Theta \cdot \omega}{W} \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right)^2}},$$

oder, wenn wir die Quadratwurzel nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und nach dem zweiten Gliede abbrechen, was, da wir uns nahe dem Resonanzpunkt befinden, nur eine kleine Vernachlässigung bedeutet,

$$\bar{\alpha} = \frac{a \cdot \bar{i}}{W \cdot \omega \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Theta \cdot \omega}{W} \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)\right)^2\right]}.$$

Ist somit bei Resonanz der Ausschlag des Instrumentes α_R, so ist er bei einer kleinen Änderung der elektrischen Frequenz nur mehr angenähert

$$\alpha = \alpha_R \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Theta \cdot \omega}{W} \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)\right)^2\right) = \alpha_R \cdot (1 - x).$$

Dabei möge sich die elektrische Frequenz gegenüber der Einheit um einen Betrag y geändert haben, es sei also

$$\omega = \omega_0 \cdot (1 + y).$$

Dies in die eben angeschriebene Gleichung eingesetzt ergibt folgenden Zusammenhang zwischen x und y, wobei wir beide Änderungen in Prozenten ausdrücken.

$$y\,\% = 7 \cdot \frac{W}{\Theta \cdot \omega} \cdot \sqrt{x\,\%}. \tag{6}$$

Bei ausgeführten Vibrationsgalvanometern wird ein Verhältnis $\frac{\Theta \cdot \omega}{W} = 50$ erreicht, soll sich also der Ausschlag des Instruments nicht um mehr als 1% ändern, so darf die Frequenz ihrerseits um höchstens $\frac{1}{7}$% variieren.

Die Spannungsgleichung der schwingenden Galvanometerspule lautet

$$e = H \cdot l \cdot d \cdot z \cdot \frac{d \sin \alpha}{dt} + L \cdot \frac{d i}{dt} + r \cdot i. \tag{7}$$

Da wir uns auf kleine Ausschläge beschränken, können wir den Sinus gleich dem Winkel setzen, schreiben wir ferner für den letzteren seinen Wert aus Gleichung (4a), so folgt

$$e = \left(r + \frac{2 \cdot H^2 \cdot l^2 \cdot d \cdot z^2}{W}\right) \cdot \bar{i} \cdot \sin \omega \cdot t + L \cdot \omega \cdot i \cdot \cos \omega \cdot t. \tag{8}$$

Die durch die Bewegung der Spule in dieser induzierte EMK ist also phasengleich mit dem Strom, ihre Höhe erscheint nicht mehr abhängig von der Größe des Ausschlages, d. h. die EMK bewirkt eine scheinbare Vergrößerung des Ohmschen Widerstandes der Spule.

Wir haben im Vorhergehenden die Differentialgleichung (1) des schwingenden Systems nur näherungsweise gelöst, insofern, als wir uns eine kleine Vernachlässigung erlaubten, die darauf hinauslief, daß wir die Lösung auf kleine Werte des Ausschlagwinkels beschränkten. Wenn gleich der begangene Fehler bei sehr kleinen Werten von α sicherlich unbedeutend ist, so werden wir doch gut daran tun, dessen Größe abzuschätzen bzw. den Gültigkeitsbereich der erhaltenen Gleichungen zu bestimmen. Dabei interessiert uns weniger die genaue Bewegungsform des schwingenden Systems,

sondern vielmehr der nach einer Viertelperiode erreichte Höchstwert des Winkels α und auf dessen Bestimmung wollen wir uns denn auch beschränken, wobei wir genaue Abstimmung auf Resonanz voraussetzen. Wenn wir in der Gleichung (1) nur die Energie verzehrenden bzw. die dem System Energie zuführenden Glieder berücksichtigen, so geht sie, da die Wirkung der Trägheit und der elastischen Kraft der Feder sich gegenseitig aufheben, über in:

$$W \cdot \frac{d\alpha}{dt} = a \cdot \bar{i} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\omega \cdot t. \tag{9}$$

Diese Gleichung schreiben wir nun in der Form

$$\int W \cdot \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot i \cdot \sin\omega \cdot t \cdot dt$$

und interpretieren sie folgendermaßen:

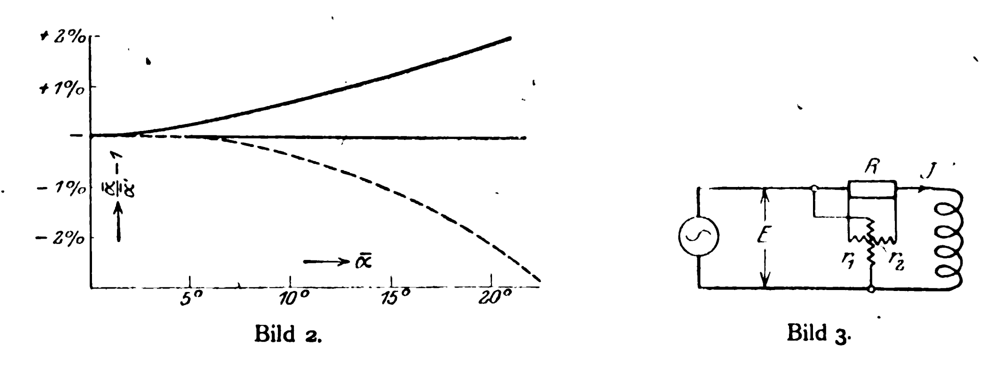


Bild 2. Bild 3.

Das rechte Glied stellt die dem schwingenden System während einer Viertelperiode zugeführte elektrische Arbeit dar, die zur Deckung der in den Reibungswiderständen aufgezehrten Verluste dient. Die Größe dieser Verluste hängt nur von der Größe des Winkels α ab und aus der durch die angeschriebene Gleichung gegebenen Gleichgewichtsbedingung läßt sich somit die Schwingungsweite berechnen. Durch Ausführung der Integration erhält man

$$-\frac{a \cdot \bar{i}}{W \cdot \omega} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{\alpha}}{2}\right),$$

oder, wenn wir

$$-\frac{a \cdot \bar{i}}{W \cdot \omega} = \bar{\alpha}'$$

setzen,

$$\bar{\alpha} = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \operatorname{arctg} e^{\bar{\alpha}'}. \tag{10}$$

Es ist indes noch Folgendes zu beachten. Die zum Ablesen des Ausschlages benutzte Skala wird in der Regel nicht als Bogen mit dem Spiegelabstand als Radius, sondern als ebene Fläche ausgeführt und man mißt infolgedessen strenge genommen nicht den Winkel α selbst sondern bekanntlich dessen Tangente. Berücksichtigt man dies noch, so geht die Gleichung (10) über in

$$\bar{\alpha} = -\operatorname{cotg}\left(2 \cdot \operatorname{arctg} e^{\bar{\alpha}'}\right). \tag{11}$$

Hierin ist $\bar{\alpha}'$ der aus der Gleichung (4a) sich ergebende angenäherte Wert des Ausschlages, während $\bar{\alpha}$ dessen wahren Wert bedeutet. Aus der Gleichung ist zu

ersehen, daß beide Werte um so mehr miteinander übereinstimmen, je kleiner ihr absoluter Betrag ist und daß der durch die geradlinige Skala hereingebrachte Fehler bei weitem überwiegt, sodaß die beiden Fehlerquellen, die sich entgegenarbeiten, sich nicht ausgleichen können. Das Bild 2 läßt dies noch deutlicher erkennen, die gestrichelte Kurve würde für eine kreisförmig gebogene Skala gelten.

Nachdem wir uns nun über die dynamischen und elektrischen Verhältnisse des Vibrationsgalvanometers klar geworden sind, können wir zum eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Arbeit, zum Vibrationswattmeter zurückkehren. Bild 3 zeigt die den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegte Meßanordnung. Parallel zu einem im Hauptstromkreis liegenden Widerstand R ist die Stromspule des Wattmeters abgezweigt, die ihrerseits einen Ohmschen Widerstand r_2 besitzen möge. Der gesamte Widerstand des Spannungskreises sei r_1, da dieser von der Stromspule abgezweigt ist, ist von der zu messenden Leistung $E \cdot I \cdot \cos\varphi$ ein Betrag $I^2 \cdot R$ abzuziehen. Strom- und Spannungsspule seien vollständig gleich ausgeführt, sie besitzen also eine gleiche Eigeninduktivität L und eine Gegeninduktivität M.

Kümmern wir uns zunächst nicht um die Phasenlage der Ströme in der Spannungs- und Stromspule i_1 und i_2 gegenüber E und J, so können wir für diese schreiben

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \bar{i}_1 \cdot \sin\omega \cdot t, \\ i_2 &= \pm \bar{i}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

wobei sich der Vorzeichenwechsel auf die Kommutierung der Stromspule bezieht, und wir erhalten folgenden Ausdruck für die in jedem Augenblick auf das schwingende System ausgeübte magnetische Kraft

$$P = 2 \cdot H \cdot l \cdot z \cdot [(i_1 \pm \bar{i}_2 \cdot \cos\varphi) \cdot \sin\omega \cdot t \mp \bar{i}_2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\omega \cdot t].$$

Da wir mit Resonanz arbeiten, folgt hieraus für die Größe des jeweiligen Ausschlages

$$\alpha = \frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega} \cdot [-(\bar{i}_1 \pm \bar{i}_2 \cdot \cos\varphi) \cdot \cos\omega \cdot t \mp \bar{i}_2 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\omega \cdot t]. \qquad (13)$$

Nun lautet beispielsweise die Spannungsgleichung für die Spannungsspule

$$H \cdot l \cdot d \cdot z \cdot \frac{d\alpha}{dt} + L \cdot \frac{d i_1}{dt} + M \cdot \frac{d i_2}{dt} + r_1 \cdot i_1 = e_1, \qquad (14)$$

aus der sich nach Einsetzen der bekannten Werte aus Gleichung (12) und (13) ergibt

$$\begin{aligned} e_1 = {} & [\varrho \cdot (\bar{i}_1 \pm \bar{i}_2 \cdot \cos\varphi) \pm M \cdot \omega \cdot \bar{i}_2 \cdot \sin\varphi + r_1 \cdot \bar{i}_1] \cdot \sin\omega \cdot t \\ & + [(\mp \varrho \cdot \sin\varphi \pm M \cdot \omega \cdot \cos\varphi) \cdot \bar{i}_2 + L \cdot \omega \cdot \bar{i}_1] \cdot \cos\omega \cdot t. \end{aligned} \qquad (15a)$$

Auf ähnlichem Wege folgt für die Spannung an den Klemmen der Stromspule

$$\begin{aligned} e_2 = {} & [\pm \varrho \cdot (\bar{i}_1 \pm \bar{i}_2 \cdot \cos\varphi) + L \cdot \omega \cdot \bar{i}_2 \cdot \sin\varphi + r_2 \cdot \bar{i}_2 \cdot \cos\varphi] \cdot \sin\omega \cdot t \\ & + [-\varrho \cdot \sin\varphi + L \cdot \omega \cdot \cos\varphi - r_2 \cdot \sin\varphi) \cdot \bar{i}_2 \pm M \cdot \omega \cdot \bar{i}_1] \cdot \cos\omega \cdot t. \end{aligned} \qquad (15b)$$

In diesen Gleichungen ist

$$\varrho = \frac{2 \cdot H^2 \cdot l^2 \cdot d \cdot z^2}{W} \qquad (15c)$$

die scheinbare Wiederstandsvergrößerung der beiden Spulen.

Wir haben im Vorhergehenden die Spannungen in eine Wattkomponente und in eine wattlose Komponente zerlegt und da die letztere stets klein gegenüber der ersteren sein wird, können wir sie bei der Berechnung der Amplitude der Spannung vernachlässigen. Die wattlose Komponente bewirkt dann nur mehr das Eintreten einer Phasenverschiebung zwischen dem jeweiligen Spulenstrom und seiner Klemmenspannung und die Gleichungen (12) müssen, wenn wir uns auf die Phasenlage von E und I beziehen, richtig lauten

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \overline{i}_1' \cdot \sin(\omega \cdot t - \delta_1), \\ i_2 &= \pm \overline{i}_2' \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi - \delta_2), \end{aligned}\right\} \qquad (12a)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \overline{i}_1' &= \frac{\overline{E}}{(r_1 + \varrho) \pm \frac{\overline{i}_2}{\overline{i}_1} \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)}, \\ \overline{i}_2' &= \frac{\overline{I} \cdot \overline{R}}{R + r_2 + \varrho \pm \frac{\overline{i}_1}{\overline{i}_2} \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)}, \\ \delta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{L \cdot \omega \pm \frac{\overline{i}_2}{\overline{i}_1} \cdot (M \cdot \omega \cdot \cos\varphi - \varrho \cdot \sin\varphi)}{r_1 + \varrho \pm \frac{\overline{i}_2}{\overline{i}_1} \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)}, \\ \delta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{L \cdot \omega \pm \frac{\overline{i}_1}{\overline{i}_2} \cdot (M \cdot \omega \cdot \cos\varphi - \varrho \cdot \sin\varphi)}{R + r_2 + \varrho \pm \frac{\overline{i}_1}{\overline{i}_2} \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)}, \\ \psi = \varphi + \delta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{L \cdot \omega \cdot \cos\varphi - (r_2 + \varrho) \cdot \sin\omega \pm \frac{\overline{i}_1}{\overline{i}_2} \cdot M \cdot \omega}{L \cdot \omega \cdot \sin\varphi + (r_2 + \varrho) \cdot \cos\varphi \pm \frac{\overline{i}_1}{\overline{i}_2} \cdot \varrho}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ebenso geht die Gleichung (13) über in

$$\alpha = -(c_1 \cdot \overline{i}_1 \cdot \cos\delta \pm c_2 \cdot \overline{i}_2 \cdot \cos\psi) \cdot \cos\omega \cdot t + (c_1 \cdot \overline{i}_1 \cdot \sin\delta \pm c_2 \cdot \overline{i}_2 \cdot \sin\psi) \cdot \cos\omega \cdot t, \qquad (13a)$$

wo, wie die Gleichung (16) ergeben:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega} \cdot \frac{r_1 + \varrho \pm \frac{\overline{i}_2}{\overline{i}_1} \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)}{r_1 + \varrho} \\ &\text{und} \\ c_2 &= \frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega} \cdot \frac{R + r_2 + \varrho \pm \frac{\overline{i}_1}{\overline{i}_2} \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)}{R + r_2 + \varrho}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$\overline{i}_1$ und $\overline{i}_2$ sind hierin die Amplituden desjenigen Stromes in der betreffenden Wicklung, der in ihr fließt, wenn jeweils die andere Wicklung stromlos ist. Kennzeichnen wir für die Folge die für den Zustand nach der Kommutierung maßgebenden Werte von c, δ ψ durch Stricheln, so folgt aus Gleichung (13a):

$$\overline{\alpha}_1^2 = (c_1 \cdot \overline{i}_1)^2 + (c_2 \cdot \overline{i}_2)^2 + 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \overline{i}_1 \cdot \overline{i}_2 \cdot (\sin\delta_1 \cdot \sin\psi + \cos\delta_1 \cos\psi),$$

$$\overline{\alpha}_2^2 = (c_1' \cdot \overline{i}_1)^2 + (c_2' \cdot \overline{i}_2)^2 - 2 \cdot c_1' \cdot c_2' \cdot \overline{i}_1 \cdot \overline{i}_2 \cdot (\sin\delta_1' \cdot \sin\psi' + \cos\delta_1' \cdot \cos\psi').$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt, wenn man beachtet, daß man wegen der Kleinheit der Winkel δ cos $(\delta_2 - \delta_1)$ bzw. cos $(\delta_2' - \delta_1')$ unbedenklich gleich der Einheit setzen kann:

$$\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2 = 4 \cdot \bar{i}_1 \cdot \bar{i}_2 \cdot (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi) \cdot \left(\frac{1}{r_1 + \varrho} + \frac{1}{R + r_2 + \varrho}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega}\right)^2$$

$$+ 2 \cdot \bar{i}_1 \bar{i}_2 \cdot \left[(c_1 \cdot c_2 + c_1' \cdot c_2') \cdot \cos\varphi + \left(c_1 \cdot c_2 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1) + c_1' \cdot c_2' \cdot \sin(\delta_2' - \delta_1')\right) \cdot \sin\varphi\right].$$

Nun ist mit großer Annäherung

$$c_1 \cdot c_2 + c_1' \cdot c_2' = \frac{2 \cdot [(r_1 + \varrho) \cdot (R + r_2 + \varrho) + (M \cdot \omega \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \cos\varphi)^2]}{(r_1 + \varrho) \cdot (R + r_2 \varrho)} \cdot \left(\frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega}\right)^2 =$$

$$= \sim 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega}\right)^2,$$

ferner

$$\sin(\delta_2 - \delta_1) = \sin\delta_2 - \sin\delta_1 = \operatorname{tg}\delta_2 - \operatorname{tg}\delta_1$$

und damit

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1) + c_1' \cdot c_2' \cdot \sin\delta_2' - \delta_1') = -2 \cdot \left(\frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega}\right)^2 \cdot \frac{L \cdot \omega \cdot (R + r_2 - r_1)}{(R + r_2 + \varrho) \cdot (r_1 + \varrho)}.$$

Dies eingesetzt, ergibt nun:

$$\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2 = 4 \cdot \bar{i}_1 \cdot \bar{i}_2 \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega}\right)^2 \cdot$$

$$\left(1 + \frac{\varrho \cdot (R + r_1 + r_2 + 2 \cdot \varrho) - \operatorname{tg}\varphi \cdot \left(L \cdot \omega \cdot (R + r_2 - r_1) - M \cdot \omega \cdot (R + r_1 + r_2 + 2 \cdot \varrho)\right)}{(R + r_2 + \varrho) \cdot (r_1 + \varrho)}\right).$$

Zwischen den Zweigströmen i_1 und i_2 und der Spannung E bzw. dem Strome I besteht folgende Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}_1 &= \frac{\bar{E}}{r_1 + \varrho}, \\ \bar{i}_2 &= \bar{I} \cdot \frac{R}{R + r_2 + \varrho}, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

ferner sind

$$c_1 = \frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega} \cdot \frac{1}{r_1 + \varrho} \quad (19a)$$

bzw.

$$c_2 + \frac{2 \cdot H \cdot l \cdot z}{W \cdot \omega} \cdot \frac{R}{R + r_2 + \varrho}$$

zwei dem Instrument bei der gewählten Meßanordnung eigentümliche Konstanten, die sich jederzeit durch Versuch feststellen bzw. mittels der Gleichung (18) auf andere Parallel- bzw. Vorschaltwiderstände umrechnen lassen. Vereinigen wir nun diese beiden Konstanten zu einer einzigen,

$$c = \frac{1}{8 \cdot c_1 \cdot c_2}, \quad (19b)$$

so erhalten wir endlich folgenden Ausdruck für die gemessene Leistung

$$E \cdot I \cdot \cos\varphi = \frac{c}{1 + k} \cdot (\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2), \quad (20)$$

mit

$$k = \frac{\varrho \cdot (R + r_1 + r_2 + 2 \cdot \varrho) - \operatorname{tg}\varphi \cdot \left(L \cdot \omega \cdot (R + r_2 - r_1) - M \cdot \omega \cdot (R + r_1 + r_2 + 2 \cdot \varrho)\right)}{(R + r_2 + \varrho) \cdot (r_1 + \varrho)}. \quad (20a)$$

Man hat also, um den richtigen Wert der gemessenen Leistung zu erhalten, die Differenz der Quadrate der Ausschläge außer mit der Konstante c des Instruments



noch mit einem Korrektionsfaktor $\frac{1}{1+k}$ zu multiplizieren. Große Ausschläge sind gegebenenfalls noch mittels der in Bild 2 gegebenen Kurven auf ihren richtigen Wert zurückzuführen. Es wurde außerdem schon eingangs dieser Rechnungen darauf hingewiesen, daß von dem Meßergebnis die Stromwärmeverluste im Widerstand R in Abzug zu bringen sind.

Mit M = L ergibt sich für die am Meßergebnis anzubringende Korrektur die einfachere Beziehung

$$k = \frac{\varrho}{r_1 + \varrho} + \frac{\varrho \operatorname{tg} \varphi \cdot L \cdot \omega}{R + r_2 + \varrho}. \qquad (20\,b)$$

Es empfiehlt sich also, Strom- und Spannungsspule des Vibrationswattmeters mit möglichst enger Kopplung zu bauen. Legt man die beiden Spulen an Stellen gleichen Potentials, so sind störende Wirkungen infolge der gegenseitigen Kapazität nicht zu befürchten.



Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 5. Heft. 1920.

Über Gleichstrommaschinen hoher Spannung zur Speisung von Funkenstationen. Ihre Belastung und Spannungsgefahr[1]).

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Allgemeine Übersicht und Ziel. Man kann eine Antenne durch eine Gleichstrommaschine in Schwingungen versetzen[2]). Bild 1 zeigt, wie dies geschieht. Die Gleichstrommaschine lädt über den Widerstand R und über die Induktivitäten L die Kapazität C. Parallel zur Kapazität liegt unter Vorschaltung einer kleinen Induktivität $\mathfrak{L}$ eine Löschfunkenstrecke.

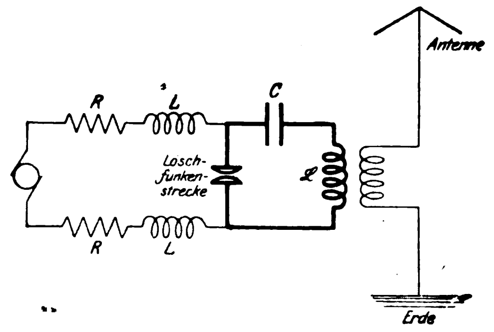


Bild 1. Anregung einer Antenne durch eine Gleichstrommaschine.

Hat die Spannung am Kondensator einen genügend hohen Wert erreicht, so setzt der Funke ein. Der Kondensator entlädt sich in Schwingungen über die Induktivität $\mathfrak{L}$ und die Löschfunkenstrecke. Mit dem stark gezeichneten Kondensatorschwingungskreise ist die Antenne gekoppelt. Auch sie beginnt bei der Kondensatorentladung zu schwingen.

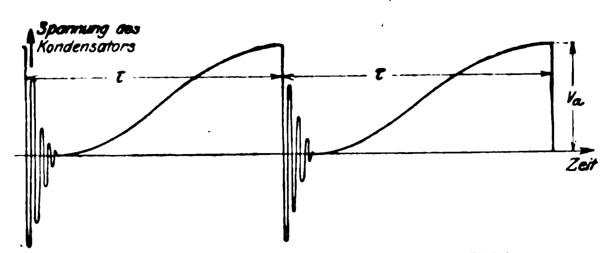


Bild 2. Spannung am Kondensator C (Bild 1).

Gekoppelte Schwingungskreise tauschen ihre Energie in Schwebungen aus. Es wandert die Energie des Kondensatorschwingungskreises in die Antenne. Nach der ersten Schwebung hat diese praktisch die ganze Energie aufgenommen. An der Löschfunkenstrecke und am Kondensator sind jetzt nur kleine Spannungen vorhanden. Der Löschfunke erlischt. Die Antenne schwingt aus. Der Kondensator lädt sich nun aufs neue auf. Die Spannung des Kondensators ändert sich nach dem Gesagten etwa nach Bild 2.

[1]) Geschrieben Ende 1915. Die Veröffentlichung unterblieb bisher aus militärischen Gründen.
[2]) Zenneck: Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie, II. Auflage, S. 235—247.

In Bild 1 setzt die Entladung bei einer Spannung ein, die die Löschfunkenstrecke durchschlägt. Das System gibt sich selbst die Zahl der Kondensatorentladungen und daher den akustischen Ton. In Bild 3, einer zweiten Art der Schwingungserregung durch Gleichstrom (Marconi-Schaltung), wird der akustische Ton durch ein besonderes Mittel — eine gedrehte Kurzschluß- und Abreißfunkenstrecke — dem System aufgezwungen. Im übrigen ist der Vorgang der gleiche wie vorhin. Die Gleichstrommaschine lädt über Widerstände und Induktivitäten den Kondensator C und dieser entlädt sich, wenn ihm durch einen Zahn der rotierenden Funkenstrecke

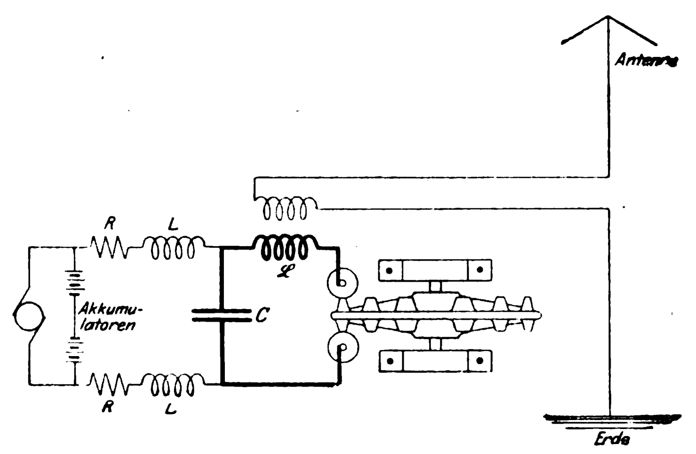


Bild 3. Zweite Art der Anregung einer Antenne durch eine Gleichstrommaschine (Marconischaltung).

hierzu Gelegenheit gegeben wird. Die Entladung erfolgt in Schwingungen und diese wiederum regen die Antenne an. Zwischen der Schwingungszahl ν_a des akustischen Tons der Station und zwischen der Zahl der in der Sekunde erfolgenden Kondensatorentladungen besteht eine einfache Beziehung: Es sei z die Zähnezahl der rotierenden Funkenstrecke, n ihre Umdrehungszahl in der Minute. Dann ist

$$\nu_a = \frac{n\,z}{60}. \qquad 1)$$

In Bild 4 zeige ich noch eine dritte Art der Schwingungserregung (Lepel-Schaltung). Wieder hat die Gleichstrommaschine die Aufgabe, über Widerstände und Drosselspulen den Hauptkondensator C zu laden. Seine Entladung wird aber nicht wie vorhin durch einen rotierenden Unterbrecher, sondern durch einen rotierenden (Neben-) Kondensator von gleicher Kapazität wie der Hauptkondensator erreicht. In der wirklichen Ausführung steht der Nebenkondensator still. Seine Umschaltung wird durch einen Dreh-Umschalter bewerkstelligt. Für die Einsicht in das Spiel der elektrischen Erscheinungen ist dies aber ohne Belang. Hat der Nebenkondensator die Spannung Null und stehen seine Klemmen wie in Bild 4 gezeichnet gerade den Klemmen (B A) gegenüber, so wird die Funkenstrecke bei genügend hoher Spannung durch-

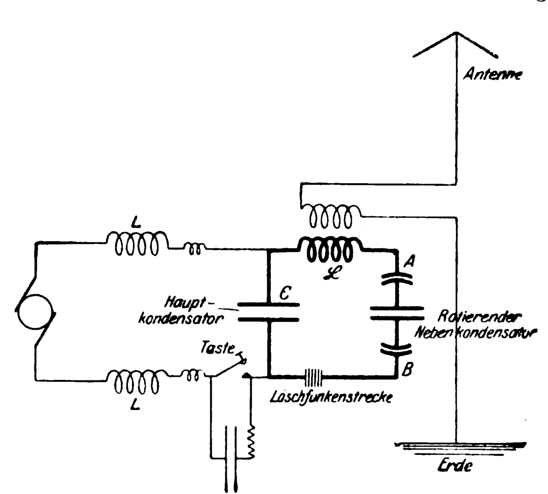


Bild 4. Dritte Art der Anregung einer Antenne (Lepel-Schaltung).

schlagen. Der Nebenkondensator lädt sich auf die Hälfte der Spannung des Hauptkondensators und der Hauptkondensator entlädt sich zur Hälfte. Dies geschieht infolge der Induktivität $\mathfrak{L}$ in gedämpften Schwingungen. Diese wiederum erregen die Antenne. Damit nach der ersten Schwebung die Energie nicht wieder aus der Antenne zurückflutet, ist in den primären Schwingungskreis noch eine Löschfunkenstrecke eingeschaltet.

Hat der Nebenkondensator eine halbe Umdrehung gemacht, so hat der Hauptkondensator Zeit gehabt, sich wieder aus der Gleichstrommaschine aufzuladen. Jetzt wird sich beim Einsetzen des Funkens der Nebenkondensator mit der vom vorigen Funkenspiel zurückbehaltenen Restladung in den Hauptkondensator entladen. Die dann dem Hauptkondensator noch verbleibende Restspannung wird sich auf beide Kondensatoren zu gleichen Teilen spalten. Auch dies geschieht wieder unter Schwingungen, die die Antenne zum Mitschwingen veranlassen usf.

Die verwendeten Gleichstrommaschinen müssen für eine hohe Spannung gebaut sein, damit die Funkenstrecke regelmäßig anspricht, und damit mit einem einzigen Funkenspiel eine genügend große Energie in die Antenne gebracht wird. Ich hatte Gelegenheit, in eine nach der Bild 4 arbeitende Station eine Gleichstrommaschine (bestehend aus zwei Doppelkollektormaschinen) für eine Spannung von 10000 Volt und eine Leistung von 10 kW einzubauen. Sie sollte als Ersatz für eine andere Maschine dienen, die einige Monate die Station gespeist hatte, dann aber durchschlagen worden war. An der Schaltung wurde nichts geändert. Als die von mir eingebaute Maschine ungefähr 10 Minuten die Station gespeist hatte, schlug auch sie durch.

Dieser Maschinendurchschlag veranlaßte mich, die Betriebsweise der Station einer eingehenden theoretischen Betrachtung zu unterziehen. Der Erfolg war, daß es mir gelang, eine hohe Spannungsbeanspruchung der Maschine durch Resonanz aufzudecken. Es können noch andere Ursachen der Spannungsgefährdung auftreten: Wanderwellen und Ausschaltspannungen. Aber beide treten im vorliegenden Falle, wie hier ausführlich gezeigt werden soll, ganz gegen die Resonanzspannungen zurück. Weiter gab mir die Theorie die Möglichkeit zu zeigen, wie man Gleichstrommaschinen in Funkenstationen gegen Überspannungen schützen kann. Das Mittel besteht darin, der Maschine einen Kondensator genügend großer Kapazität parallel zu schalten, gegebenenfalls unter Vorschaltung von Drosselspulen. Im folgenden will ich diese Behauptungen begründen und durch quantitative Angaben ergänzen:

2. Stellung der mathematisch-technischen Aufgabe. Die Werte der Widerstände, der Induktivitäten und Kapazitäten haben wir als bekannt anzusehen. Desgleichen die von der Gleichstrommaschine induzierte Spannung E und die Art der Entladung des Hauptkondensators.

Wie lange dauert der Entladungsvorgang? Die Kreisfrequenz q der Entladung steht mit dem Werte der Hauptkapazität C und der Induktivität $\mathfrak{L}$ in den Bild 1 und 3 in der Beziehung

$$q^2 = \frac{1}{\mathfrak{L} C}.$$

Bei der Schaltung (Bild 4) hat man bei gleichen Werten der Kapazität des Haupt- und Nebenkondensators

$$q^2 = \frac{2}{\mathfrak{L} C}$$

zu schreiben.

In beiden Fällen ist es dieselbe Frequenz, mit der auch die Antenne ausschwingt, die auf die Frequenz q abgestimmt werden muß. Die Kreisfrequenz q kann daher aus der Wellenlänge λ (in Metern), mit der die Funkenstation telegraphiert, nach der Formel

$$q = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda} = \frac{6\pi}{\lambda} \cdot 10^8 \, \mathrm{sec}^{-1} \qquad 2)$$

berechnet werden.

Bei einer Wellenlänge von 3 km = 3000 m ist $q = 2\pi \cdot 10^5$. Es beträgt unter dieser Annahme die Dauer einer Schwingung $^1/_{100000}$ Sekunde. Nehmen wir an, daß die Kopplung so gewählt ist, daß innerhalb von 10 Schwingungen die Energie aus dem Kondensatorschwingungskreise in die Antenne wandert; in diesem Falle würde die Entladung des Hauptkondensators in $^1/_{10000}$ Sekunde beendet sein.

Zur Ladung des Hauptkondensators verstreicht die zwischen zwei aufeinander folgenden Funkenspielen liegende Zeit. Diese wiederum ist abhängig von der Höhe des akustischen Tones der Station. Macht der akustische Ton 250 Schwingungen in der Sekunde, so wird der Hauptkondensator in $\frac{1}{250}$ Sekunde aufgeladen. Die Aufladungszeit ist somit in unserem Beispiel 40 mal größer als die Entladungszeit. In Bild 2 ist die Ladeperiode $^1/_{10}$ der Entladeperiode. Es vermag daher bereits

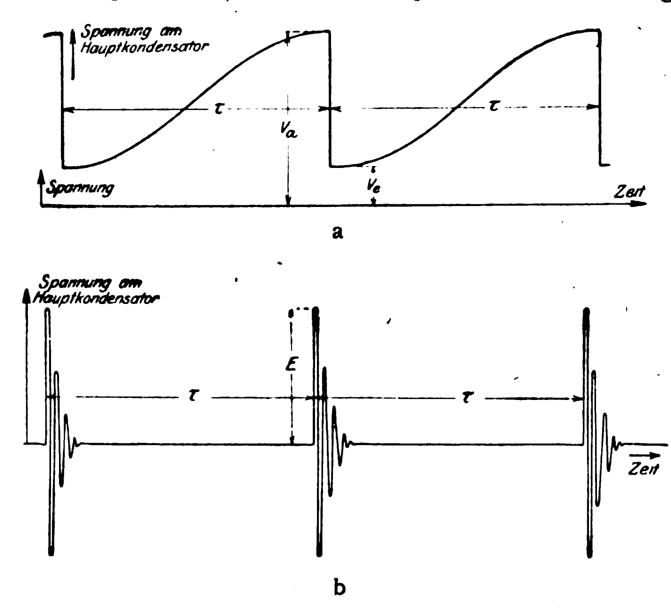


Bild 5. **Zerlegung der Kondensatorspannung (Bild 2) in die Teilspannungen a u. b.**

annähernd ein Bild von der Spannungsänderung des Hauptkondensators zu geben, wenn auch die Entladeperiode hier noch viel zu groß im Vergleich zur Ladeperiode gezeichnet ist. Der Augenschein lehrt, daß es zweckmäßig ist, die Spannungskurve des Hauptkondensators aus zwei Kurven (Bild 5a und 5b) zusammenzusetzen. Die Kurve a besteht aus einem plötzlichen Spannungssprunge von V_a beim Einsatz bis V_e am Ende des Funkenspiels. Die zweite Kurve (Bild 5b) besteht aus der oszillatorischen Entladung selber. Wir werden die Vorgänge im Maschinenkreise ebenfalls in zwei Teile zerlegen. Der eine soll der Spannungskurve 5a, der andere, auf den wir später im Abschnitt 10 eingehen wollen, der Spannungskurve 5b zugeordnet sein.

Wir wollen uns im folgenden zunächst nur mit dem stationären Fall beschäftigen, der sich einstellt, wenn die Station einen lang gezogenen Strich (Ton) gibt. Die Vorgänge beim Ein- und Ausschalten der Maschine werden im letzten Abschnitt gestreift werden.

Die Spannung springt bei der Schaltung (Bild 4) zwischen anderen Werten als bei den Schaltungen 1 und 3. Die Anfangsspannung sei bei allen Schaltungen

V_a; dann ist die Endspannung V_e bei Bild 1 und 3 Null. Bei der Schaltung Bild 4 trifft dies nicht zu. Wenn sich der Nebenkondensator mit seiner Endspannung V_e in den Hauptkondensator mit der Anfangsspannung V_a entlädt, stellt sich als Ergebnis die Spannung $\frac{V_a - V_e}{2}$ ein. Diese muß im stationären Zustande wieder gleich V_e sein Und aus dieser Forderung:

$$\frac{V_a - V_e}{2} = V_e \tag{3}$$

folgt

$$V_e = \frac{1}{3} V_a \tag{4}$$

Der Hauptkondensator entlädt sich bei der Schaltung 4 nicht ganz, sondern nur auf $^1/_3$. Im folgenden werden wir

$$V_e = \frac{1}{m} V_a \tag{5}$$

setzen und umschließen mit den Fällen m groß und m = 3 sämtliche Schaltungen.

Die Maschine werden wir als ein Gebilde mit Widerstand und Induktivität ansehen. Außerdem wollen wir ihr eine gewisse Kapazität zuerkennen. Bei der von mir eingebauten Maschine war die Kapazität sicherlich nicht klein. Jede Kollektorwicklung besteht aus 27 Spulen von je 1,20 m Umfang. Die Wicklungen zweier Kollektoren kehren sich eine Breite von 2 cm zu und laufen im Abstande von 1 mm einander parallel. Die Dielektritizitätskonstante der Isolierschicht zwischen den Wicklungen kann zu etwa 3 geschätzt werden. Dies ergibt eine Kapazität von

$$K = \frac{120 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 27}{0,1 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}} \cdot 10^{15} = \text{rund } ^2/_{100} \text{ Mikrofarad.}$$

Von dieser Größenordnung muß die Kapazität der Maschine sein[1]). Wir bringen die Kapazität dadurch zum Ausdruck, daß wir uns dem Leitungsgebilde aus Maschinenwiderstand und Maschineninduktivität einen Kondensator C_2 (Bild 6) parallel geschaltet denken[2]).

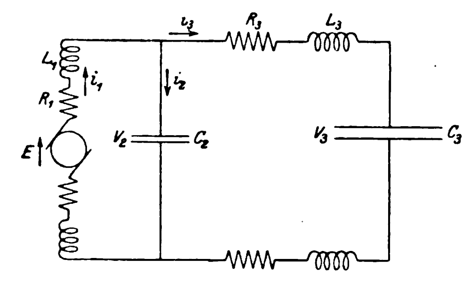


Bild 6. Behandelte Schaltung.

Wenn der Maschine noch ein Schutzkondensator parallel liegt, wirkt er wie eine Vergrößerung der Maschinenkapazität. Durch den Wert der Kapazität C_2 können wir daher zum Ausdruck bringen, ob wir es allein mit der Maschinenkapazität oder auch noch mit einer Schutzkapazität zu tun haben. Wir können nun unsere technische Aufgabe wie folgt stellen:

In einem Leitungsgebilde mit dem Widerstande R und der Induktivität L wird eine der Zeit nach unveränderliche elektrische Spannung E induziert. Parallel diesem Leitungsgebilde liegt eine Kapazität C_2. In Hintereinanderschaltung liegt eine Drosselspule mit der Induktivität $\mathfrak{L}_3$, dem Widerstand R_3, ferner ein Kondensator mit der Kapazität C_3. Die Spannung V_3 dieses Kondensators macht in regelmäßigen Zeit-

[1]) Die Kapazität gegen Erde war bei meiner Maschine klein erstens wegen der geringen Eisenlänge des Ankers (10 cm), zweitens wegen einer recht starken Isolierschicht zwischen Nutenrändern und Wicklung (vgl. Bild 15).

[2]) Man vgl. hierzu meine später entstandene Arbeit: Die Spule bei Wechselstrom, Archiv f. Elektrotechnik VII, S. 24.

abständen von der Größe τ einen Sprung von V_a auf $\frac{1}{m} V_a$, wo m eine vorgegebene Zahl ist. Es sind sämtliche Ströme und Spannungen des elektrischen Systems zu berechnen.

3. **Erste Näherung.** Wir setzen in diesem Abschnitt eine ideale Maschine mit dem Widerstand und der Eigeninduktivität Null voraus. Desgleichen wollen wir den Widerstand R_3 der vorgeschalteten Drosselspulen vernachlässigen. Dann muß die von der Gleichstrommaschine induzierte Spannung E übereinstimmen mit der Spannung V_2 des Kondensators C_2. Die induzierte Gleichspannung E setzten wir unveränderlich mit der Zeit voraus. Dann ist auch die Kondensatorspannung V_2 unveränderlich. Der Strom i_2, der den Kondensator laden oder entladen muß, ist gleich Null. Der Maschinenstrom i_1 muß mit dem Strome i_3 in der Drosselspule übereinstimmen. Für i_3 schreiben wir die Differentialgleichung an:

$$E = \mathfrak{L}_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 \, dt \tag{6}$$

Da wir zunächst nur über die Kondensatorspannung V_3 etwas aussagen können und nicht über den Strom i_3, so ist es zweckmäßig, i_3 durch die Kondensatorspannung V_3 zu ersetzen:

$$V_3 = \frac{1}{C_3} \int i_3 \, dt \tag{7}$$

$$i_3 = C_3 \frac{dV_3}{dt} \tag{8}$$

Alsdann lautet die Differentialgleichung

$$E = \mathfrak{L}_3 C_3 \frac{d^2 V_3}{dt^2} + V_3 \tag{9}$$

Die Lösung lautet:

$$V_3 = E + A \sin \omega_3 t + B \cos \omega_3 t \tag{10}$$

A und B sind Integrationskonstanten. Die Kreisfrequenz ω_3 steht mit dem Produkte Induktivität und Kapazität in der Beziehung:

$$\omega_3^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}_3 C_3} \tag{11}$$

Man wählt aus später anzugebenden Gründen die Frequenz des zu ω_3 gehörigen elektrischen Tones $\left(\nu_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathfrak{L}_3 C_3}}\right)$ niedrig im Vergleich zu der Frequenz ν_a des akustischen Tones der Station. In unserem Falle machte der elektrische Ton etwa 50, der akustische Ton etwa 250 Schwingungen in der Sekunde.

Die Differentialgleichung 9) sagt in Worten folgendes aus: Die Kondensatorspannung V_3 und die negative Spannung der Drosselspule $\mathfrak{L}_3 C_3 \frac{d^2 V_3}{dt^2} = \mathfrak{L} \frac{di_3}{dt}$ ergänzen sich immer zu der Maschinenspannung E. Dagegen bringt unsere Differentialgleichung noch nicht zum Ausdruck, daß bei Beginn des Funkenspiels die Kondensatorspannung V_3 jedesmal einen Sprung machen soll. Die Differentialgleichung 9) und ihre Lösung 10) können daher zunächst nicht für beliebige Zeit Gültigkeit haben. Zunächst beschreiben sie nur die Vorgänge für die Zeit von einem Funkenspiel bis zum nächstfolgenden. Wenn man mit ihrer Hilfe die elektrischen Vorgänge für beliebige Zeit beschreiben will, so hat dies auf folgende Weise zu geschehen:

Der Funke setze zur Zeit $t = 0$ ein. Die Kondensatorspannung V_3 sei unmittelbar vorher V_0. Unmittelbar nach Einsatz des Funkens ist sie $V_{e0} = \frac{1}{m} V_0$.



Von jetzt ab beschreibt die Lösung 10) die Änderung der Kondensatorspannung. Die Konstanten A und B müssen wir daher so bestimmen, daß zur Zeit $t = 0$, mit der die Geltung von 10) beginnt, $V_3 = V_{e0} = \frac{1}{m} V_0$ ist. Weiter sei zur Zeit $t = 0$ der Strom $i_3 = C_3 \frac{dV_3}{dt} = i_{30}$. Unsere Konstanten haben somit noch die zweite Bedingung zu erfüllen, daß zur Zeit $t = 0$ der Strom $C_3 \frac{dV_3}{dt} = C_3 \omega_3 \left\{ A \cos \omega_3 t - B \sin \omega_3 t \right\} = i_{30}$ ist. Hiermit sind die Konstanten A und B bestimmt und es können jetzt die Werte der Kondensatorspannung V_3 und des Stromes i_3 am Ende des Ladespiels ($t = \tau$) berechnet werden. Dies seien die Werte $V_{3\tau}$ und $i_{3\tau}$. Hierdurch sind wieder die Grundlagen für die Berechnung des Verlaufs im zweiten Ladespiel gegeben. Denn im zweiten Ladespiel gilt wieder die Lösung 10). Nur müssen wir für A und B neue Werte einsetzen. Diese bestimmen sich dadurch, daß zu Anfang des zweiten Ladespieles, das wir unbeschadet der Allgemeinheit wieder von $t = 0$ bis $t = \tau$ zählen können und wollen, die Spannung $V_3 = \frac{1}{m} V_{3\tau}$ sein muß und der Strom i_3 wieder mit dem Strom $i_{3\tau}$ übereinstimmen muß usf. Wollte man auf diesem Wege den stationären Vorgang angeben, der sich im allgemeinen erst nach vielen Ladespielen einstellt, so wäre eine nicht unbeträchtliche mathematische Arbeit zu leisten. Die Entschädigung für diese Mühe würde darin bestehen, daß wir über die Art und die Geschwindigkeit, mit der der stationäre Zustand erreicht wird, unterrichtet wären Verzichten wir hierauf, so können wir mit folgendem Kunstgriff sofort zum stationären Zustand gelangen:

Der stationäre Zustand ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1) zu Anfang eines Ladespieles ($t = 0$) ist die Kondensatorspannung $V_3 = V_e = \frac{1}{m} V_a$. Am Ende des Ladespieles ($t = \tau$) erreicht sie den Wert V_a;

2) der Strom i_3 hat zu Anfang ($t = 0$) und Ende ($t = \tau$) eines Ladespieles denselben Wert.

Die Konstanten A und B bestimmen sich somit für den stationären Zustand aus folgenden Forderungen:

$$E + B = \frac{1}{m}(E + A \sin \omega_3 \tau + B \cos \omega_3 \tau) \tag{12}$$

$$i_{3\,(t=0)} = C_3 \omega_3 A = i_{3\,(t=\tau)} = C_3 \omega_3 (A \cos \omega_3 \tau - B \sin \omega_3 \tau) \tag{13}$$

oder

$$E\left(1 - \frac{1}{m}\right) + B\left(1 - \frac{1}{m} \cos \omega_3 \tau\right) = \frac{1}{m} A \sin \omega_3 \tau$$

$$A(1 - \cos \omega_3 \tau) = - B \sin \omega_3 \tau.$$

Hiernach muß sein:

$$B = - \frac{E\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1 + \frac{1}{m}} \tag{14}$$

$$A = E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\sin \omega_3 \tau}{(1 - \cos \omega_3 \tau)} = E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\omega_3 \tau}{2}. \tag{15}$$

Mit diesen Werten erhalten wir für die Kondensatorspannung:

$$V_3 = E + E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \left[\operatorname{cotg}\frac{\omega_3 \tau}{2} \cdot \sin \omega_3 t - \cos \omega_3 t\right] \qquad 16)$$

und für den Strom:

$$i_3 = E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot C_3 \omega \cdot \left[\operatorname{cotg}\frac{\omega_3 \tau}{2} \cdot \cos \omega_3 t + \sin \omega_3 t\right] \qquad 17)$$

Bei irgend einem Ladespiel ist die Zeit von $t = 0$ bis $t = \tau$ zu zählen. Hiermit haben wir die gesuchten mathematischen Ausdrücke gewonnen.

4. Diskussion der Lösung. a) Die Spannung am Hauptkondensator. Bei Beginn eines Ladespiels ($t = 0$) hat die Kondensatorspannung V_3 den Wert

$$V_3 = V_e = E - E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} = E \cdot \frac{2}{m \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}. \qquad 18)$$

Bei den Schaltungen 1 und 3 (m groß) ist somit $V_e = 0$; bei der Schaltung 4 ($m = 3$) ist

$$V_e = E \cdot \frac{2}{3 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{E}{2}. \qquad 19)$$

Am Ende eines Ladespieles ($t = \tau$) ist:

$$V_3 = V_a = E + E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \left[\frac{\sin \omega_3 \tau}{1 - \cos \omega \tau} \cdot \sin \omega_3 \tau - \cos \omega_3 \tau\right]$$

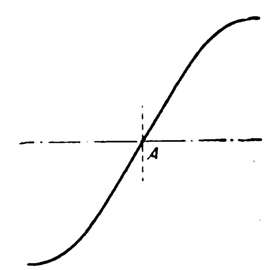


Bild 7. Ausschnitt aus einer Sinusfunktion.

$$V_a = E + E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} = \frac{2E}{1 + \frac{1}{m}} \qquad 20)$$

Bei den Schaltungen 1 und 3 erreicht am Ende des Ladespieles die Kondensatorspannung den Wert

$$V_a = 2E. \qquad 21)$$

Bei der Schaltung 4 dagegen steigt sie nur bis

$$V_a = 1{,}5\ E. \qquad 22)$$

Weiter liest man aus dem Ausdrucke 16) ab, daß in der Mitte eines Ladespieles zur Zeit $t = \frac{\tau}{2}$ die Kondensatorspannung $V_3 = E$ ist.

Der Anstieg von der Spannung V_e zur Spannung V_a erfolgt nach der Funktion $D \sin(\omega_3 t + \varphi)$ oder besser nach einem aus dieser Funktion herausgeschnittenen Stücke; und zwar ist es ein symmetrisch zum Punkte A (Bild 7) gelegener Kurventeil. Denn nur ein solcher Punkt hat die Eigenschaft, daß in gleicher Entfernung rechts und links von ihm die Werte der Kurve entgegengesetzt gleich sind. Ganz das gleiche tritt für die Kondensatorspannung ein, die für die Mitte des Ladespieles die Spannung E, für den Anfang (also $\frac{\tau}{2}$ Sekunden vorher) die Spannung

$E - E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$, für das Ende des Ladespieles $\left(\frac{\tau}{2}\text{ Sekunden nachher}\right)$ die Spannung $E + E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$ annimmt. Die Zeit eines Ladespieles $\left(\tau = \frac{1}{\nu_a}\right)$ kann immer kleiner als die Schwingungsdauer des elektrischen Tones des Ladekreises angesehen werden (vgl. oben). Ist sie nur wenig kleiner, so hat die Kondensatorspannung das Aussehen Abb. 8a. Der sinusartige Anstieg von V_e nach V_a ist deutlich ausgeprägt. Ist die Zeit für ein Ladespiel sehr klein im Verhältnis zur Schwingungsdauer des elektrischen „Ladetones" $\left(\frac{2\pi}{\omega_3}\right)$, so steigt die Spannung nahezu gradlinig von V_e auf V_a (Abb. 8b).

b) Der Strom i_3. Zu Anfang eines Ladespiels $(t = 0)$ hat der Strom die Größe

$$i_{3\,(t=0)} = E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot C_3 \omega_3 \operatorname{ctg} \frac{\omega_3 \tau}{2}. \qquad 23)$$

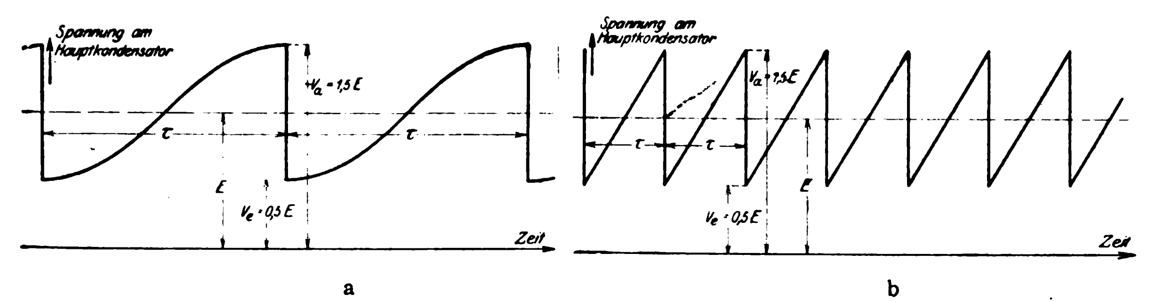


Bild 8. Spannung am Kondensator C_3 (Bild 6).
a) bei langsamer,
b) bei rascher Funkenfolge.

Genau den gleichen Wert nimmt er am Ende eines Ladespieles an. In der Mitte $\left(t = \frac{\tau}{2}\right)$ eines Ladespieles erreicht er seinen größten Wert:

$$i_{3\,max} = E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \cdot \frac{C_3 \omega_3}{\sin \frac{\omega_3 \tau}{2}} \qquad 24)$$

In der ersten Hälfte des Ladespieles steigt der Strom an. Er lädt den Hauptkondensator bis zur Spannung E auf und vermehrt gleichzeitig die magnetische Energie der Drosselspule. In der zweiten Hälfte des Ladespieles sinkt er wieder herab. Er lädt den Kondensator weiter und gleichzeitig wandert die in der ersten Hälfte ausgespeicherte magnetische Energie als elektrische Energie in den Kondensator, dessen Spannung bis zum Werte $E + E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$ hinaufgedrückt wird.

Wir wollen die Schwingungszeit des elektrischen Ladetones mit T bezeichnen. Man wählt T etwa zu $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{50}$ Sekunde. Die Zeit τ für ein Ladespiel (Schwingungszeit des akustischen Tones) liegt dagegen etwa bei $\frac{1}{250}$ bis $\frac{1}{300}$ Sekunde. Wir wollen daher in Zukunft

$$k\tau = T \tag{25}$$

setzen.

Die Verhältniszahl k gibt an, wievielmal der akustische Ton der Station höher liegt als der „elektrische Ladeton". Für k wollen wir alle von 2 an auftretenden Werte in die Betrachtung einschließen.

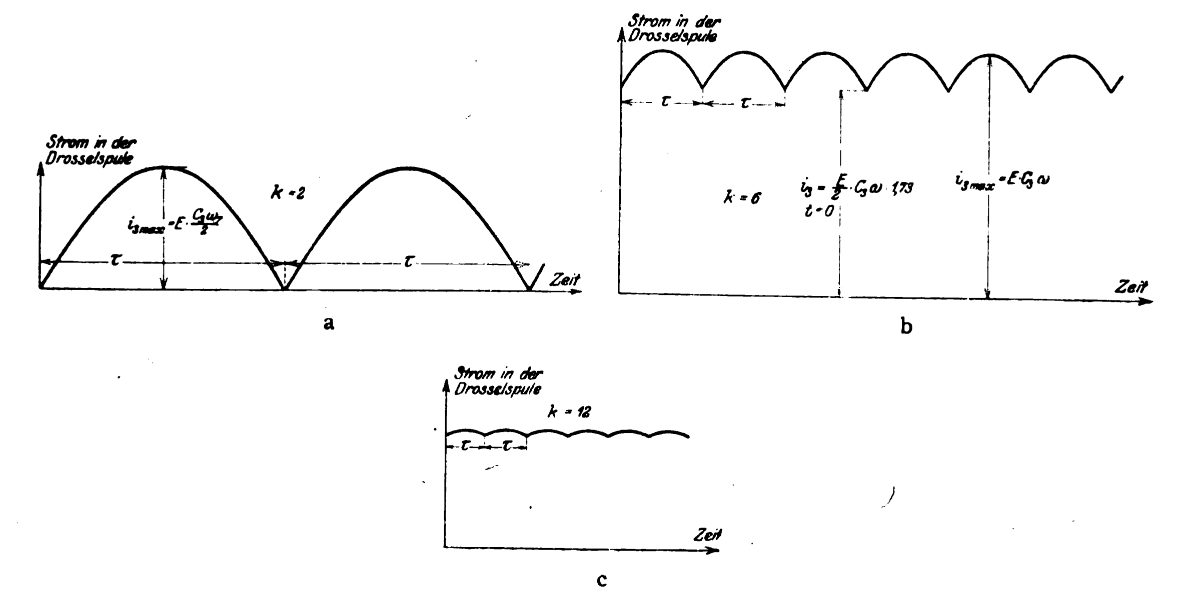


Bild 9. Strom in der Spule L_3 (Bild 6)
a) bei langsamer,
b) bei rascherer,
c) bei sehr rascher Funkenfolge.

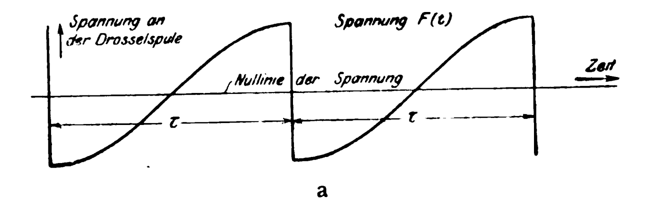
Wenn $k = 2$ ist, ist $\operatorname{ctg}\frac{\omega_3\tau}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\omega_3 \cdot T}{2k} = \operatorname{cotg}\frac{\omega_3 T}{4} = 0$; $\sin\frac{\omega_3\tau}{2} = 1$. Der Strom ist zu Beginn des Ladespieles Null, er steigt bis zum Werte

$$i_{3\,max} = E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot C_3\,\omega_3 \tag{26}$$

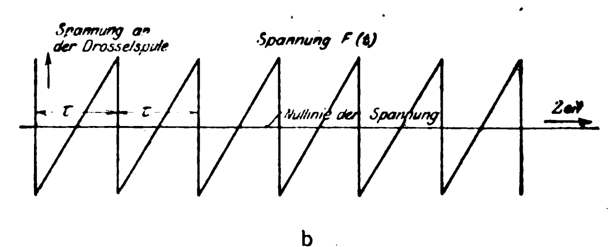
empor und sinkt wieder auf Null herab. Seine Kurve ist durch Bild 9a gegeben (stark pulsierender Gleichstrom). Wächst k, so wachsen auch Anfangs- und Maximalwert des Stromes; beide aber in verschiedenem Maße. Der Anfangswert rascher als der Maximalwert. Infolgedessen nähert sich bei großem Werte von k die Stromkurve einem Gleichstrome, über den sich eine feine Kräuselung aus Bogen, die in Spitzen aneinander stoßen (Bild 9a und 9b), überlagert. In der folgenden Tabelle habe ich für eine Reihe von Werten von k den Anfangswert des Stromes, den Maximalwert und die Größe der Stromschwankung berechnet:

Tabelle.

k		$\operatorname{ctg} \frac{\omega_3 \tau}{2}$		$\frac{1}{\sin \frac{\omega_3 \tau}{2}}$	
Frequenz des akustischen Tones / Frequenz des elektrischen Ladetones	$\frac{\omega_3 \tau}{2}$	Anfangswert des Stromes, wenn $E \cdot \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \cdot C_3 \omega_3 = 1$ ist	$\sin \frac{\omega_3 \tau}{2}$	Maximalwert des Stromes, wenn $E \cdot \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \cdot C_3 \omega_3 = 1$ ist	Schwankung des Stromes bezogen auf den arithmetrischen Mittelwert %
2	90°	0	1	1	100
3	60°	0,577	0,866	1,152	33,3
4	45°	1,00	0,707	1,412	17,1
5	36°	1,376	0,587	1,701	10,5
6	30°	1,732	0,500	2,00	7,2
12	15°	3,73	0,259	3,860	1,75
24	7,5°	7,59	0,130	7,69	0,65
60	3°	19,08	0,052	19,1	0



a



b

Bild 10. Spannung an der Spule A_3 (Bild 6)
a) bei langsamer,
b) bei rascher Funkenfolge.

c) Die Spannung E_d an der Drosselspule. Mathematisch ist sie durch den Ausdruck:

$$E_d = -\mathfrak{L}_3 \frac{di_3}{dt} \tag{27}$$

gegeben. Aus der Stromkurve geht hervor, daß die Spannung der Drosselspule in der Mitte eines jeden Ladespieles den Wert Null hat; denn hier hat die Stromkurve ein Maximum, der Differentialquotient nach der Zeit verschwindet somit. Beim Ende eines Ladespiels und zu Beginn des nächstfolgenden hat die Stromkurve eine Spitze (Bild 9). Der bloße Augenschein lehrt, daß hier die Spannung der Drosselspule von einem positiven Werte auf einen negativen Wert von gleichem Betrage springt. Schon hieraus geht eine gewisse Verwandtschaft mit der Kurve

der Spannung des Hauptkondensators hervor. Die genauere Betrachtung zeigt, daß auch quantitativ die Spannung der Drosselspule mit den Schwankungen der Kondensatorspannung übereinstimmen muß, welche Frequenz auch immer dem akustischen Tone zukommen mag. Denn nach unseren Hauptdifferentialgleichungen 6) und 9) ist

$$E_d = -\mathfrak{L}_3 \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{C_3} \int i_3 \, dt - E = V_3 - E \qquad 28)$$

Ziehen wir daher von der Spannung des Hauptkondensators (Bild 8) die Maschinenspannung E ab, so erhalten wir die Spannung an der Drosselspule. Bei niedrigem akustischem Tone der Station erhalten wir für die Spannung der Drosselspule das Bild 10. Der Anstieg der Spannung nach einer Sinusfunktion kommt wieder deutlich zum Ausdruck. Bei hohem akustischen Tone (Bild 10b) erhalten wir bei der Spannung des Hauptkondensators wieder den gradlinigen Anstieg.

Mit hohem akustischem Tone nehmen die Schwankungen des Gleichstromes ab. Wie kommt es, daß trotzdem die von den Schwankungen induzierte Spannung immer dieselbe bleibt? Der Grund liegt darin, daß mit der Höhe des Tones auch die Zeit, in der die Schwankung durchlaufen wird, abnimmt und es bei Berechnung der Spannung der Drosselspule (Ausdruck 27) auf das Verhältnis von Stromschwankung zu der zugehörigen Zeit ankommt.

5. **Zweite Annäherung. Erste Stufe.** Bisher haben wir Widerstand und Induktivität der Maschine vernachlässigt. Wir wollen jetzt annehmen, beide seien von Null verschieden. Es soll zunächst aber die Maschineninduktivität L_1 als klein gegen die Induktivität L_3 der Drosselspulen vorausgesetzt werden. Wir wollen weiter annehmen, der Strom i_3 sei bekannt und stimme genau überein mit dem Strome der ersten Annäherung, den wir von jetzt ab J_3 nennen wollen. Mit dem Strome J_3 haben wir der Forderung der sprungweisen Entladung des Hauptkondensators C_3 Rechnung getragen.

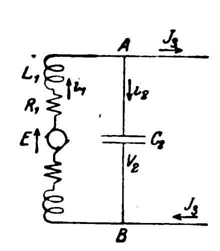


Bild 11. Schaltungsschema für die zweite Annäherung der Rechnung.

Die Aufgabe, die wir jetzt behandeln, lautet folgendermaßen:

Es sei ein Leitergebilde mit dem Widerstand R_1 und der Induktivität L_1 gegeben, in dem die konstante Spannung E induziert wird (Bild 11). Parallel dem Leitergebilde liegt eine Kapazität C_2. Durch irgend welche äußere Mittel wird an den Klemmen A B ein Strom J_3 entnommen, der durch das Bild 9 und die Formeln 17), 23), 24) bestimmt ist. Wie groß ist der Maschinenstrom i_1, der Kondensatorstrom i_2 und die Klemmenspannung der Maschine oder die ihr gleiche Klemmenspannung des Kondensators C_2?[1])

Die Differentialgleichungen für den Kreis aus Maschine und Maschinenkondensator lauten:

$$E = R_1 i_1 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt \qquad 29)$$

$$i_1 = i_2 + J_3 \qquad 30)$$

(J_3 eine gegebene Größe).

Es folgt durch Beseitigung von i_1:

$$E - \mathfrak{L}_1 \frac{dJ_3}{dt} = R_1 i_2 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt \qquad 31)$$

Die Ohmsche Spannung $R_1 J_3$ ist gegen die induktive Spannung $\mathfrak{L}_1 \frac{dJ_3}{dt}$ als klein gestrichen worden.

[1]) Von der Forderung der ersten Näherung, daß die Klemmenspannung des Kondensators C_2 gleich E sei, wird jetzt somit abgesehen.

Wir kennen die Spannung $-\mathfrak{L}_3 \frac{dJ_3}{dt}$ als Spannung der Drosselspule aus der Bild 10. Die Spannung $-\mathfrak{L}_1 \frac{dJ_3}{dt}$ hat dem Charakter nach dasselbe Aussehen. Nur sind ihre Ordinaten im Verhältnis $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3}$ kleiner. Wir wollen von nun an den akustischen Ton so hoch ansehen, daß der Anstieg der Spannungskurve $-\mathfrak{L}_3 \frac{dJ_3}{dt}$ als gradlinig angesehen werden kann (Bild 10b). Dann kann man diese Spannungen in die folgende Fouriersche Reihe zerlegen:

$$-L_3 \frac{dJ_3}{dt} = F(t) = \frac{2}{\pi} E \cdot \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \left\{ \sin \frac{2\pi}{\tau} t - \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{\tau} \ldots + \frac{1}{n} \sin n \cdot \frac{2\pi}{\tau} t \right\} \qquad 32)[1]$$

Zur Abkürzung schreiben wir für die Kreisfrequenz des akustischen Tones:

$$\frac{2\pi}{\tau} = \omega_a = 2\pi\nu_a. \qquad 33)$$

Dann ist:

$$F(t) = -\mathfrak{L}_3 \frac{dJ_3}{dt} = \frac{2}{\pi} E \cdot \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin n\,\omega_a t \qquad 34)$$

und weiter

$$-\mathfrak{L}_1 \frac{dJ_3}{dt} = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot E \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sin n\,\omega_a t \qquad 35)$$

Die Spannung $-\mathfrak{L}_1 \frac{dJ_3}{dt}$ ist somit eine mehrwellige Wechselspannung, deren Grundfrequenz mit der Frequenz des akustischen Tones übereinstimmt. Wir vergleichen nun die Differentialgleichung 31) mit der Differentialgleichung eines Stromkreises vom Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C, auf dessen Klemmen eine Gleichspannung E und Wechselspannung $e = f(t)$ einwirkt.

Diese lautet:

$$E + f(t) = R\,i + \mathfrak{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i\,dt \qquad 36)$$

Beide Gleichungen stimmen in der Form miteinander überein. Fassen wir noch die Gleichung 30) ins Auge, so können wir folgendes aussagen:

Der Strom in der Maschine besteht aus dem Strome J_3 und einem Strome i_2. Der Strom i_2 stimmt mit dem Strome i eines Kreises aus dem Widerstande R_1, der Eigeninduktivität L_1 und Kapazität C_2 überein, wenn in ihm die mehrwellige Spannung von der Größe:

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot E \cdot \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \cdot \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sin n\,\omega_a t$$

wirkt[2]).

[1]) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der Physik. Bd. I. S. 83. Formel 1).

[2]) Die konstante Spannung E in Gleichung 36) ruft keinen Strom, sondern nur eine um E vermehrte Kondensatorspannung hervor.

Nach bekannten Regeln hat man somit für den Strom i_2 den Ausdruck anzuschreiben:

$$i_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{\sin (n \omega_a t - \varphi_n)}{\sqrt{R_1^2 + \left(\mathfrak{L}_1 n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}\right)^2}} \tag{37}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_n = \frac{R_1}{\mathfrak{L}_1 n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}} \tag{38}$$

Für den Maschinenstrom gilt:

$$i_1 = J_3 + \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{\sin (n \omega_a t - \varphi_m)}{\sqrt{R_1^2 + \left(\mathfrak{L}_1 n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}\right)^2}} \tag{39}$$

Man überzeugt sich leicht, daß für die Spannung an der Maschine und ihrem Kondensator folgender Ausdruck gilt:

$$V_2 = E + \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \frac{2}{\pi} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{C_2 n \omega_a} \cdot \frac{\cos (n \omega_a t - \varphi_n)}{\sqrt{R_1^2 + \left(\mathfrak{L}_1 n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}\right)^2}} \tag{40}$$

Sie setzt sich also aus der induzierten Gleichspannung E und einer ihr übergelagerten mehrwelligen Wechselspannung zusammen. Die Amplitude der n^{ten} Oberwelle beträgt:

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n C_2 n \omega_a} \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + \left(\mathfrak{L}_1 n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}\right)^2}} \tag{41}$$

Wir müssen nun 3 Fälle unterscheiden:

1. Der Kondensator C_2 ist so groß, daß weder die Grundwelle im Ausdruck 41), noch irgend eine Oberwelle mit der Eigenschwingung des aus Maschineninduktivität und Maschinenkondensator bestehenden Kreises in Resonanz treten kann. Alsdann können wir in dem Ausdruck 41) den Maschinenwiderstand R_1 und Kapazitätswiderstand $\frac{1}{C_2 n \omega_a}$ gegen den induktiven Widerstand streichen. Wir erhalten:

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{C_2 n \omega_a} \cdot \frac{1}{\mathfrak{L}_1 n \omega_a} \tag{42}$$

In dem vorliegenden Falle nehmen die Amplituden mit der dritten Potenz der Ordnungszahl n ab. Sprünge kommen daher in der Klemmenspannung der Maschine und des Schutzkondensators nicht vor. Wir können uns auf die Grundwelle beschränken. Diese hat, wenn wir die Kreisfrequenz der Eigenschwingung des Maschinenkreises mit ω_2 bezeichnen:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}_1 C_2} \tag{43}$$

die Größe:

$$V_{21} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \, \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_a^2} \tag{44}$$

Der ziemlich kräftige Sprung am Hauptkondensator macht sich jetzt nur in einer kleinen Welle am Maschinenkondensator bemerkbar. Diese ist um so kleiner, je größer die Induktivität der Drosselspule gegenüber der Induktivität der Maschine ist und je tiefer der elektrische „Maschinenton" (ω_2) zum akustischen Tone (ω_a) der Station liegt.

2. Der Kondensator C_2 sei so klein, daß eine der Oberwellen in Resonanz treten kann. Es sei aber der akustische Ton so eingestellt, daß die Stelle der Resonanz zwischen der k^{ten} und $(k+1)^{ten}$ Oberwelle liegt. Dann können wir bis zur k^{ten} Oberwelle R_1 und $\mathfrak{L}_1 n \omega_a$ gegen $\frac{1}{C_2 n \omega_a}$ streichen.

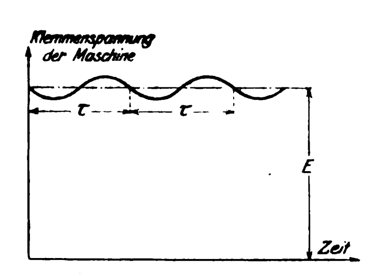


Bild 12. Klemmenspannung der Maschine bei sehr großem Kondensator C_2 (Bild 6). Resonanz kann nicht eintreten.

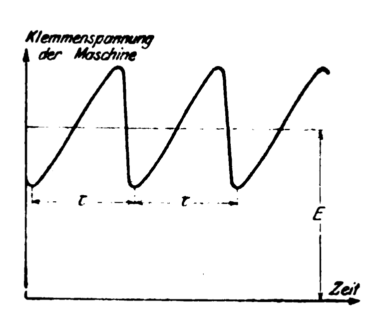


Bild 13. Der Kondensator C_2 (Bild 6) ist kleiner, als es in Bild 12 angenommen ist. Es kann Resonanz eintreten. Aber sie tritt zufälligerweise nicht ein.

Bis zur k^{ten} Oberwelle ist daher

$$\underset{n \leqq k}{V_{2n}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{45}$$

Von der k^{ten} Oberwelle ab vernachlässigen wir wie unter 1) R_1 und $C_2 n \omega_a$ gegen $L_1 n \omega_a$ und erhalten:

$$\underset{n > k}{V_{2n}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^3} \frac{1}{C_2 \mathfrak{L}_1 \cdot \omega_a^2} \tag{46}$$

Im Falle 2 stimmen daher bis zur k^{ten} Oberwelle die Amplituden bis auf den konstanten Faktor $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3}$ überein, mit den Amplituden der Oberwellen der Drosselspulenspannung $\mathfrak{L}_3 \frac{d J_3}{dt}$. Von der k^{ten} Oberwelle ab sind sie kleiner. Die Klemmenspannung von Maschine und ihres Kondensators hat daher etwa das Aussehen (Bild 13). Die Schwankung der Spannung ist rund der $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3}$ te Teil der Schwankung der Drosselspulspannung.

3. Die k^{te} Oberwelle trete mit dem Schutzkreise in Resonanz. Dann ist

$$\mathfrak{L}_1 k \omega_a - \frac{1}{C_2 k \omega_a} = 0 \qquad 47)$$

Die k^{te} Harmonische muß alsdann in der Klemmenspannung der Maschine und ihres Kondensators besonders stark hervortreten. Im übrigen treffen noch Bild 13) und die Überlegungen unter 2 zu. Die Amplitude der k^{ten} Harmonischen beträgt:

$$V_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot C_2 \omega_a} \qquad 48)$$

Da Resonanz bestehen soll, muß die Maschinenkapazität gerade eine solche Größe haben, daß

$$k^2 \omega_a^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}_1 C_2} \qquad 49)$$

ist. Mit dieser Beziehung erhalten wir:

$$V_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{R_1} \cdot \omega_a \qquad 50)$$

Wenn auch $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3}$ nach Voraussetzung eine kleine Zahl ist, so kann V_{2k} doch groß gegen E ausfallen, da der Ausdruck 50) noch den Faktor enthält $\frac{\mathfrak{L}_1 \omega_a}{R_1}$.

Zahlenbeispiel: Es sei $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3} = \frac{1}{2}$; $\mathfrak{L}_1 = 15$ Henry; $R_1 = 1000$ Ohm; $\omega_a = 250 \cdot 2\pi$; m = 3 (Schaltung Bild 4). Dann ist

$$V_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{15}{1000} \cdot 250 \cdot 2\pi = E \cdot 3{,}75.$$

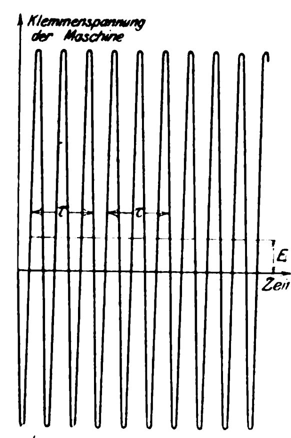


Bild 14. Es tritt eine Überspannung an der Maschine infolge von Resonanz ein.

Da außerdem dauernd am Maschinenkondensator die Spannung E liegt, so ist die Maschine vorübergehend der 4,75fachen Spannung ausgesetzt (Bild 14).

In dem Ausdrucke 50) für die Resonanzspannung ist die Ordnungszahl k und die Schutzkapazität C_2 nicht enthalten. Dies zeigt, daß die Resonanzspannung unabhängig von beiden ist. Es ist daher für die Spannungsbeanspruchung praktisch ganz gleich, bei welcher Oberwelle Resonanz erfolgt. Die 10te Oberwelle würde nach Formel 50) dieselbe Resonanzspannung wie die erste hervorrufen. Dies ist allerdings nur richtig, wenn der Widerstand für alle Oberwellen gleich wäre. In Wirklichkeit steigt er mit der Ordnungszahl infolge von Stromverdrängung und Wirbelströmen an. Je höher nun die Oberwelle liegt, die Resonanz hervorruft, um so kleiner braucht bei gegebener Maschineninduktivität die Kapazität C_2 zu sein, um die Resonanz herzustellen. Wenn kein besonderer Schutzkondensator der Maschine parallel liegt, stimmt der Wert der Kapazität C_2 mit der Eigenkapazität der Maschine überein. Trotzdem diese klein ist, kann sie somit doch Anlaß zu einer nicht unbeträchtlichen Resonanzspannung sein.

6. Zweite Annäherung. Zweite Stufe. Bei der ersten Annäherung waren wir davon ausgegangen, daß die Klemmenspannung der Maschine konstant gleich E



sei. Maschinenwiderstand und Induktivität wurden vernachlässigt. Unter dieser Voraussetzung hatten wir den Strom J_3 berechnet. Bei der ersten Stufe der zweiten Annäherung gaben wir uns den Strom in der Drosselspule zu J_3. Wir berücksichtigten Maschinenwiderstand und Maschineninduktivität. Unser Ziel war die Klemmenspannung der Maschine. Offenbar ist nur dann unsere bisherige zweite Annäherung zu gebrauchen, wenn wir zu einer Klemmenspannung der Maschine kommen, die gleich oder doch angenähert mit dem konstanten Werte E übereinstimmt. Das trifft für den Fall 1) und 2) des vorigen Abschnittes zu. Aber gerade für den gefährlichen Fall der Resonanz kommen wir zu einer stark von E abweichenden Klemmenspannung. Dies macht den Wert 50) für die Resonanzspannung unsicher. Wir müssen somit noch eine weitere Annäherung suchen. Diese wird indessen nur eine bescheidene Korrektur an dem Werte 50) ergeben.

Wenn wir in allen Zweigen Widerstand und Induktivität berücksichtigen, lauten die Differentialgleichungen unserer Aufgabe:

$$E = i_1 R_1 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt \qquad 51)$$

$$E = i_1 R_1 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_1}{dt} + i_3 R_3 + \mathfrak{L}_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3}\int i_3\,dt \qquad 52)$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad 53)$$

Durch Beseitigung von i_1 erhalten wir:

$$E - R_1 i_3 - \mathfrak{L}_1 \frac{di_3}{dt} = R_1 i_2 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt \qquad 54)$$

$$E - R_1 i_2 - \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt} = (R_1 + R_3)\, i_3 + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3}\int i_3\,dt \qquad 55)$$

Wir setzen nun:

$$i_3 = J + i_z \qquad 56)$$

und bestimmen J aus der Differentialgleichung:

$$E = (R_1 + R_3)\, J + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C_3}\int J\,dt \qquad 57)$$

oder bei Vernachlässigung von $(R_1 + R_3)\, J$ aus der Differentialgleichung:

$$E = (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C_3}\int J\,dt$$

Wir fordern weiter vom Strome J, daß er die Bedingungen unseres Problemes erfüllen soll: Nämlich 1. daß J zu Anfang und zu Ende eines Ladespiels denselben Wert annehmen soll und daß 2. die Kondensatorspannung $\frac{1}{C_3}\int J\,dt$ am Anfang des Ladespiels einen Sprung von V_a auf V_e machen soll, wo $V_e = \frac{1}{m} V_a$;

$$V_a = E + E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \text{ ist.}$$

Der Vergleich mit der Differentialgleichung 6) und 9) lehrt, daß J im wesentlichen mit J_3 übereinstimmen muß. Der einzige Unterschied gegenüber der Gleichung 6) besteht darin, daß an Stelle der Induktivität $\mathfrak{L}_3$ die Summe $(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)$ getreten ist.

Für die Ladung des Hauptkondensators kommt daher nicht, wie die erste Annäherung ergab, die Kreisfrequenz $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{L}_3 C_3}}$, sondern die Kreisfrequenz:

$$\omega_{13} = \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) C_3}} \qquad 58)$$

in Betracht.

Auf die Kurvenform der Spannung am Hauptkondensator und auf die Kurvenform des Stromes i_3 oder J hat dies nur geringen Einfluß. Ja, wenn wir die Werte des Verhältnisses k (Ausdruck 25) (Frequenz des akustischen Tones, Frequenz des elektrischen Ladetones) auf die Kreisfrequenz ω_{13} beziehen, so gilt die Tabelle S. 201 ebenfalls für Anfangs- und Maximalwerte von J.

Wir hatten früher bei Vernachlässigung der Maschineninduktivität gefunden, daß die Schwankungen F(t) der Spannung des Hauptkondensators um den Wert E gleich der Spannung an der Drosselspule ist. Jetzt gilt dies nicht mehr. Nach Gleichung 57) ist nicht der Wert $-\mathfrak{L}_3 \frac{dJ}{dt}$, sondern vielmehr erst der Wert

$$-(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) \frac{dJ}{dt} = F(t) \qquad 58a)$$

Der Strom J ist, ebenso wie die der Strom J_3 bei praktischen Werten von k ein Gleichstrom mit kleinen, übergelagerten, spitz aneinander stoßenden Bogen (Bild 9).

Vom Strome i_z setzen wir folgendes voraus:

1. Er sei ein Wechselstrom. Seine Kreisfrequenz liege genau so hoch oder höher als die des akustischen Tones ω_a. Er sei klein gegenüber J. Seine Amplitude sei von der Größenordnung der Amplitude der im pulsierenden Gleichstrom J steckenden Wechselströme. Mit diesen Anforderungen an den Berichtigungsstrom i_z erfüllt der Gesamtstrom $i_3 = J + i_z$ zwar nicht genau, aber doch in guter Annäherung die Bedingung, daß er zu Anfang und Ende des Ladespiels gleich groß sein soll[1]).

2. Der Hauptkondensator wird geladen von dem Strome J und dem Zusatzstrome i_z. Da J groß gegen i_z ist, und da weiter J praktisch ein Gleichstrom, i_z dagegen ein Wechselstrom hoher Frequenz ist, wird die Spannung am Ende eines Ladespiels nur ganz wenig vom Strome i_z beeinflußt werden. In diesem Falle ist durch die Bestimmung von J bereits gewährleistet, daß die Spannung am Anfang des Ladespiels zwar nicht ganz genau, aber doch in vorzüglicher Annäherung von

$$V_a = E + E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \text{ auf } V_e = E - E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$$

springt.

3. Wir hatten vorhin gesehen, daß die induktive Spannung $-(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) \frac{dJ}{dt}$ übereinstimmt mit der Schwankung der Spannung des Hauptkondensators um E. Diese induktive Spannung rührt von den kleinen Wechselströmen in der J-Kurve her. Da i_z mit diesen Wechselströmen vergleichbar sein soll, so ist mit unseren Forderungen verträglich, daß die induktive Spannung $(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) \frac{di_z}{dt}$ mit E von der gleichen Größenordnung ist.

Die folgende Überlegung klärt uns vielleicht noch weiter über die Eigenschaften des Berichtigungsstromes i_z auf. Es werde an die Maschinenklemmen künstlich eine Wechselspannung hoher Frequenz und hohen Wertes gebracht. Da die Kreisfrequenz ω_3 des Schwingungskreises aus Drosselspule und Hauptkondensator sehr

---

[1]) Die zweite Stufe der zweiten Annäherung wird ergeben, daß i_z ein mehrwelliger Wechselstrom ist, dessen Grundwelle mit der Frequenz des akustischen Tones übereinstimmt. Alsdann ist die Forderung, daß der Strom i_z und daher auch der Strom i_3 am Anfang und Ende eines Ladespiels dieselben Werte annehmen soll, genau erfüllt.

tief liegt, so bedeutet der Hauptkondensator für diese aufgedrückten raschen Schwingungen einen Kurzschluß. Die Spannungsänderungen an ihm sind außerordentlich klein gegenüber der aufgedrückten Spannung. Die aufgedrückte Spannung wird praktisch ganz von der Drosselspule aufgenommen, die aber infolge ihrer großen Induktivität und der hohen Frequenz nur einen kleinen Strom durchläßt. Dagegen ist die Spannung an der Drosselspule selbst wiederum gleich der aufgedrückten hohen Spannung. Wir treffen also hier unsere Merkmale wieder: unwesentliche Änderung der Spannung am Hauptkondensator, geringe Änderung des Stromes J, aber nicht unbeträchtliche Größe der induktiven Spannung.

Unter Benutzung von 56) erhalten wir jetzt die drei Gleichungen:

$$E - R_1 J - \mathfrak{L}_1 \frac{dJ}{dt} - R_1 i_z - \mathfrak{L}_1 \frac{di_z}{dt} = R_1 i_2 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \tag{59}$$

$$E - R_1 i_2 - \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt} = (R_1 + R_3) J + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C_3}\int J dt + $$
$$+ (R_1 + R_3) i_z + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{di_z}{dt} + \frac{1}{C_3}\int i_z dt \tag{60}$$

$$E = (R_1 + R_3) J + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C_3}\int J dt \tag{61}$$

Im Gegensatz zu früher haben wir in der letzten Gleichung das Glied $(R_1 + R_3) J$ beibehalten. Da J praktisch ein Gleichstrom ist, bedeutet dies, daß die Spannung, die für den Hauptkondensator in Betracht kommt, nicht E sondern $\mathfrak{E} = E - J(R_1 + R_3)$ ist. Wir wollen aber in Zukunft, um uns nicht mit Schwierigkeiten analytischer Natur zu belasten, wieder $\mathfrak{E} = E$ setzen.

Aus 60) und 61) folgt:

$$- R_1 i_2 - \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt} = (R_1 + R_3) i_z + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{di_z}{dt} \tag{62}$$

Hier haben wir die Kondensatorspannung $\frac{1}{C_3}\int i_z dt$ gegen $(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{di_z}{dt}$ vernachlässigt, weil sie nach unseren Voraussetzungen über i_z sehr klein ist. Somit erhalten wir aus 62)

$$- \mathfrak{L}_1 \frac{di_z}{dt} = \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot \left\{(R_1 + R_3) i_z + R_1 i_2 + \mathfrak{L}_1 \frac{di_2}{dt}\right\} \tag{63}$$

Dies eingesetzt in die Gl. 59) liefert:

$$E - R_1 J - \mathfrak{L}_1 \frac{dJ}{dt} + i_z \frac{(\mathfrak{L}_1 R_3 - \mathfrak{L}_3 R_1)}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} = R_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} i_2$$
$$+ \mathfrak{L}_1 \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \tag{64}$$

E ist eine konstante Spannung; das gleiche gilt von der Spannung $J R_1$, da J praktisch ein Gleichstrom ist. Wir wollen diesen Ohmschen Spannungsabfall gegen E vernachlässigen. $i_z \cdot \frac{\mathfrak{L}_1 R_3 - \mathfrak{L}_3 R_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)}$ stellt ebenfalls einen Ohmschen Spannungsabfall dar. Er ist von der Größenordnung des Ohmschen Spannungsabfalls der in J steckenden kleinen Wechselströme, der bereits vernachlässigt wurde. Wir streichen somit auch ihn. Diese Vernachlässigung gilt streng, wenn $\mathfrak{L}_1 R_3 - \mathfrak{L}_3 R_1 = 0$, also wenn $\frac{\mathfrak{L}_3}{R_3} \cdot \frac{R_1}{\mathfrak{L}_1} = 1$ ist. Unsere Differentialgleichung 64) schrumpft somit zu folgender zusammen:

$$E - \mathfrak{L}_1 \frac{dJ}{dt} = R_1 \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} i_2 + \mathfrak{L}_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \tag{65}$$

In der Form stimmt sie mit Gl. 31) und 36) überein. Nur steht jetzt auf der rechten Seite nicht der Maschinenwiderstand R_1, sondern der kleinere Widerstand $R_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}$. Auch finden wir rechts nicht die Maschineninduktivität $\mathfrak{L}_1$, sondern die kleinere Induktivität $\mathfrak{L}_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}$ vor. Die Kapazität dagegen stimmt wieder mit C_2 überein. Auf der linken Seite steht wieder die konstante Spannung E. Außer ihr finden wir die mit der Spannung F(t) nah verwandte Wechselspannung $\mathfrak{L}_1 \frac{dJ}{dt} = g(t)$ vor. Nach unseren jetzigen Erfahrungen muß $-(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)\frac{dJ}{dt}$ mit F(t) (Gl. 58a) übereinstimmen. Die Spannung $-\mathfrak{L}_1 \frac{dJ}{dt} = g(t)$, setzt sich daher aus Einzelwellen von der Amplitude $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ zusammen.

Es ist daher

$$g(t) = -\mathfrak{L}_1 \frac{dJ}{dt} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sin n\,\omega_a t \qquad 66)$$

Unsere Differentialgleichung 65) beschreibt daher Spannungen und Ströme eines Stromkreises aus dem Widerstand $R = R_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}$, der Induktivität $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)}$ und der Kapazität C_2, auf dessen Klemmen die konstante Spannung E und die Wechselspannung g(t) (Ausdruck 66) einwirkt.

Uns interessiert im wesentlichen nur die Spannung an der Maschine und ihrem Kondensator. Wir können von ihr genau so wie früher sagen, daß sie aus einer Gleichspannung E besteht, über die sich eine mehrwellige Wechselspannung herüberlagert. Die n^{te} Oberwelle hat die Amplitude:

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n C_2 n \omega_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1^2 \alpha^2 + \left(\mathfrak{L}_1 \alpha n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}\right)^2}} \qquad 67)$$

Es ist somit:

$$V_2 = E + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \cdot \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot C_2 n \omega_a} \cdot \frac{\cos(n\,\omega_a t - \varphi_n)}{\sqrt{R_1^2 \alpha^2 + \left(\mathfrak{L}_1 \alpha n \omega_a - \frac{1}{C_2 n \omega_a}\right)^2}} \qquad 68)$$

$$\alpha = \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \qquad 69)$$

Wir haben jetzt wieder 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Der Kondensator C_2 ist so groß, daß die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{L}_1 \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot C_2}} \tag{70}$$

unterhalb ω_a liegt.

2. Die vorige Bedingung ist nicht erfüllt; die k^{te} Oberwelle ($k\omega_a$) möge mit der Eigenschwingung des Kreises aus der Kapazität C_2 und der Induktivität $\mathfrak{L}_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}$ in Resonanz treten können. Aber es sei ω_a so gewählt, daß die Resonanz nicht auftritt.

3. Die k^{te} Oberwelle trete in Resonanz. Es sei also

$$k^2 \omega_a^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot C_2} \tag{71}$$

In den Fällen 1. und 2. kommen wir in bezug auf die Kondensator- und Maschinenspannung zu denselben Schlüssen wie im Abschnitt 5. Im Falle der Resonanz liegt indessen, wie man sich leicht überzeugt, die Maschinenspannung nicht wie bei der ersten Stufe der zweiten Annäherung bei dem um E vermehrten Werte 48) sondern bei dem Werte:

$$V_{2k} = E + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{k^2 C_2 \omega_a \cdot R_1 \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}} \tag{72}$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung 71) so gilt auch der etwas einfachere Ausdruck:

$$V_{2k} = E + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1 \omega_a}{R_1} \tag{73}$$

Würde man in Gl. 64) das Glied $i_z \frac{(\mathfrak{L}_1 R_3 - \mathfrak{L}_3 R_1)}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}$ berücksichtigen, so würde man in dem obigen Ausdrucke an Stelle von R_1 den von R_1 in praktischen Fällen im allgemeinen nur wenig verschiedenen Wert: $R_1 \left\{ 1 + \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1^2}{\mathfrak{L}_3 (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \left[1 - \frac{\mathfrak{L}_3}{R_3} \cdot \frac{R_1}{\mathfrak{L}_1} \right] \right\}$ (vgl. auch S. 215) erhalten haben.

Auch die zweite Stufe der zweiten Annäherung führt auf die Werte der Resonanzspannung V_{2r}, die nicht unbeträchtlich die Maschinenspannung E übersteigen können. Auch jetzt ergibt sich wieder Unabhängigkeit der Resonanzspannung von der Ordnungszahl der in Resonanz tretenden Oberwelle und von der Größe der Maschinenkapazität. Die im Anschluß an die erste Stufe der zweiten Annäherung gezogenen Schlüsse bleiben daher qualitativ bestehen. Quantitativ ist insofern eine Änderung eingetreten, als der Bruch $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_3}$ im Ausdruck 50) durch den Bruch $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}$ im Ausdruck 71) ersetzt erscheint.

Wir werfen nochmals einen Blick auf dieses Kapitel zurück. Seine Bedeutung besteht in der Zuziehung eines Berichtigungsstromes i_z. Wir brauchten ihn nicht zu berechnen, sondern konnten ihn aus der Gleichung 59) wieder beseitigen. Wir könnten ihn jetzt aber nach Kenntnis der Kondensatorspannung V_2 nach der Gleichung 63) leicht berechnen (was aber nicht unbedingt notwendig ist). Bei der ersten Stufe der zweiten Näherung ergab sich ein Widerspruch darin, daß das Zustandekommen des Stromes J_3 die Gleichspannung E an der Maschine zur Voraussetzung hatte, im Falle der Resonanz sich indessen außer dieser Gleichspannung noch eine hohe zusätzliche Wechselspannung ergab. Bei der zweiten Stufe verlangt



zwar der Strom J ebenfalls eine konstante Maschinenspannung. Aber durch Einfügen des Berichtigungsstromes i_z wird der Möglichkeit Rechnung getragen, daß die Maschinenspannung eine hohe zusätzliche Wechselspannung enthalten kann. Ein Widerspruch tritt jetzt also bei Resonanz nicht mehr auf.

Die in Resonanz befindliche Oberwelle des Stromes i_z hat die Größe

$$i_{zr} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3)} \cdot E \, \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\mathfrak{L}_1}{R_1 k \cdot \mathfrak{L}_3} \sin k \omega_a t \qquad 74)$$

Wir sehen auch, daß unsere Annahmen über i_z zutreffen:

1. i_z ist ein Wechselstrom von der gleichen oder höheren Kreisfrequenz als die Ladekreisfrequenz ω_a.
2. Wenn keine Resonanz vorliegt, ist i_z klein.
3. Wenn Resonanz vorliegt, ist i_z klein, wenn eine hohe Oberwelle (k groß) in Resonanz tritt.
4. Wenn eine niedrige Welle in Resonanz tritt, ist der Strom i_z zwar nicht mehr klein, aber er hat am Anfang und Ende der Ladeperiode den gleichen Wert, so daß er die Bedingung: $i_3 = J + i_z$, müsse für die Zeitpunkte $t = 0$, $t = \tau$ gleich groß sein, nicht verletzt.

Wir haben somit jetzt eine in sich widerspruchslose Lösung erhalten.

7. Ein Maschinendurchschlag und Versuch seiner Erklärung. Wie bereits oben mitgeteilt, hatte ich Gelegenheit, eine Gleichstromhochspannungsmaschine in eine nach Bild 4 arbeitende Station einzubauen. Die Maschine besteht aus 2 getrennten Teilmaschinen; jede Teilmaschine hat 2 Kollektoren. Jedem Kollektor ist eine Spannung von 2500 Volt zu entnehmen. Bei Hintereinanderschaltung gibt die Maschine somit 10000 Volt. In ein und derselben Nut liegen jedesmal Wicklungen, die mit 2 verschiedenen Kollektoren verbunden sind (Bild 15). Die Isolation zwischen ihnen ist betriebsmäßig maximal mit 2500 Volt beansprucht. Bei der Prüfung in der Fabrik war sie einer Wechselspannung von 12000 Volt ausgesetzt worden. In der Fabrik hatte sie somit einer Maximalspannung von 17000 Volt widerstehen hönnen.

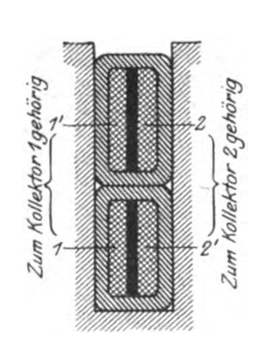


Bild. 15.
Nut der behandelten Gleichstrom - Hochspannungsmaschine.

Es war anfangs meine Absicht, einen Kondensator von rund 1/100 Mikrofarad, den man als betriebsmäßigen Schutz für die Maschine vorgesehen hatte, auch hier der Maschine parallel zu schalten. Ich sah aber schließlich von ihm ab, weil nach meinem physikalischen Gefühl durch ihn Resonanzüberspannungen hätten hervorgerufen werden können. Die Maschine schlug nach einem Betrieb von 10 Minuten durch. Da ich die Maschine gegen Wanderwellen bereits durch die vorgeschalteten Drosselspulen genügend geschützt ansah (vgl. Abschnitt 10), lag die Vermutung nahe, daß vielleicht die Eigenkapazität der Maschine die Resonanzüberspannung verschuldet haben könnte. Diese Ansicht hat durch die vorliegende Untersuchung insofern eine wesentliche Stütze erhalten, als sich gezeigt hat, daß die Resonanzüberspannung unabhängig von der der Maschine parallel geschalteten Kapazität ist. Es kann bereits eine kleine Eigenkapazität der Maschine zu hohen Resonanzspannungen Anlaß geben. Die Untersuchung in der Fabrik ergab, daß die Durchschlagsstelle in der Bild 15 schwarz hervorgehobenen Isolierschicht zwischen zwei benachbarten Kollektorwicklungen lag. Grad hier sind nach unserer Theorie die hohen Spannungen zu erwarten. Eine weitere Stütze erhielt meine Ansicht durch Nachrechnung der Resonanz-

spannung. Allerdings konnte die Formel 73) nicht unmittelbar auf den vorliegenden Fall angewendet werden. Dies lag an zwei Gründen. Erstens entspricht das Schaltungsschema der aus zwei Doppelkollektoren bestehenden Maschinen dem Bild 16 und nicht dem Bild 6. Die Maschinenkapazität liegt je einem Anker parallel und nicht der gesamten Maschineninduktivität, zu der auch noch die Induktivität der Wendepole gehört[1]). Außerdem haben wir es nicht mit „konzentrierter" Kapazität, sondern mit „verteilter" Kapazität zu tun. Wir werden indessen leicht die hierdurch notwendigen Erweiterungen unseres Ausdrucks für die Resonanzspannung herleiten können.

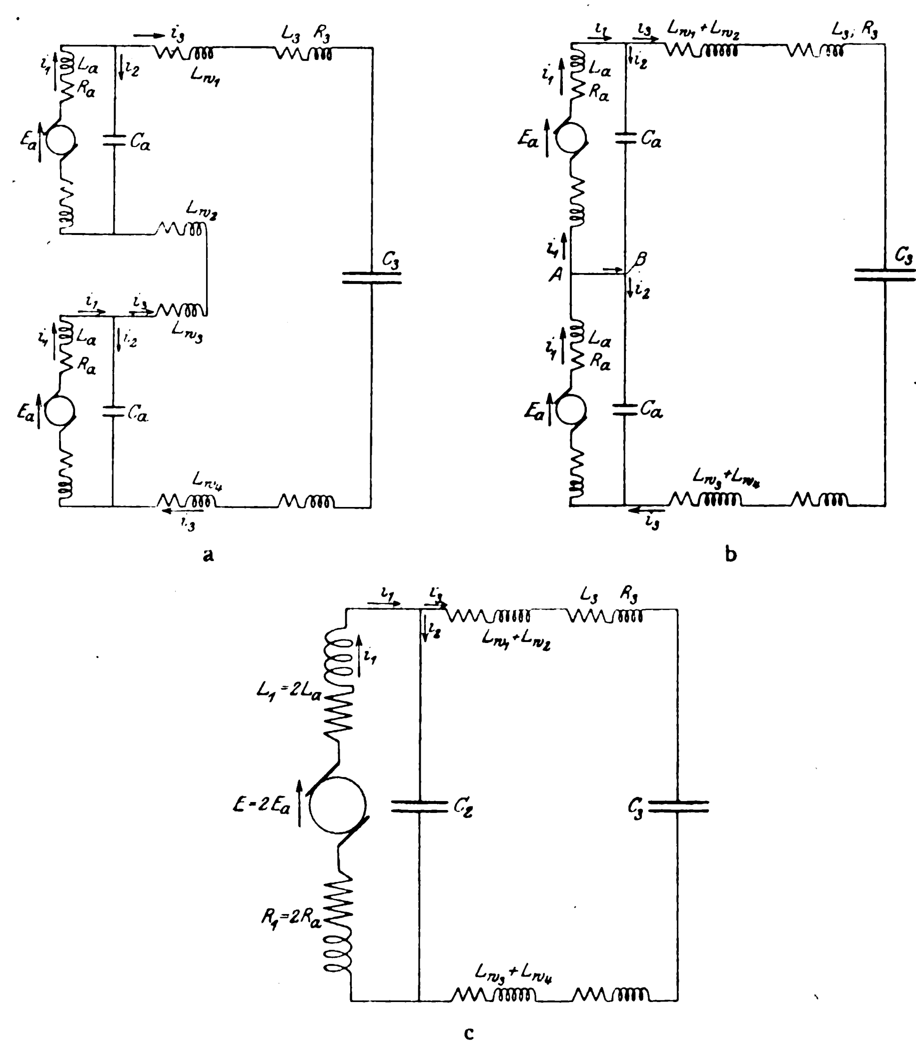


Bild 16. Zurückführung einer Vier-Kollektormaschine auf den bereits behandelten Fall.
a) Schaltung bei vier Kollektoren.
b) Schaltung nach Umlegung der Wendepolwicklung.
c) Schaltung nach einer Vereinfachung von 16b. Grundsätzlich dieselbe Schaltung wie Bild 6.

a) Erweiterung für den Fall einer 4-Kollektormaschine. Für beide Anker werden wir Widerstand, Induktivität und Kapazität, die wir vorläufig als „konzentriert" ansehen, als gleich voraussetzen. Wie ein Blick auf Bild 16 lehrt,

[1]) Die Kapazität der Wendepole ist sehr klein im Vergleich zu der des Ankers.

folgt aus der Symmetrie des elektrischen Gebildes, das von vornherein die Ströme in den Ankern gleichgesetzt werden können. Desgleichen die Ströme in den den Ankern parallel liegenden Kapazitäten. Dies ist bereits in der Bezeichnungsweise (Bild 16a) zum Ausdruck gekommen. Weiter lehrt der Augenschein, daß die Wendepole genau so wirken, wie eine Vergrößerung der vorgeschalteten Drosselspulen. Ihre Induktivität und ihr Widerstand soll daher in den Werten $\mathfrak{L}_3$ und R_3 enthalten sein[1]).

Infolgedessen kann das Schaltungsschema 16a durch das Schaltungsschema 16b ersetzt werden. In diesem ist die Brücke AB aus Symmetriegründen stromlos. Wir können diese Brücke daher auch weglassen und erhalten bei passender Zusammenfassung von induzierten Spannungen und Leitungskonstanten die Schaltung 16c. Letztere stimmt nun wieder mit der untersuchten Schaltung 6 überein. Man kann nun leicht den Ausdruck für die Resonanzspannung V_{2r} anschreiben, die sich für die Klemmen einer einzigen Doppelkollektormaschine (einen Kondensator C_a) (Bild 16a) ergibt.

[1]) Die Vorgänge in unserer Anordnung unterliegen folgenden Differentialgleichungen (vgl. Bild 16a)

$$E_a = R_a i_1 + \mathfrak{L}_a \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_a}\int i_2\,dt \qquad 75)$$

$$2E_a = 2R_a i_1 + 2\mathfrak{L}_a \frac{di_1}{dt} + R_3 i_3 + \mathfrak{L}_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3}\int i_3\,dt \qquad 76)$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad 77)$$

aus 76) und 77) folgt:

$$2E_a - 2R_a i_2 - 2\mathfrak{L}_a \frac{di_2}{dt} = (R_3 + 2R_a)\, i_3 + (\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3}\int i_3\,dt \qquad 78)$$

Wir setzen nun wie früher

$$i_3 = J + i_z$$

und lassen J die Differentialgleichung

$$2E_a = (R_3 + 2R_a)\, J + (\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C_3}\int J\,dt \qquad 79)$$

und die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Dann verbleiben zur Bestimmung von i_2 und i_z die beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$E_a - R_a J - R_a i_z - \mathfrak{L}_a \frac{dJ}{dt} - \mathfrak{L}_a \frac{di_z}{dt} = R_a i_2 + \mathfrak{L}_a \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_a}\int i_2\,dt \qquad 80)$$

$$-2R_a i_2 - 2\mathfrak{L}_a \frac{di_2}{dt} = (R_3 + 2R_a)\, i_z + (\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)\frac{di_z}{dt} \qquad 81)$$

Die Kondensatorspannung $\frac{1}{C_3}\int i_z\,dt$ haben wir wie früher gegen die induktive Spannung $(\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)\frac{di_z}{dt}$ vernachlässigt.

Aus 81) folgt:

$$\mathfrak{L}_a \frac{di_z}{dt} = -\frac{\mathfrak{L}_a}{(\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)}\left[2R_a i_2 + 2\mathfrak{L}_a \frac{di_2}{dt} + (R_3 + 2R_a)\, i_z\right] \qquad 82)$$

Wir setzen diesen Wert in 80) ein und erhalten:

$$E_a - \mathfrak{L}_a \frac{dJ}{dt} - R_a J - R_a i_z + \frac{\mathfrak{L}_a}{(\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)}\left[2R_a i_2 + 2\mathfrak{L}_a \frac{di_2}{dt} + (R_3 + 2R_a)\, i_z\right] = R_a i_2 + \mathfrak{L}_a \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_a}\int i_2\,dt \qquad 83)$$

$$E_a - \mathfrak{L}_a \frac{dJ}{dt} - R_a J - R_a i_z \left\{1 - \frac{(R_3 + 2R_a)\,\mathfrak{L}_a}{R_a(\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)}\right\} = R_a \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a}\, i_2 + \mathfrak{L}_a \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a} \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_a}\int i_2\,dt \qquad 84)$$

Wir vernachlässigen wie früher die Ohmschen Spannungsabfälle links und erhalten

$$E_a - \mathfrak{L}_a \frac{dJ}{dt} = R_a \frac{\mathfrak{L}_a}{\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a}\, i_2 + \mathfrak{L}_a \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{L}_3 + 2\mathfrak{L}_a)} \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_a}\int i_2\,dt \qquad 85)$$

Der Form nach stimmt die Gleichung 85) mit der Gleichung 65) überein.

Fußend auf dem aus Gleichung 65) folgenden Ausdruck 73) schreiben wir:

$$V_{2r} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\omega_a \mathfrak{L}_a}{R_a} \qquad 86^{1)})$$

$$E = 2 E_a$$

Unter L_a ist die Ankerinduktivität, unter R_a der Ankerwiderstand einer Doppelkollektormaschine verstanden. L die gesamte Induktivität

$$L = \mathfrak{L}_3 + 2\,\mathfrak{L}_a \qquad 87)$$

Die Resonanzkreisfrequenz ω_r kann aus der Beziehung

$$\omega_{2r} = \frac{1}{C_a \mathfrak{L}_a \frac{\mathfrak{L}_3}{L}} \qquad 88)$$

berechnet werden.

Einfluß der verteilten Kapazität. Das Schaltungsschema Bild 16 setzt eine konzentrierte Kapazität voraus. In Wirklichkeit liegt die Kapazität verteilt auf der Ankerwicklung. Welchen Einfluß hat dies auf unser Ergebnis 86?)

Wie schon erwähnt, bestand die Maschine aus zwei Maschinenhälften und jede Hälfte wieder aus einer Doppelkollektormaschine. Bild 15 zeigt die Nut einer Maschinenhälfte. Die Querschnitte 1 und 1′ gehören zu einem Kollektor, die Querschnitte 2 und 2′ zum anderen. Bei normal erregter Maschine beträgt die Spannung zwischen 1 und 1′, zwischen 2 und 2′ 2500 Volt. Aber auch zwischen den unmittelbar gegenüberliegenden Querschnitten 1 und 2′, 1′ und 2 beträgt die Spannung, bei der bei der Maschine angewandten Wickelart 2500 Volt. Die Wicklung beider Kollektoren gleicht daher, soweit Spannungsverteilung in Betracht kommt, einer zweilagigen Spule. Die Anfänge beider Lagen befinden sich an einem, die Enden beider Lagen am anderen Ende (Bild 17). Die insgesamt induzierte Spannung ist bei normaler Erregung $E_a = 5000$ Volt. Die Spannungsbeanspruchung der Isolierschicht zwischen beiden Wicklungen 2500 Volt.

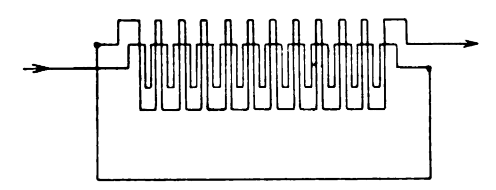


Bild 17. Schaltung der beiden Wicklungen eines Doppelkollektors.

Was sagt nun die übliche Gleichung für einen Thomsonschen Schwingungskreis

$$E \sin nt = R\,i + \mathfrak{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i\,dt$$

aus? Wir erweitern diese Gleichung durch Multiplizieren mit i dt:

$$E\,i \sin nt\,dt = R\,i^2\,dt + \mathfrak{L}\,i\,di + \frac{i\,dt}{C} \int i\,dt.$$

Links steht die im Zeitelement dt zugeführte Energie; rechts die Joulesche Wärme, die Änderung der magnetischen und die Änderung der elektrischen Energie

[1]) Bei Berücksichtigung der auf S. 211 in der Anmerkung zugefügten Korrektion hat man an Stelle von R_a zu schreiben:

$$R_a \left\{ 1 + \frac{R_3}{\mathfrak{L}_3} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{R_a} \cdot \frac{2\,\mathfrak{L}_a}{2\,\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_3} \left[1 - \frac{\mathfrak{L}_3}{R_3} \cdot \frac{R_a}{\mathfrak{L}_a} \right] \right\}$$

$\left(\frac{i\,dt}{C}\int i\,dt = V\,dQ = \right.$ Kondensatorspannung $\times$ Änderung der Ladung$\Big)$. Nun wissen wir, daß bei eingeschwungener Resonanz der Strom i in Phase mit der Spannung ist. In jedem Augenblick decken sich daher die Beträge der zugeführten und der durch Joulesche Wärme vernichtenden Energie. Gleichzeitig geht abwechselnd magnetische Energie in elektrische, oder elektrische in magnetische Energie über. Beim Thomsonschen Schwingungskreis befindet sich die elektrische Energie in dem Kondensator. In unserem Falle der verteilten Kapazität muß sie sich in der Isolierschicht zwischen den Ankerwicklungen befinden. D. h. nichts anderes, als daß in unserem Falle die Spannung zwischen den beiden Kollektorwicklungen so hoch steigen muß, daß die elektrische Energie im Zwischenraume einen Betrag erhält, der der magnetischen Energie gleich ist. Daraus ist zu entnehmen, daß die Resonanzspannung V_{2r} Gleichung 86) unmittelbar die Spannungsbeanspruchung der Isolierschicht angeben muß.

Indessen bedürfen unsere Überlegungen noch einer Erweiterung. Eine überall gleiche Spannung zwischen beiden Ankerwicklungen ist nur möglich, wenn die Spannung gegen Erde gradlinig abfällt oder ansteigt (Bild 18a). In Wirklichkeit ist aber zu erwarten, daß sie sinusförmig sinkt oder wächst (Bild 18b). Alsdann ist die

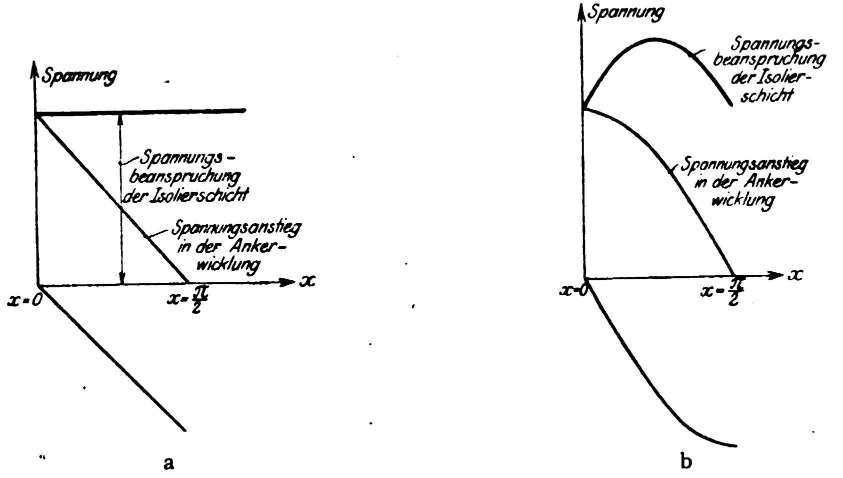


Bild 18. Spannung gegen Erde und Spannung zwischen zwei Kollektorwicklungen.
a) Gradliniger,
b) sinusförmiger Spannungsabfall.

Spannungsbeanspruchung der Isolierung beider Wicklungen ungleichmäßig. Uns kommt es auf die höchste Spannungsbeanspruchung an, während aus Formel 86) nur die mittlere Spannungsbeanspruchung folgt, die, wie eben erläutert, sich ergeben würde, wenn die elektrische Energie sich gleichmäßig über die Maschinenwicklung verteilen würde. Es sei nun die Spannung in einer Ankerwicklung durch den Ausdruck gegeben:

$$e = E_0 \cos x\,;\;\; x = 0 \text{ bis } x = \frac{\pi}{2}.$$

Die Spannungsbeanspruchung der Isolierung ist dann bestimmt durch den Wert (vergl. Bild 18b)

$$E = \sqrt{2}\,E_0 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);\;\; x = 0 \text{ bis } x = \frac{\pi}{2}.$$

Der höchste Wert ist

$$E_{max} = \sqrt{2}\,E_0 \qquad 90)$$

Die gesamte elektrische Energie erhalten wir bis auf einen Proportionalitätsfaktor, dessen Wert im vorliegenden Falle ohne Belang ist, durch das Integral

$$W_e = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} E^2 dx = 2 E_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = E_0^2 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Für die mittlere Spannung E_{mittel} besteht daher die Forderung:

$$E^2_{mittel} \cdot \frac{\pi}{2} = E_0^2 \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$E_{mittel} = E_0 \cdot 1{,}27,$$

oder

$$E_{mittel} = E_{max} \frac{1}{1{,}11}; \qquad 91)$$

$$E_{max} = 1{,}11 \cdot E_{mittel}$$

Gleichung 86) gibt die mittlere Spannung E_{mittel}. Die höchste Spannung, mit der das Isoliermittel beansprucht wird, ist somit gleich

$$E_{max} = 1{,}11 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \omega_a \frac{\mathfrak{L}_a}{R_a} \qquad 92)$$

Noch ein Umstand verdient Erwähnung. Da sich die Elektrizität auf der Wicklung selbst niederschlägt, so wird die Ankerwicklung nicht an jeder Stelle vom gleichen Strome durchflossen. Man könnte daher versucht sein, in Formel 92) einen Bruchteil von R_a einzuführen. Das würde indessen aus folgendem Grunde nicht richtig sein. Auch die magnetische Energie ist infolge des Niederschlags der Elektrizität auf der Ankerwicklung kleiner, als wenn, wie wir angenommen haben, der Strom die ganze Wicklung gleichmäßig durchsetzen würde. Da in Formel 92) das Verhältnis $\frac{\mathfrak{L}_a}{R_a}$ steht, so wird dieses auch bei Berücksichtigung der Wirkung der verteilten Kapazität keine Änderung erfahren.

Zahlenbeispiel. Wir können jetzt der Größenordnung nach die Spannung berechnen, mit der unsere Maschine beansprucht wurde. Bei einer einzigen Kollektorwicklung war eine Induktivität von rund 3 Henry gemessen worden. Da die Streuung zwischen den beiden Kollektorwicklungen sehr klein ist (vergl. Bild 15), so kommt für die Induktivität einer Doppelkollektorwicklung der Wert von $3 \times 4 = 12$ Henry in Betracht. Die Ankerwicklung enthält sehr wenig Eisen (Ankereisenlänge = 10 cm). (Die Maschine hat ungewöhnlich lange Wickelköpfe.) Die Wendepole und vorgeschalteten Drosselspulen enthalten dagegen viel Eisen. Bei der Frequenz 50 betrug ihre Induktivität rund 54 Henry. Da für den Resonanzfall nur Frequenzen höher als 250 in Betracht kommen, so ist ihre Induktivität infolge der Wirbelstromrückwirkung kleiner, etwa zu 36 Henry anzusetzen. Mit diesem Werte ist

$$\frac{\mathfrak{L}_a}{L} = \frac{\mathfrak{L}_a}{\mathfrak{L}_z + 2\mathfrak{L}_a} = \frac{12}{36 + 24} = \frac{1}{5}.$$

Wenn wir den höchsten Wert $\mathfrak{L}_3 = 54$ Henry eingesetzt hätten, so hätten wir

$$\frac{\mathfrak{L}_a}{L} = \frac{12}{78} = \frac{1}{6{,}5}$$

erhalten.

Die Brüche $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6{,}5}$ weichen nicht sehr voneinander ab. Man sieht, daß ein Fehler in der Schätzung des Wertes der Eiseninduktivität von geringem Einfluß ist.

Der Ankerwiderstand beträgt bei Gleichstrom 600 Ohm. Die Ankerwicklung besteht aus sehr dünnem Draht (Durchmesser 0,35 mm). Sie enthält sehr wenig Eisen. Bei Frequenzen zwischen 250 und 500 Perioden in der Sekunde machen sich Stromverdrängung und Wirbelströme daher noch nicht wesentlich bemerkbar. Wir werden daher mit dem Werte $R_a = 600$ Ohm rechnen.

Die Maschine war bei der Inbetriebsetzung nicht voll erregt worden; ihre Spannung betrug nur 8000 Volt. Wir werden daher mit den Werten $E_a = 4000$; $E = 8000$ Volt rechnen.

Der akustische Ton machte etwa 250—300 Schwingungen in der Sekunde. Wir wählen die obere Grenze und setzen somit

$$\omega_a = 300 \cdot 2\pi.$$

Die Station arbeitete nach der Schaltung 4. Die Verhältniszahl m ist somit gleich 3. Die Kreisfrequenz ω_r der Resonanz liegt bei dem Werte $C_a = {}^2/_{100}$ Mikrofarad bei

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_a \mathfrak{L}_a \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{L}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{100} \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot \frac{36}{60}}} = 2600 \text{ Sek}^{-1}.$$

Hierzu gehört eine Frequenz von

$$\nu_r = 420.$$

Da der Wert der Kapazität C_a unsicher ist und nur der Größenordnung nach richtig sein dürfte, so kann man sagen, daß bereits die Grundwelle oder eine der ersten Oberwellen in Resonanz treten konnte.

Die Resonanzspannung betrug

$$V_{2r} = E_{max} = 1{,}11 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \cdot 8000 \frac{1}{2} \cdot \frac{300 \cdot 2\pi \cdot 12}{600} = 21\,3000 \text{ Volt}$$ [1]).

Durch die induzierte Gleichspannung von 8000 V liegt bereits eine Spannungsbeanspruchung von 2000 V vor. Die Isolierschicht zwischen den beiden Ankerwicklungen konnte daher mit 23 300 V beansprucht werden[2]).

[1]) Will man die auf S. 215 in der Anmerkung gegebene Korrektur berücksichtigen, so muß man den Widerstand R_3 kennen. Die Wendepole hatten einen Gleichstromwiderstand von 52 Ohm. Von gleicher Größenordnung dürfte der Gleichstromwiderstand der vorgeschalteten Drosselspulen sein. Selbst wenn man annehmen wollte, daß infolge von Hysterese und Wirbelströmen für R_3 der Widerstand von 2000 Ohm einzusetzen sei, weicht der Faktor

$$1 + \frac{R_3}{\mathfrak{L}_3} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{R_a} \cdot \frac{2\mathfrak{L}_3}{2\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_3}\left(1 - \frac{\mathfrak{L}_3}{R_3} \cdot \frac{R_a}{\mathfrak{L}_a}\right) = 1 + \frac{2000}{36} \cdot \frac{12}{600} \cdot \frac{24}{60} \cdot \left(1 - \frac{36}{2000} \cdot \frac{600}{12}\right)$$

nur 4,5% von der Einheit ab. Ich vernachlässige diese Korrektur, da nach den Angaben der folgenden Anmerkung der oben berechrete Wert von 21 300 V eher zu klein als zu groß sein dürfte.

[2]) Die wirkliche Spannung dürfte unter Zugrundelegung der obigen Zahlenwerte noch höher gewesen sein. Ein Kreis aus konzentrierter Induktivität mit hintereinander geschalteter „konzentrierter" Kapazität hat nur eine einzige Eigenschwingung, die man nach der **Thomson**schen Formel zu berechnen hat. Ein Gebilde aus verteilter Kapazität und verteilter Induktivität kann dagegen wie eine Saite eine Reihe von Schwingungen ausführen. Die Frequenzen brauchen zwar nicht „harmonisch" zu sein. Sie hängen nicht nur von den Werten der Induktivität und Kapazität der Längeneinheit, sondern auch noch von den Grenzbedingungen ab. Gewöhnlich liegen sie aber ganz nahe bei dem ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung. Tritt daher die Grundfrequenz der Maschine mit der p^{ten} Oberwelle der Spannung $\mathfrak{L}_a \frac{dJ}{dt}$ in Resonanz, so muß es nahezu die 3. und 5. Oberfrequenz mit der $3p^{ten}$ und $5p^{ten}$ Oberwelle ebenfalls tun. Wir sahen, daß jede Oberwelle eine beträchtliche Resonanzspannung hervorrufen kann. Es ist daher zu erwarten, daß die genaue Berücksichtigung der Kapazität und Oberwellen zu sehr hohen Spannungen führt. Ich gehe hierauf nicht ein, da bereits die Resonanzgrundwelle eine Spannungsgefahr für die Maschine nachgewiesen ist. Die Durchführung des hier skizzierten Problems macht keine wesentliche mathematische Schwierigkeiten und hat auf Grund der bekannten Kabelgleichungen zu geschehen.



Die Spannung ist indessen nur als eine rohe Schätzung aufzufassen. Sie hängt hauptsächlich von dem für den Ankerwiderstand R_a eingesetzten Werte ab. In untergeordnetem Maße wird sie in praktischen Fällen im allgemeinen von dem Werte R_3 des Widerstandes der Drosselspule beeinflußt. Das für diesen hinzutretende Korrektionsglied (Anm. S. 215) hatten wir bisher vernachlässigt. Es kann aber, namentlich dann, wenn R_3 noch sehr viel größer als 2000 Ohm sein sollte (was allerdings nicht zu vermuten ist) beträchtliche Werte annehmen.

Bei dieser Unsicherheit wäre es wünschenswert gewesen, daß noch Versuche über die Höhe des Wechselstromwiderstandes des Maschinenankers, der Wendepole und der Drosselspule angestellt worden wären. Doch ergab sich für mich hierfür keine Gelegenheit.

8. Diskussion des Wertes der Resonanzspannung. Wir prüfen die Abhängigkeit der Resonanzspannung von Konstruktions- und Betriebsdaten.

Man liest der Formel 73) und 92) unmittelbar ab: Die Resonanzspannung fällt um so kleiner aus, je größer die Induktivität der Drosselspule im Vergleich zur Maschineninduktivität ist, je kleiner m ist und je niedriger die Kreisfrequenz des akustischen Tones liegt. Bei den Schaltungen 1 und 3 ($m = 0$) ist die Resonanzspannung doppelt so groß als bei der Schaltung 4 ($m = 3$). Jetzt erklärt sich auch, weshalb Marconi seinen Maschinen in den transatlantischen Stationen Clifden und Glacebay eine Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie parallel schaltet. Die die Resonanzspannungen hervorrufenden Stromschwankungen von J gehen bei der Schaltung 3 nicht durch die Maschine, sondern durch die Hochspannungsbatterie, die diesen Schwankungen so gut wie keinen Widerstand entgegensetzt. Die Maschinen sind durch die Batterie vor Überspannungen geschützt. Allerdings weiß jeder, der mit Hochspannungs-Akkumulatorenbatterien zu tun gehabt hat, daß ihre gute Isolierung große Schwierigkeiten macht. Da dürfte es nicht unwichtig sein, daß unsere Theorie für den Spannungsschutz noch andere Wege zeigt.

9. Schutz gegen Resonanzspannungen. 1. Vorschlag. Nach unseren Ausführungen unter 7 sind die Resonanzspannungen des Gleichstromankers zu fürchten. Die (Resonanz-) Kreisfrequenz ω_r hatten wir zur

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_a \mathfrak{L}_a \frac{\mathfrak{L}_3}{L}}}$$

berechnet. Soll der Gleichstromanker gegen Überspannungen geschützt werden, so kann dies dadurch erreicht werden, daß dem Anker eine Schutzkapazität C_r parallel geschaltet wird, die die Eigenfrequenz ω_ν weit unter die Frequenz des akustischen Tones herunterdrückt. In diesem Falle hat in Anlehnung an die Formel 86) die n^{te} Oberwelle der Spannung am Schutzkondensator und daher auch der Spannung am Anker die Amplitude

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{C_\nu n \omega_a} \cdot \frac{1}{\mathfrak{L}_a \frac{\mathfrak{L}_3}{L} \cdot n \omega_a} \qquad 93)$$

Es ist ausreichend, wenn wir

$$\omega_r^2 = \frac{1}{4} \omega_a^2 \qquad 94)$$

wählen. Die Schutzkapazität C_r muß in diesem Falle

$$C_r = \frac{4}{\mathfrak{L}_a \cdot \frac{\mathfrak{L}_3}{L} \cdot \omega_a^2} \cdot 10^6 \text{ Mikrofarad} \qquad 95)$$

betragen.

Diese Forderung führt, wenn der tiefste akustische Ton der Station 250 Schwingungen in der Sekunde macht, für unsere Maschine (vergl. Abschnitt 7) zu einem Kondensator von

$$C_r = \frac{4}{12 \cdot \frac{36}{60}} \cdot \frac{10^6}{250^2 \cdot 2\pi^2} = {}^2/_{10} \text{ Mikrofarad.}$$

Mit der Beziehung

$$\omega_r^2 = \frac{2}{C_\nu \cdot \mathfrak{L}_a \frac{\mathfrak{L}_3}{L}} \tag{96}$$

kann man für die Amplitude der n^{ten} Spannungsoberwelle auch schreiben:

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n_3} \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}. \tag{97}$$

Mit der Forderung 94) erhält man weiter:

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n_3} \cdot \frac{1}{4} \tag{98}$$

Bei einem Gleichstromanker, der durch einen nach Formel 95) bemessenen Schutzkondensator geschützt ist, übertrifft die maximale Spannung die mittlere Spannung E_a um rund

$$V_{21} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \tag{99}$$

Bei unserer Maschine ist dies ein Betrag von

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{E}{2} \sim \frac{E}{60} \text{ Volt.}$$

In diesem Falle ist jede Spannungsgefahr beseitigt.

2. Vorschlag. Schon bei unserer Maschine, der eine beträchtliche Ankerinduktivität zukommt, fällt die Schutzkapazität C_ν groß aus. Wenn die Ankerinduktivität klein ist, dann kann die Forderung 95) so große Kondensatoren ergeben, daß ihr Einbau ausgeschlossen ist. Alsdann hat man folgenden Weg einzuschlagen: Man schaltet vor den Anker zunächst eine weitere Induktivität. Diese kann in der Induktivität der Wendepole oder in der Induktivität eines Teiles der Drosselspulen bestehen (Bild 19). Erst jetzt schaltet man einen Schutzkondensator parallel. Wir bezeichnen die Induktivität des Ankers mit $\mathfrak{L}_a$, die Induktivität der Wendepole und des abgetrennten Teiles der Drosselspule mit $\mathfrak{L}_\nu$, die Induktivität des Restes der Drosselspule mit $\mathfrak{L}_3$ und mit L die gesamte Induktivität. An die Schutzkapazität C_r stellen wir jetzt die Forderung, daß die Kreisfrequenz

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_r \cdot (\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_\nu) \frac{\mathfrak{L}_3}{L}}}, \tag{100}$$

wieder tiefer als die Kreisfrequenz ω_a liegen soll. Es sei wieder vorgeschrieben

$$\omega_r^2 = \frac{1}{4} \omega_a^2 \tag{101}$$

$$C_r = \frac{4 \cdot 10^6}{(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_\nu) \frac{\mathfrak{L}_3}{L} \omega_a^2} \text{ Mikrofarad.} \tag{102}$$

Diese Forderungen können immer mit Kondensatoren erfüllt werden, die kleiner sind als der Kondensator C_3.

Jetzt läßt sich zwar eine Resonanz im Ankerkreise nicht vermeiden. Aber der Schutzkondensator C_r soll dafür sorgen, daß die Resonanzspannung klein bleibt.

Wie groß sind die Spannungen, die wir jetzt an dem Ankerkondensator (gestrichelt gezeichnet) zu erwarten haben?

Wir berechnen sie in der ersten Annäherung folgendermaßen:

Die Ankerkapazität sei sehr klein (Null). Dann liegt die Schaltung Bild 6 vor. Es besteht die Wechselspannung am Schutzkondensator C_r aus Wellen, deren Amplitude durch den Wert:

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \frac{(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_v)}{L} E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n_3} \frac{\omega_v^2}{\omega_a^2} \qquad 103)$$

gegeben ist.

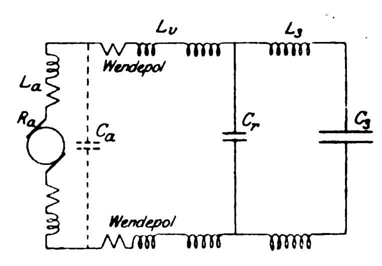


Bild 19. Schutz der Maschine durch Einbus eines Kondensators C_a oder C_r. Letzterer unter Vorschaltung geeigneter Induktivitäten.

Nach den Differentialgleichungen 51), 54) und 60) ist die im Anker und der ihm vorgeschalteten Induktivität induzierte Spannung

$$-(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_v) \frac{di_1}{dt} = -(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_v) \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} = -(\mathfrak{L}_a + \mathfrak{L}_v) \frac{d(i_2 + J + i_z)}{dt}.$$

Bis auf die kleine Spannung $R_1 i_2$ ist dies nichts anderes als die Kondensatorspannung $\frac{1}{C_r}\int i_2 dt$, also nichts anderes als die Spannung am Schutzkondensator $C_r = C_2$. Diese wiederum ist uns durch den Ausdruck 103) bekannt. In der Ankerwicklung wird daher eine Wechselspannung induziert, für deren n^{te} Oberwelle der Amplitudenwert:

$$V'_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n_3} \frac{\omega_v^2}{\omega_a^2} \qquad 104)$$

beträgt.

Ohne Schutzkondensator würde die im Anker induzierte Spannung die Größe

$$V_{2n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{L}_a}{L} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n} \qquad 105)$$

haben.

Durch Hinzufügen des Schutzkondensators wird somit die im Anker induzierte Spannung auf den $\frac{1}{n^2} \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}$-fachen Betrag gebracht.

$$\frac{V'_{2n}}{V_{2n}} = \frac{1}{n^2} \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2} \qquad 105a)$$

Wenn der Anker nur eine merkliche Kapazität hat, kann wieder Resonanz auftreten. Die jetzt auftretenden Resonanzspannungen können aber auch nur das

$$\frac{1}{n^2}\frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}\text{-fache} \qquad 106)$$

der Resonanzspannungen der ungeschützten Maschine betragen.

Wenn Gefahr vorhanden ist, daß bei der ungeschützten Maschine die Grundwelle ($n = 1$) oder die erste Oberwelle ($n = 2$) in Resonanz tritt, wird man die Maschine noch nach dem Vorschlage 1 schützen können, indem man dem Anker unmittelbar eine Schutzkapazität parallel schaltet. Man erhält alsdann Kondensatoren, deren Kapazität höchstens 16 mal so groß ist als die Maschinenkapazität. Unser Vorschlag 2 ist daher erst angebracht, wenn die zweite oder eine höhere Oberwelle ($n \geqq 3$) bei der ungeschützten Maschine Resonanz verursachen würde. In diesem Falle sind bei der nach dem Vorschlage 2 geschützten Maschine (Forderungen 101) und 102) die auftretenden Resonanzspannungen nach den Formeln 105) und 106) höchstens $\frac{1}{36}$ der Resonanzspannungen der ungeschützten Maschine.

3. Ein dritter Vorschlag besteht darin, die Induktivität der Drosselspule $\mathfrak{L}_3$ groß gegen die Ankerinduktivität zu wählen.

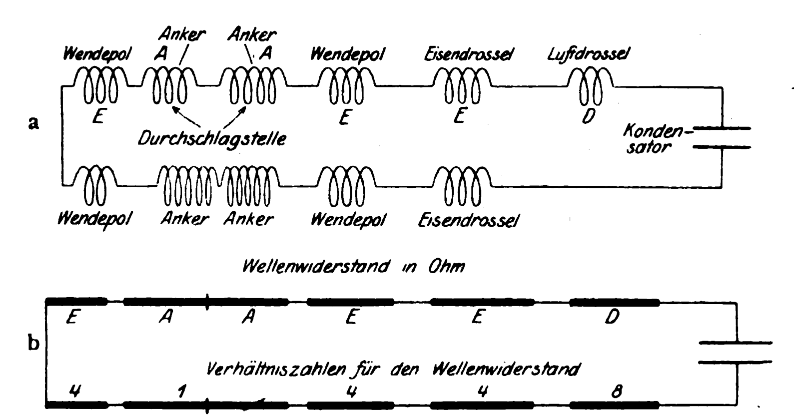


Bild. 20. Wicklung und Wellenwiderstände. Die Durchlagstelle ist eingetragen.

10. Wanderwellen. Bisher stützten sich unsere Betrachtungen lediglich auf die in Bild 5a gezeichnete Spannungskurve. Wir erinnern uns daran, daß sie nur einen Teil der wirklichen Spannung (Bild 2) ausmacht, und daß bisher die Spannungsschwankungen während des Entladevorgangs (Bild 5b) nicht berücksichtigt wurden. Wir haben dies jetzt durch die Behandlung der folgenden Aufgabe nachzuholen:

An einem Kondensator, dem durch irgend welche künstliche Mittel die Spannungsschwankung (Bild 5b) aufgezwungen wird, ist eine Leitung aus Drossel- und Maschinenspulen und Verbindungsleitungen angeschlossen. Welche Spannungsbeanspruchung erleiden die angeschlossenen Spulen?

In Bild 20a habe ich die mit dem Kondensator verbundene Leitung schematisch herausgezeichnet. Für Frequenzen von der Höhe von 100000 Perioden in der Sekunde wirkt die Leitung ähnlich wie ein Kabel. Den Verschiedenheiten in der Induktivität und Kapazität der einzelnen Leitungsteile müssen wir dadurch Rechnung tragen, daß wir das Ersatzkabel (Bild 20b) aus verschiedenen Stücken zusammensetzen, denen wir verschiedene Werte des Wellenwiderstandes beizulegen haben[1]).

[1]) Man beachte, daß die Arbeit aus dem Jahre 1915 stammt. Eine derartige Rechnung ist nach dem heutigen Stande unserer Kenntnis von Wanderwellen als recht grobe Annäherung zu bezeichnen; ich veröffentliche sie weil, sie ein Bild von den Schwierigkeiten gibt, mit denen man zu kämpfen hat, wenn man das Verhalten von Wanderwellen in Spulen berechnen will. Auch heute ist eine befriedigende Lösung der angeschnittenen Frage noch nicht möglich.

Der Wellenwiderstand W einer Doppelleitung ist gegeben durch das Verhältnis

$$W = \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}},$$

wo $\mathfrak{L}$ die Induktivität, $\mathfrak{C}$ die Kapazität, beide auf die Längeneinheit bezogen, bedeuten. Welche Werte bei einer Drosselspule, die als einfaches Kabel behandelt werden soll, für Induktivität und Kapazität in obigem Ausdrucke einzusetzen sind, kann heute noch nicht mit befriedigender Sicherheit angegeben werden. Man würde hierüber unterrichtet sein, wenn man über den Durchzug von Wanderwellen durch Drosselspulen genau unterrichtet wäre. Das ist aber nicht der Fall. Sicherlich muß auch die Behandlung der Drosselspule als einfaches Kabel nur als ein Notbehelf angesehen werden, mit dem man sich begnügen muß, da tiefergehende Untersuchungen nicht vorliegen. Bei dieser Unsicherheit werden wir zur Berechnung des Wellenwiderstandes die Werte von L und C für die ganze Spule einsetzen. Wir machen dabei stillschweigend die Annahme, daß $\mathfrak{L} = \frac{L}{l}$; $\mathfrak{C} = \frac{C}{l}$ gesetzt werden kann, wo l die Länge des Drahtes der Spule bedeutet. Beim Anker hatten wir nun eine Induktivität von 12 Henry, eine Kapazität von ungefähr $^{2}/_{100}$ Mikrofarad gefunden. Mit diesen Werten kommen wir zu einem Wellenwiderstande des Ankers von[1])

$$W_a = \sqrt{\frac{12}{2} \cdot 10^8} = \sim 2{,}5 \cdot 10^4 \text{ Ohm}.$$

Die Luftdrossel D bestand aus 4 Hauptspulen, jede Hauptspule aus 2 Einzelspulen und jede Einzelspule aus 23 Lagen zu je 6 Windungen. Der mittlere Durchmesser einer Windung betrug 31,6 cm, die Gesamtdrahtlänge etwa 1 km, die Induktivität $^{1}/_{2}$ Henry. Die Kapazität der Spule war nicht bekannt. Wir müssen sie schätzen.

Die Kapazität von Spulen ist selten gemessen worden. Eine wertvolle, systematische experimentelle Untersuchung findet sich bei Rietz: „Über die Kapazität von Spulen", Annalen der Physik, Bd. 41, 1913, S. 543. Herr Rietz findet folgendes: Die einlagige Spule hat eine sehr kleine Kapazität. Die Kapazität einer zweilagigen Spule kann die Kapazität der einlagigen mehr als 100 mal übertreffen. Wächst die Lagenzahl höher als 2, so nimmt die Kapazität wieder stark ab. Herr Rietz ist nur bis zu 4 bis 5 Lagen gegangen und fand in einem Falle einen Rückgang um 20% im anderen Falle von 30%. Bei 23 Lagen muß der Rückgang der Kapazität entsprechend größer sein. Weiter kommt hinzu, daß Herr Rietz seine Spulen so wickelte, daß erst die gesamte innere Lage, dann darüber die zweite Lage usw. gewickelt wurde. Bei der Luftdrossel D ist dagegen erst die erste Teilspule, dann die zweite usw. gewickelt worden. Infolgedessen muß die Luftdrossel D eine viel kleinere Kapazität haben, als entsprechende Spulen bei Rietz.

Nun entspricht die Ankerwicklung praktisch der zweilagigen Spule (Bild 15 und 16), die Luftdrossel einer auf möglichst kleine Kapazität gewickelten viellagigen Spule. Die Kapazität dieses Gebildes schätze ich etwa 64 mal kleiner als die der Ankerwicklung (also rund 300 cm)[2]).

---

[1]) Vgl. hierzu auch S. 54 und den Schluß dieses Abschnittes.

[2]) Die sorgfältigen Messungen von E. Giebe machen es wahrscheinlich, daß der Wert der Eigenkapazität der Spule noch viel kleiner ist. Nach diesen Messungen müßte man die Eigenkapazität zu etwa 100 cm schätzen (vgl. E. Giebe, Präzisionsmessungen an Selbstinduktionsnormalien, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1911, S. 47. Hiernach müßte man noch höhere Werte des Wellenwiderstandes der Drosselspule einsetzen und noch niedrigere Werte der Spannungsbeanspruchung der Ankerwicklung durch Wanderwellen erhalten.

Für die Drosselspule D beträgt daher der Wellenwiderstand das Achtfache des Wellenwiderstandes der Ankerwicklung

$$W_d = 8\,W_a = \sim 20 \cdot 10^4 \text{ Ohm}^{1)}. \qquad 107)$$

Für den Wellenwiderstand der Eisendrosselspule setze ich

$$W_e = 4\,W_a \sim 10 \cdot 10^4 \text{ Ohm}^{1)} \qquad 108)$$

und für den Wellenwiderstand der Verbindungsstücke

$$W_v = 500 \text{ Ohm}. \qquad 109)$$

Die Länge der vom Kondensator ausgehenden Welle beträgt einige Kilometer. Die Verbindungsstücke dagegen sind nur wenige Meter lang. Wie mir besondere Rechnungen gezeigt haben, durchsetzt in diesem Falle die Welle die Verbindungsstücke ohne merklichen Verlust durch Reflektion[2]). Wir werden daher die Verbindungsstücke gänzlich vernachlässigen. In die Luftdrossel D zieht daher eine gedämpfte Welle von der maximalen Amplitude (vgl. Bild 5b)

$$A_d = 2\,E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \qquad 110)$$

ein. Bei ihrer Wanderung erleidet die Spannungswelle eine erste Schwächung dadurch, daß der Wellenwiderstand der Eisendrossel nur halb so groß ist als der der Luftdrossel. Die Amplitude sinkt in der Eisendrossel auf den Wert

$$A_b = 2 \cdot E \cdot \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{2}{3} \qquad 111)$$

herab. Würde man die Luftdrossel als eine reine Induktivität ansehen, so würde, wie ich durch besondere Rechnungen gefunden habe, ungefähr eine halb so große Wellenamplitude in die Eisendrossel eintreten. Der hohe Wellenwiderstand der Luftdrossel ist somit immer noch niedrig genug, um die durchlassende Wirkung der Kapazität der Luftdrossel zum Ausdruck zu bringen[3]).

Beim Eintritt in den Anker sinkt die Spannung infolge des sinkenden Wellenwiderstandes weiter, und zwar auf die Amplitude

$$A_a = 2\,E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15} \cdot E \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}. \qquad 112)$$

Wir müssen uns nun die Frage vorlegen, wieviel Zeit gebraucht die Welle, um eine Kollektorwicklung zu durcheilen? Bei einer Doppelleitung von der Länge l würde hierzu die Zeit

$$t = \sqrt{l\mathfrak{L} \cdot l\mathfrak{C}} \text{ Sekunden}$$

gehören ($\mathfrak{L}$ Induktivität, $\mathfrak{C}$ Kapazität für die Längeneinheit).

Setzen wir, da es jetzt nur auf eine Schätzung der Größenordnung der Laufzeit ankommt, für eine einzige Kollektorwicklung

$$l\mathfrak{L} = L = 3 \text{ Henry}; \; l\mathfrak{C} = C = {}^{2}/_{100} \text{ Mikrofarad},$$

[1]) Vgl. den Schluß dieses Abschnittes.

[2]) Rogowski, Eine Erweiterung des Reflexionsgesetzes für Wanderwellen, Archiv für Elektrotechnik, IV, S. 204.

[3]) Doppelte Drahtlänge $2\,L = 2000$ m; Wellenlänge der Wanderwelle $\lambda = 3000$ m; $\frac{\lambda}{2L} = 1{,}5$. Die Untersuchung des Herrn Gothe (Archiv f. Elektrotechnik, IX. S. 1) macht es wahrscheinlich, daß die Wellenlänge in der Nähe der Grundwelle erster Art der Schutzspule lag. Diese würde dann praktisch die ganze Spannung abgeschirmt haben.

so erhalten wir:

$$t = \sqrt{6} \cdot 10^{-8} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Sekunden.}$$

D. h., wenn die Station mit einer Wellenlänge von etwa 3 km telegraphiert (Schwingungszeit 10^{-5} Sekunden), liegen ungefähr 25 Wellen auf einer Kollektorwicklung. Die Kondensatorschwingungen sind nun stark gedämpft (Bild 5b). Befindet sich daher der Kopf der Wanderwelle in der zweiten Kollektorwicklung, so wird sich der Fuß der Welle in der ersten Kollektorwicklung befinden. Die Spannungsbeanspruchung der Isolierschicht wird daher durch den Ausdruck 112) gegeben.

Bei $E = 8000$ Volt; $m = 3$ (Beispiel im Abschnitt 7) ergibt dies den Wert von

$$V_a = \frac{8}{15} \cdot \frac{8000}{2} = 2100 \text{ Volt.}$$

Eine Überspannung von diesem Betrage kann den beobachteten Spannungsdurchschlag (vgl. Abschnitt 7) nicht erklären.

Dabei ist zu beachten, daß der Wert von 2100 Volt noch als eine obere Grenze anzusehen ist, da die Dämpfung durch Wirbelströme und Widerstand noch nicht berücksichtigt wurde.

Noch auf einen weiteren Umstand sei aufmerksam gemacht. Wir haben bisher in diesem Kapitel so gerechnet, als ob die beiden Ankerwicklungen räumlich

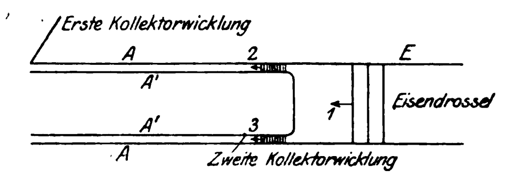


Bild 21. Einziehen der Wanderwellen in Ankerwicklung. Abschirmung.

hintereinander liegen. In Wirklichkeit liegen sie räumlich sehr nahe zusammen und wirken induktiv stark aufeinander ein (Bild 17). Eisendrossel und Anker verhalten sich etwa so, wie eine einzige Doppelleitung E (Eisendrossel) auf die zwei Doppelleitungen A und A' (Ankerwicklung) folgen (Bild 21). Die Doppelleitungen A und A' laufen einander in kleinem Abstande parallel und wirken induktiv kräftig aufeinander ein. Die aus der Eisendrossel kommende Welle teilt sich alsdann in zwei Teile. Jede Teilwelle durchsetzt den engen Raum zwischen den Doppelleitungen A und A'. In den gemeinsamen Raum der beiden Doppelleitungen dringt praktisch kein Feld. Der resultierende Induktionsfluß ist dort sehr klein. Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten der inneren Doppelleitung dauernd Null. Für die Berechnung der Größe der Teilwelle kommt offenbar nicht die Induktivität der Leitung A oder A' für sich allein genommen, sondern die Streuinduktivität der beiden Leitungen in Betracht. Diese ist bei unserer Ankerwicklung (vgl. Bild 15) sehr klein. Sie ist vielleicht der 12. bis 24. Teil der Induktivität der beiden Kollektorwicklungen zusammengenommen. Für diese hatten wir früher den Wert von 12 Henry eingesetzt. Der Wellenwiderstand des Ankers dürfe daher etwa nur $^1/_3$ bis $^1/_5$ der Angabe auf Seite 224 sein[1]). Dies hat zur Folge, daß der Anker nicht mit der durch den Ausdruck 112) gegebenen Spannung, sondern mit einer 3- bis 5mal so kleinen Spannung beansprucht werden dürfte. Die wirkliche Spannungsbeanspruchung des Ankers durch Wanderwellen dürfte daher bei der von mir eingebauten Maschine kaum 600 Volt erreicht haben[2]). Bei diesem Werte ist die Dämpfung durch Wirbelströme und Stromverdrängung noch nicht berücksichtigt.

[1]) Diese Überlegung hat sich später völlig bestätigt und ist die Grundlage für meine Arbeiten Spulen und Wanderwellen, Archiv f. Elektrotechnik, Band VI und VII geworden.

[2]) Die Laufzeit für eine Ankerwicklung ergibt sich unter Benutzung der Streuinduktivität zu mindestens $10 \cdot 10^{-4}$ Sekunden. Sie ist immer noch beträchtlich. Die vorhin aus der großen Laufzeit gezogenen Folgerungen bleiben bestehen.

Wir werfen auf unsere Wanderwellenrechnung einen Rückblick. Die angegebenen Werte der Wellenwiderstände sind nach dem auf S. 223 Gesagten mit großer Vorsicht aufzunehmen. Sie sind Schätzungen. Nun hat aber das Vorhergehende gezeigt, daß es nicht auf die Absolutwerte der Wellenwiderstände, sondern auf ihre Verhältnisse ankommt. Wer die mitgeteilten Zahlen nachrechnet, wird finden, daß auf unser Resultat wesentlich das Verhältnis des Wellenwiderstandes der Luftdrossel D (Bild 20a) und des Ankers A ausschlaggebend ist. Und wenn dieses Verhältnis höher als 3 liegt, so dürfte wenigstens insofern unser Ergebnis richtig sein, als die Maschine infolge der Wanderwellen nicht durchschlagen ist[1]), und daß die Spannungsgefahr durch Wanderwellen gegen die durch Resonanzspannungen bei unserer Maschine völlig zurücktritt.

Immerhin zeigt die Betrachtung dieses Abschnittes, daß es gut ist, vor den Kondensator eine Luftdrossel sehr kleiner Kapazität zu legen. Schließlich sei erwähnt, daß einer Maschine, die mit einem Kondensator nach Formel 95) und 102) geschützt ist, auch starke Wanderwellen nichts anhaben werden. Die Wanderwellen dringen in die geschützte Maschine nicht ein, sondern gehen an ihr, den Weg über den Kondensator nehmend, vorbei.

11. Ein- und Ausschaltperiode: Bisher haben wir uns nur mit dem stationären Fall beschäftigt. Weitere Überlegungen, über die ich nicht näher berichten will, haben mir gezeigt, daß die Einschaltperiode keine wesentlich höheren Spannungsbeanspruchungen ergibt, als der stationäre Fall. Das gleiche gilt für die Ausschaltperiode, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, der Taste einen Kondensator (Bild 4) parallel legt und diesen groß gegenüber dem Hauptkondensator wählt.

Zusatz bei der Korrektur. In einer Arbeit über den gleichen Gegenstand (E.T.Z. 1920 S. 581) hat Herr Wagner diese Ausschaltspannungen rechnerisch und experimentell untersucht. In seiner Anordnung ist der Tastkondensator zehnmal kleiner als in Königswusterhausen gewählt worden. Seine durch Versuch und Rechnung ermittelten hohen Werte der Ausschaltspannungen kommen daher für die Erklärung des Durchschlags in Königswusterhausen nicht in Frage. In Übereinstimmung meinem mit obigen Ergebnis findet Herr Wagner für die Verhältnisse in Königswusterhausen, allerdings bei kurzgeschlossenem Hauptkondensator eine Ausschaltspannung von 2500 Volt. In Wirklichkeit ist der Hauptkondensator nicht dauernd kurzgeschlossen. Es wandert in ihn, wenn er groß gegen den Tastkondensator ist, beim Abschalten ein großer Teil der Spulenenergie hinein, die hin und wieder durch den dauernd rotierenden Nebenkondensator in die Antenne abgeführt wird. Aus diesem Grunde liegt die wirkliche Ausschaltspannung noch tiefer als 2500 Volt, so daß die Ausschaltspannungen als Ursache für den Durchschlag ganz außer Betracht bleiben.

Als wirksamer Schutz gegen Ausschaltspannungen kommt in praktischen Fällen nur ein gegen den Hauptkondensator großer Tastkondensator in Frage.

Neuerdings sucht Herr Wagner den Durchschlag durch Wanderwellen zu erklären, indem er sich auf eine Mitteilung des Herrn v. Lepel stützt, die Luftdrossel D (Bild 20) sei kurzgeschlossen gewesen. Ich kann dieser Erklärung nicht beistimmen. Selbst bei kurzgeschlossener Drossel D ergeben sich die Überspannungen durch Wanderwellen immer noch beträchtlich kleiner als durch Resonanz, einerlei ob man für letztere meine oder Herrn Wagners Werte nimmt. Nach meiner Überzeugung ist die von mir eingebaute Maschine hauptsächlich durch Resonanzspannungen gefährdet gewesen. Daß eine später benutzte Maschine nicht durchschlug, erklärt sich dadurch, daß sie besser isoliert war und eine weit kleinere Ankerinduktivität besaß, mit der die Resonanzspannungen herabsinken.

[1]) Inzwischen sind sehr wertvolle Versuche von Herrn Böhm, Archiv f. Elektrotechnik, V, S. 427, mitgeteilt worden, die neues Licht über das Eindringen gedämpfter Wellen in Spulen geworfen haben. Wir haben es im vorliegenden mit dem Fall zu tun, daß die Wellenlänge klein ist im Vergleich zur aufgewickelten Drahtlänge. In einem solchen Falle findet auch Herr Böhm (S. 431, Bild 51), daß die Spannung gegen Erde sehr rasch abnimmt, wenn man von den Spulenklemmen ins Innere hereingeht. Selbst wenn man von allen Intomogenitäten der Wicklung absehen wollte, müßte man nach den Böhmschen Versuchen schließen, daß auf die Ankerwicklung nur ein bescheidener Bruchteil der Spannung am Kondensator gefallen ist.



Berücksichtigung der ungleichmäßigen Permeabilität bei Berechnung des Wechselstromwiderstandes massiver Eisenleitungen.

Von

Ing. **Leo Truxa**, Wien.

In der im 4. Heft des VIII. Bandes dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit wurden für den Wechselstromwiderstand massiver Eisenleitungen Formeln angegeben, die von der Voraussetzung ausgingen, daß die der Feldstärke in der Außenhaut entsprechende Permeabilität im ganzen Leiter vorherrsche. — Im folgenden soll versucht werden, zu Formeln zu gelangen, welche die örtliche Veränderlichkeit der Permeabilität berücksichtigen. Dagegen soll von ihrer zeitlichen Veränderlichkeit und damit von einer Verzerrung der Wechselstromform abgesehen werden.

Zunächst soll auch für diesen Fall vorweg angenommen werden, daß in einem Leiter beliebiger Querschnittsform die magnetische Kraft überall parallel der Oberfläche verlaufe. Es werde wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung in einem Punkt der Oberfläche derart festgelegt, daß seine x-Achse senkrecht zur Oberfläche, seine z-Achse parallel der Leiterachse liege. Es ist dann der Annahme gemäß

$$H_x = 0; \qquad H_z = 0; \qquad H_y = H. \tag{1}$$

Dies ist mit der Bedingung quellenfreier Verteilung der magnetischen Induktion

$$\nabla(\mu \mathfrak{H}) = 0 \tag{2}$$

nur dann zu vereinbaren, wenn auch

$$\frac{\partial(\mu H)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

ist. Nun ist μ lediglich Funktion von H, es kann daher Gleichung (3) nur dann erfüllt werden, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

ist. Die in der eingangs angeführten Arbeit unter (12) angegebene Gleichung für die Tiefenverteilung der magnetischen Kraft

$$\frac{4\pi\lambda\mu}{v^2}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \tag{5}$$

behält also auch unter den neuen Voraussetzungen noch ihre Gültigkeit.

Wie bereits erwähnt wurde, soll die Permeabilität als zeitlich unverändert angenommen werden. Es entspricht dann einer aufgedrückten harmonisch veränderlichen Spannung auch eine harmonisch veränderliche magnetische Kraft. Die Gleichung (5) geht unter Anwendung der symbolischen Schreibweise in die Form über

$$\frac{d^2 H}{d x^2} = i\,\frac{4\pi\omega\lambda}{v^2}\,\mu H. \tag{6}$$

Als allgemeine Lösung dieser Gleichung ergibt sich für die Grenzbedingungen

$$x = 0, \qquad H = H_0;$$
$$x = \infty, \qquad H = 0$$

die Beziehung

$$x = \frac{(1+i)\,v}{4\sqrt{\pi\omega\lambda}} \int_{H}^{H_0} \frac{dH}{\sqrt{\int_0^H \mu H\, dH}} \tag{7}$$

Diese Lösung gestattet allerdings nicht die entwickelte Darstellung von H in Abhängigkeit von x, erlaubt jedoch die Berechnung des im Leiter verlaufenden magnetischen Flusses.

Der Gesamtfluß unterhalb der Leiteroberfläche ist

$$\Phi_i = \int_0^\infty \mu H \, dx = -\int_0^{H_0} \mu H \frac{dx}{dH} dH. \tag{8}$$

Nun ist gemäß Gleichung (7)

$$\frac{dx}{dH} = \frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi\omega\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\int_0^H \mu H \, dH}} \tag{9}$$

und daher

$$\Phi_i = -\frac{(1+i)v}{4\sqrt{\pi\omega\lambda}} \int_0^{H_0} \frac{\mu H \, dH}{\sqrt{\int_0^H \mu H \, dH}} = -\frac{(1+i)v}{2\sqrt{\pi\omega\lambda}} \sqrt{\int_0^{H_0} \mu H \, dH}. \tag{10}$$ [1]

Der vom Innenfeld herrührende Anteil des Spannungsabfalles ist

$$e_i = -\frac{i\omega\Phi_i}{v} = \frac{-1+i}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\lambda} \int_0^{H_0} \mu H \, dH}. \tag{11}$$

---

[1]) Das Integral

$$U = \int_0^{H_0} \mu H \, dH$$

der Gleichung (10) hat streng genommen einen komplexen Wert, obgleich die Integrationsgrenzen reell sind. Da die Permeabilität μ eine Funktion des Absolutwertes $|H|$ der magnetischen Kraft ist, so hängt das Integral U vom Integrationsweg in der komplexen Bildebene ab. Setzt man

$$H = h + ik; \; |H| = \sqrt{h^2 + k^2}; \; H^2 = |H|^2 - 2k^2 + i2hk,$$

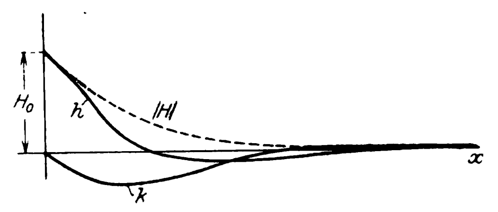
so wird

$$U = \frac{1}{2}\int \mu \, dH^2 = \int_0^{H_0} \mu \, |H| \, d|H| - \int \mu \, d(k^2) + i\int \mu \, d(hk) = U_1 - U_2 + iU_3.$$

Das Integral U_1 ist vom Integrationsweg unabhängig und bei gegebenem $\mu = f(H)$ ohne weiteres feststellbar. Die beiden anderen Integrale können nur ihrer Größenordnung nach eingeschätzt werden. — Sie sind, wie im folgenden gezeigt werden soll, klein gegen das erste. — Gemäß Gleichung (7), die den Zusammenhang zwischen H und x bestimmt, muß

$$h = \varphi(x); \; k = \psi(x)$$

sein. Wie aus der für konstantes μ durchgeführten exakten Lösung der Aufgabe zu schließen ist, sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit zunehmendem x gegen Null abklingende Wellen. Ihre Lage entspricht etwa dem folgenden Bilde:



Der Absolutwert H klingt gleichmäßig gegen Null ab. Wenn μ mit $|H|$ von außen nach innen abnimmt, so ist das Integral $U_2 = \int \mu \, dk^2 = 2\int \mu \, \psi \, \psi' \, dx$ kleiner als Null, wenn μ konstant ist, gleich Null und, wenn μ nach innen zunimmt, größer als Null. Maßgebend ist hiebei das Verhalten von μ innerhalb der ersten Halbwelle, da der Wert von k rasch abklingt. Keinesfalls kann das Integral einen den Wert von U_1 nur annähernd erreichenden Betrag annehmen, da zufolge des raschen Abklingens k nicht recht zur Entwicklung kommt. Im allgemeinen muß sich der Wert um Null bewegen. Eine ähnliche Überlegung gilt für das Integral

$$U_3 = \int \mu \, d(hk) = \int \mu \frac{d(\varphi\psi)}{dx} dx.$$

Die magnetisierende Kraft an der Oberfläche ist durch den Gesamtstrom im Leiter gegeben,

$$H_0 = \frac{4\pi J}{v u}, \tag{12}$$

es läßt sich daher für den Spannungsabfall auch schreiben

$$e_i = \frac{2(-1+i)}{v u H_0} \sqrt{\frac{\pi \omega}{\lambda}} \int_0^{H_0} \mu H \, d H \cdot J. \tag{13}$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\mu_m = \frac{2\int_0^{H_0} \mu H \, d H}{H_0^2} = \frac{\int_0^{H_0} \overline{B} \, d \overline{H}}{\frac{1}{2} B_0 H_0} \cdot \mu_0, \tag{14}$$

worin μ_0 die Permeabilität in der Außenhaut und $B, \overline{H}$ die zeitlichen Höchstwerte bedeuten, so wird der Ohmsche Widerstand gemäß Gleichung (13)

$$R_0 = \frac{1}{v u} \sqrt{\frac{2\pi \omega \mu_m}{\lambda}} = \frac{2\pi}{v u} \sqrt{\frac{f \mu_m}{\lambda}} \tag{15}$$

und der vom Innenfeld herrührende Anteil des Selbstinduktionskoeffizienten

$$L_i = \frac{1}{v u} \sqrt{\frac{2\pi \mu_m}{\omega \lambda}} = \frac{1}{v u} \sqrt{\frac{\mu_m}{f \lambda}}. \tag{16}$$

Die beiden letzten Gleichungen stimmen vollkommen mit den Gleichungen (28) und (29) der eingangs genannten Arbeit überein, soferne für μ der in obiger Gleichung (14) angegebene Mittelwert μ_m gesetzt wird.

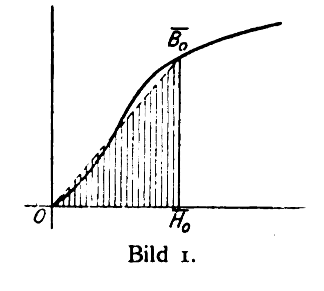


Bild 1.

Das Verhältnis

$$\frac{\int_0^{H^0} B \, d H}{\frac{1}{2} B_0 H_0}$$

hat mit Bezug auf die Magnetisierungskurve eine einfache geometrische Bedeutung. Es ist $\int_0^{H_0} B \, d H$ der Inhalt der Fläche zwischen Abszissenachse, Magnetisierungskurve und Endordinate, $\frac{1}{2} B_0 H_0$ der Flächeninhalt des geradseitigen Dreieckes o H_0 B_0 (siehe Bild 1).

μ_m ist demnach bei geringer Sättigung in der Außenhaut kleiner als μ_0, bei großer Sättigung größer als dieses. Der Wert läßt sich für eine bestimmte Eisengattung ein- für allemal in seiner Abhängigkeit von der magnetisierenden Kraft feststellen.

Weniger einfach ist die Bestimmung des Hysteresisverlustes. Es ist

$$V_h = \frac{\omega}{2\pi} \eta u \int_0^{\infty} (\mu \overline{H})^{1,6} \, d x. \tag{17}$$

Sein Wert bewegt sich ebenfalls um Null. Demgemäß dürfte es für die meisten Fälle genügen, nur mit dem ersten Integral U_1 zu rechnen und die beiden Zusatzintegrale zu vernachlässigen, d. h. das komplexe Integral über den geraden Verbindungsweg von o bis H_0 zu nehmen. Da Gleichung (10) im übrigen das Integral $\int \mu H \, d H$ unter der Quadratwurzel enthält, kommt ein allfälliger Fehler im Ergebnis nur mit etwa dem halben Wert zur Geltung.

In der weiteren Rechnung ist demgemäß auch $\int_0^{H_0} \mu H \, d H = \int_0^{H_0} \mu |H| \, d H$ als reelle Größe genommen.

Nun gibt Gleichung (7) den Zusammenhang zwischen x und dem komplexen Wert von H an, bietet jedoch keine Handhabe zur Bestimmung der Abhängigkeit zwischen x und dem Höchstwert $\bar{H}$. Sie läßt nur erkennen, daß $\sqrt{\omega\lambda}\cdot x$ eine Funktion von H allein ist. Demgemäß muß aber $\sqrt{\omega\lambda}\cdot x$ auch eine Funktion von $\bar{H}$ sein. Es läßt sich daher der Wert des Hysteresisverlustes jedenfalls in die Form bringen

$$V_h = \sqrt{\frac{\omega}{\lambda}}\, \eta\, u \cdot \varphi(H_0), \tag{18}$$

worin $\varphi(H)$ eine für eine bestimmte Eisensorte eindeutige Funktion von H ist. Ist I der Effektivwert des Stromes, so ist der dem Hysteresisverlust entsprechende scheinbare Widerstand

$$R_h = \frac{V_h}{J^2} \tag{19}$$

oder, da

$$H_0 = \sqrt{2}\,\frac{4\pi J}{v\,u}$$

ist,

$$R_h = \frac{32\pi^2 V_h}{v^2 u^2 \bar{H}_0^2} = \frac{\eta}{u}\sqrt{\frac{f}{\lambda}}\,\psi(\bar{H}_0), \tag{20}$$

worin wieder $\psi(H)$ eine Funktion von H allein ist. Für ein im ganzen Leiter gleiches μ wurde diese Funktion im technischen Maßsystem zu

$$\psi(H_0) = \frac{\pi}{\sqrt{10}}\,\frac{\mu^{1,1}}{H_0^{0,4}} \tag{21}$$

berechnet. Mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von μ wäre bei Verwendung dieser Formel für μ ein Mittelwert einzusetzen. Das Bildungsgesetz für diesen ist jedoch unbekannt. Es wäre naheliegend, den unter Gleichung (14) angegebenen Wert μ_m auch für diesen Mittelwert zu benützen. Ob diese Annahme berechtigt ist, müßten Versuche ergeben, eine große Abweichung ist jedoch keinesfalls zu erwarten.

Es wäre daher für den scheinbaren Ohmschen Widerstand bei Berücksichtigung des Hysteresisverlustes die Formel

$$R' = \left[0{,}199 + 0{,}993\,\eta\,\frac{\mu_m^{0,6}}{H_0^{0,4}}\right]\frac{1}{u}\sqrt{\frac{\mu_m}{\lambda}\,f} \tag{22}$$

und für die „äquivalente Permeabilität" die Formel

$$\mu' = \frac{632{,}5}{u}\sqrt{\frac{\mu_m}{\lambda f}} \tag{23}$$

in Vorschlag zu bringen, worin der Mittelwert μ_m aus der Beziehung

$$\mu_m = \frac{2\int_0^{\bar{H}_0} B\,dH}{\bar{H}_0^2} = \frac{\int_0^{\bar{H}_0} B\,dH}{\frac{1}{2} B_0 H_0}\,\mu_0 \tag{24}$$

zu bestimmen wäre.

Jedenfalls zeigen die vorstehenden Ausführungen, daß der scheinbare Ohmsche Widerstand bei Berücksichtigung des Hysteresisverlustes allgemein in der Form

$$R' = \frac{k}{u}\sqrt{\frac{f}{\lambda}} \tag{25}$$

darzustellen ist, wobei k nur von der auf den Querschnittsumfang bezogenen Stromdichte $\frac{J}{u}$ abhängt.

Für die Gültigkeit aller angeführten Formeln muß natürlich die Voraussetzung zutreffen, daß alle Abmessungen des Leiterquerschnittes klein gegen die scheinbare Dicke der stromführenden Schichte

$$\delta = \frac{1000}{2\pi\sqrt{10 f \lambda \mu_m}} \text{ cm} \tag{26}$$

sind.

Weitere einschlägige Versuche hätten sich in erster Linie auf die Untersuchung der Abhängigkeit der Größe k von der Stromdichte $\frac{J}{u}$ zu erstrecken. Allenfalls wäre sie für verschiedene Eisengattungen als empirische Funktion von $\frac{J}{u}$ zu bestimmen oder punktweise anzugeben. Der gleiche Vorgang kann auch für die Größe μ_m gewählt werden. Die beiden Formeln (23) und (25) ermöglichen sodann eine einfache, für alle technischen Zwecke hinreichend genaue Berechnung des induktiven und des Ohmschen Widerstandes von Eisenleitungen mit großen Querschnittsabmessungen.

Der magnetische Widerstand eines gezahnten Ankers[1]).

Von

Richard Gans.

Über den Einfluß der Nuten auf den magnetischen Widerstand eines gezähnten Ankers liegen nur empirische Daten vor, ohne daß man, soviel ich weiß, denselben theoretisch berechnet hätte[2]). Da der Wert dieses Widerstandes für die Konstruktion von Interesse ist, soll er im folgenden berechnet und das Ergebnis mit den Meßresultaten verglichen werden.

1. Formulierung des Problems.

Um die Aufgabe der mathematischen Behandlung leichter zugänglich zu machen, wollen wir einige praktisch unbedeutende Vereinfachungen einführen. Zunächst sollen Polschuhe und Anker in Richtung der Ankerachse als unendlich lang betrachtet werden, was erlaubt ist, da die Schlitzbreite klein gegen jene Dimension ist. Dadurch wird das Problem der Kraftlinienverteilung ein ebenes, d. h. es hängt nur von zwei Koordinaten ab. Da ferner die Schlitzbreite klein gegen den Ankerradius ist, wollen wir die Krümmung der Stirnflächen des Interferrikums vernachlässigen. Dadurch nimmt ein Schnitt durch den Schnitt die Form des Bildes 1 an, in der die schraffierten Teile aus Eisen, der nicht schraffierte Streifen aus Luft besteht. Die Dimensionen, welche in Frage kommen, sind im Bild angegeben.

Ist die Permeabilität des Eisens sehr groß, stehen die Kraftlinien im Interferrikum merklich senkrecht auf den Stirnflächen desselben, d. h. die Stirnflächen

[1]) Ich habe dies Problem Herrn H. Magliano als mathematische Doktorarbeit vorgeschlagen; er hat es in erster Annäherung behandelt.

[2]) Aus einer unbestimmten Notiz in C. Heinke, Handbuch der Elektrotechnik 5, Leipzig 1908, S. 136 geht hervor, daß Kutta vielleicht das Problem für einen speziellen Fall ($\mathfrak{L} = 2a$; $l = \infty$) behandelt hat, doch habe ich die Arbeit nicht finden können.

sind als Äquipotentialflächen anzusehen. Wir haben also ein Potential φ zu suchen, welches im Streifen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

genügt, während auf der gebrochenen Linie, welche die Spur der Ankerbegrenzung bildet,

$$\varphi = 0 \tag{2}$$

und auf der Geraden, die die Spur der Stirnfläche des Polschuhs ist,

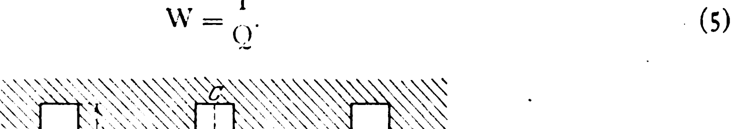
$$\varphi = 1 \tag{3}$$

ist. Dann ist der Kraftlinienfluß durch den Schlitz

$$Q = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma, \tag{4}$$

wo $d\sigma$ ein Element der Oberfläche der Polschuhstirnfläche, n seine in den Schlitz hinein positiv gerechnete Normale bedeutet, und der magnetische Widerstand W ist definiert durch

$$W = \frac{1}{Q}. \tag{5}$$



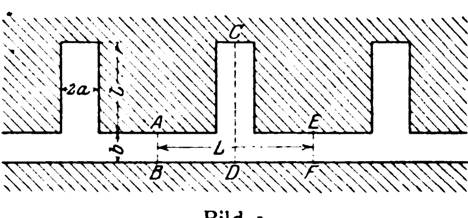


Bild 1.

Es ist ohne weiteres klar, daß aus Symmetriegründen AB, CD, EF Kraftlinien sein müssen, und daß es wegen der Periodizität von φ genügt, diese Funktion im Gebiete ABDFECA zu bestimmen, und zwar derart, daß auf AB und EF

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma \tag{6}$$

ist, wo n die Normale dieser Begrenzungsgeraden bedeutet. Da ferner das Potential in Punkten, die spiegelbildlich bezüglich CD sind, den gleichen Wert hat, genügt es sogar, φ in dem Polygon ABDCA zu bestimmen, und zwar so, daß (6) auch auf CD gilt.

2. Erste Näherung.

Ist die Nutenbreite 2a sehr klein gegen die Nutentiefe l, so kann man die Nut als unendlich tief ($l = \infty$) ansehen, und ist ferner der kürzeste Luftweg b sehr klein gegen die „Nutenteilung" $\mathfrak{L}$, so darf auch diese als unendlich groß ($\mathfrak{L} = \infty$) angesehen werden.

Dadurch wird das Polygon ABDFECA im Bild 1 auf das Bild 2 zurückgeführt. Machen wir O zum Ursprung eines Koordinatensystems x, y, so hat man also eine der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

genügende Funktion zu suchen, die den folgenden Bedingungen genügt.

Für $y = 0$ $\qquad \varphi = 1$ (8)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } x^2 > a^2 \text{ und } y = b & \varphi = 0 \\ \text{für } y > b \text{ und } x^2 = a^2 & \varphi = 0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Diese Aufgabe löst man leicht funktionentheoretisch, indem man

$$\chi = \varphi + i\psi \tag{10}$$

einführt und das Polygon im Bild 2 in der $z = x + yi$-Ebene auf den durch die Geraden $\varphi = 0$ und $\varphi = 1$ begrenzten unendlichen Streifen in der χ-Ebene konform abbildet.

Das erreicht man nach Schwarz durch Abbildung des Polygons im Bild 2 sowie des Streifens in der χ-Ebene auf die t-Halbebene[1]).

Um Bild 2 auf dieselbe abzubilden, so daß sich entsprechen

Bild 2.

$$\begin{array}{lll} z = -a + bi & \text{und} & t = -1 \\ x = -\infty;\ 0 < y < b & ,, & t = -\frac{1}{\lambda} \\ x = +\infty;\ 0 < y < b & ,, & t = +\frac{1}{\lambda} \\ z = +a + bi & ,, & t = +1 \\ -a < x < +a;\ y = +\infty & ,, & t = \infty, \end{array}$$

Bild 3.

haben wir in der Schwarzschen Derivierten

$$\frac{dz}{dt} = C\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-\lambda^2 t^2} \tag{11}$$

die Konstanten C und λ durch a und b auszudrücken und dann (11) zu integrieren. Willkürlich können wir bestimmen, daß für $-1 < t < +1$ die Wurzel in (11) positiv sein soll.

Durch Integration über den unendlich großen Halbkreis in der t-Ebene erhält man die Beziehung

$$C = \frac{2a\lambda^2}{\pi} \tag{12}$$

und durch Integration über einen Halbkreis mit unendlich kleinem Radius, der den Punkt $t = \frac{1}{\lambda}$ umgeht,

$$\sqrt{\lambda^2 - 1} = \frac{b}{a}. \tag{13}$$

Integration von (11) ergibt auf den verschiedenen Seiten der Begrenzung des Polygons

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } -\frac{1}{\lambda} < t < +\frac{1}{\lambda} & z = \frac{2a}{\pi}\arcsin t + \frac{b}{\pi}\log\frac{a\sqrt{1-t^2}+bt}{a\sqrt{1-t^2}-bt} \\ ,,\ \frac{1}{\lambda} < t < 1 & z = \frac{2a}{\pi}\arcsin t + \frac{b}{\pi}\log\frac{bt + a\sqrt{1-t^2}}{bt - a\sqrt{1-t^2}} + bi \\ ,,\ 1 < t < +\infty & z = a + bi + \frac{2ai}{\pi}\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) - \frac{2bi}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sqrt{t^2-1}}{bt} \\ ,,\ -1 < t < -\frac{1}{\lambda} & z = -\frac{2a}{\pi}\arcsin(-t) + \frac{b}{\pi}\log\frac{-a\sqrt{1-t^2}-bt}{a\sqrt{1-t^2}-bt} + bi \\ ,,\ -\infty < t < -1 & z = -a + bi + \frac{2ai}{\pi}\log\left(\sqrt{t^2-1}-t\right) - \frac{2bi}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sqrt{t^2-1}}{-bt}, \end{array}\right\} \tag{14}$$

wo die Wurzeln stets mit dem positiven Vorzeichen, die log reell und die arc tg im ersten Quadranten zu nehmen sind.

[1]) Siehe z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Phys. 3, Leipzig 1891, S. 100.

Ebenso ergibt sich die Abbildung des Streifens in der χ-Ebene auf die t-Halbebene (siehe die Bilder 4 und 5), so daß die Punkte

$$0<\varphi<1;\ \psi=+\infty \text{ und } t=-\frac{1}{\lambda}$$

$$0<\varphi<1;\ \psi=-\infty \quad \text{„} \quad t=+\frac{1}{\lambda}$$

sich entsprechen, mittels Integration der Gleichung

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{D}{1-\lambda^2 t^2}. \tag{15}$$

In dieser bestimmt sich D durch Integration über den Halbkreis von unendlich kleinem Radius, der den Punkt $t=\frac{1}{\lambda}$ umgeht, zu

$$D=\frac{2i\lambda}{\pi}, \tag{16}$$

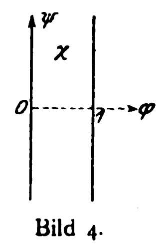


Bild 4.

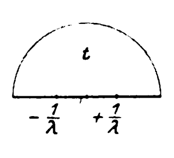


Bild 5.

und wir erhalten

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } -\frac{1}{\lambda}<t<+\frac{1}{\lambda} & & \chi=1+\frac{i}{\pi}\log\frac{1+\lambda t}{1-\lambda t} \\ \text{„} \quad \frac{1}{\lambda}<t<+\infty & & \chi=\frac{i}{\pi}\log\frac{\lambda t+1}{\lambda t-1} \\ \text{„} \quad -\infty<t<-\frac{1}{\lambda} & & \chi=\frac{i}{\pi}\log\frac{-\lambda t-1}{-\lambda t+1}. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Hier sind die log stets reell zu nehmen.

Um χ als Funktion von z zu erhalten, hat man t aus zusammengehörigen Werten von (14) und (17) zu eliminieren.

Um dann den Kraftlinienfluß zu berechnen, der zwischen $x=-\frac{\mathfrak{L}}{2}$ und $x=+\frac{\mathfrak{L}}{2}$ aus dem Polschuh in den Schlitz eintritt, und zwar pro Längeneinheit in Richtung der auf der Zeichenebene senkrechten Ankerachse, hat man

$$Q=\int_{-\frac{\mathfrak{L}}{2}}^{+\frac{\mathfrak{L}}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx=-2\int_{0}^{\frac{\mathfrak{L}}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx$$

zu bilden. Da aber aus den Elementen der Funktionentheorie folgt, daß $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ist, so ergibt sich

$$Q=2\left[\psi\left(\frac{\mathfrak{L}}{2}\right)-\psi(0)\right]. \tag{18}$$

Da nach (14) für $z=0$ auch $t=0$ und nach (17) $\chi=1$ ist, so folgt $\psi(0)=0$. Ist $\frac{\mathfrak{L}}{2}$ sehr groß gegenüber a und b, so ist $t=\frac{1}{\lambda}-\varepsilon$, wo ε eine sehr kleine positive Zahl ist, also folgt aus der ersten Gleichung (14) und der ersten Gleichung (17)

$$\psi\left(\frac{\mathfrak{L}}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \log \frac{2}{\varepsilon \lambda} \tag{19}$$

$$\frac{\mathfrak{L}}{2} = \frac{2a}{\pi} \arcsin \frac{1}{\lambda} + \frac{b}{\pi} \log \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{\pi} \log \frac{2}{\varepsilon \lambda}. \tag{20}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen $\log \frac{2}{\varepsilon \lambda}$, so ergibt sich mittels (18)

$$Q = \frac{\mathfrak{L}}{b} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{a}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + \log \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right], \tag{21}$$

und damit ist die Flußverminderung gefunden, die infolge der Nut auftritt, denn $Q_o = \frac{\mathfrak{L}}{b}$ ist der Fluß, der ohne Nut vorhanden wäre.

Führt man den Winkel β durch die Definition

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} \tag{22}$$

ein, so schreibt sich (21) in der Form

$$\Delta = Q_o - Q = \frac{4}{\pi}(\beta \operatorname{tg} \beta + \ln \cos \beta). \tag{23}$$

Denselben Ausdruck hat Kirchhoff beim Problem des Schutzringkondensators gefunden[1]), indem er die im nebenstehenden Bild 6 entsprechende Abbildungsaufgabe behandelte und in den Endresultaten zu $l = \infty$ überging.

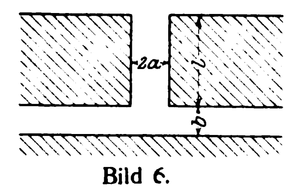
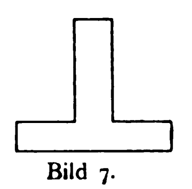


Bild 6.


Bild 7.

3. Endliche Nutentiefe.

Die Flußverminderung ist nach (23) eine Funktion von $\frac{a}{b}$ allein. Das liegt daran, daß wir l und $\mathfrak{L}$ (Bild 1) als unendlich groß angesehen haben. Täten wir das nicht, hätten wir das Polygon im Bild 7 auf die t-Halbebene abzubilden. Da dasselbe aber acht Ecken hat, so würden wir auf hyperelliptische Funktionen geführt und würden schwerlich praktisch brauchbare Resultate erhalten.

Um trotzdem den Fehler abzuschätzen, welchen die Vernachlässigung von $\frac{a}{l}$ und $\frac{b}{\mathfrak{L}}$ mit sich bringt, verfahren wir so, daß wir zunächst $\frac{a}{l}$ als endlich an-

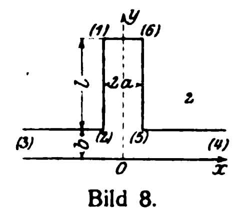


Bild 8.

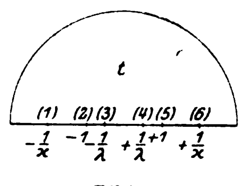


Bild 9.

sehen, aber $\frac{b}{\mathfrak{L}} = 0$ setzen, dann umgekehrt $\frac{b}{\mathfrak{L}}$ berücksichtigen, aber $\frac{a}{l}$ vernachlässigen. Die Berechtigung dieses Verfahrens ist evident, wenn die Korrektionen so klein sind, daß man Glieder der Ordnung $\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{\mathfrak{L}}$ vernachlässigen darf.

Ist die Nutentiefe endlich, so haben wir das Polygon im Bild 8 auf die t-Halbebene abzubilden (Bild 9), und zwar so, daß sich entsprechen

[1]) G. Kirchhoff, Berliner Sitzungsberichte, 1877, S. 144; Ges. Abhandl. Leipzig 1882, S. 101.

$$
\begin{array}{lll}
z = -a + (b + l)\,i & \text{und} & t = -\frac{1}{\varkappa} \\
z = -a + b\,i & ,, & t = -1 \\
x = -\infty;\ 0 < y < b & ,, & t = -\frac{1}{\lambda} \\
x = +\infty;\ 0 < y < b & ,, & t = +\frac{1}{\lambda} \\
z = a + bi & ,, & t = 1 \\
z = a + (b + l)\,i & ,, & t = \frac{1}{\varkappa}.
\end{array}
$$

Dieses Bild wird bewirkt durch

$$\frac{dz}{dt} = C \frac{\sqrt{1 - t^2}}{(1 - \lambda^2 t^2)\sqrt{1 - \varkappa^2 t^2}}. \tag{24}$$

Eine Gleichung zur Bestimmung der Konstanten C, $\varkappa$, λ erhalten wir durch Integration über den Halbkreis von unendlich kleinem Radius, der den Punkt $t = \frac{1}{\lambda}$ umgeht. So ergibt sich

$$\frac{\pi C \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2 \lambda \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}} = b \tag{25}$$

und durch Integration von (24)

$$z = \frac{2 b \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}}{\pi \lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \left\{ \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2 t^2)}} + (\lambda^2 - 1) \int_0^t \frac{dt}{(1 - \lambda^2 t^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2 t^2)}} \right\}. \tag{26}$$

Wir setzen

$$t = \operatorname{sn}(u, \varkappa); \quad \frac{1}{\lambda} = \operatorname{sn}(\alpha, \varkappa). \tag{27}$$

Dann ist[1])

$$z = \frac{2 b \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}}{\pi \lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \left\{ u + (\lambda^2 - 1) \left[u - \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha} \Pi(u, \alpha + i K') \right] \right\} \tag{28}$$

Nun ist aber $\sqrt{\lambda^2 - 1} = \frac{\operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}$; $\sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2} = \frac{\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}$, also folgt

$$z = \frac{2b}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha} u - \Pi(u, \alpha + i K') \right\}. \tag{29}$$

Im Punkte (5) (siehe die Bilder 8 und 9) ist $z = a + b\,i$; $t = 1$; $u = K$, denn $\operatorname{sn} K = 1$. Im Punkte (6) ist $z = a + (b + l)\,i$; $t = \frac{1}{\varkappa}$; $u = K + i K'$, denn

$$\operatorname{sn}(K + i K') = \frac{1}{\varkappa}.$$

Ferner ist[2])

$$\Pi(K, \alpha + i K') = K \cdot Z(\alpha + i K')$$

und

$$\Pi(K + i K', \alpha + i K') = (K + i K') Z(\alpha + i K') + \frac{i \pi (\alpha + i K')}{2 K} \tag{30}$$

also nach (29)

[1]) Siehe z. B. O. Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis. Braunschweig 1866; 2, S. 466. Gleichung (174).

[2]) Siehe z. B. H. Weber, Elliptische Funktionen, Braunschweig 1891, S. 129, Gleichg. (5).

$$\frac{a + bi}{K} = \frac{2b}{\pi}\left(\frac{\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha} - Z(\alpha + iK')\right)$$

$$\frac{a + bi + li}{K + iK'} = \frac{2b}{\pi}\left(\frac{\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha} - Z(\alpha + iK')\right) - \frac{ib(\alpha + iK')}{K\cdot(K + iK')}. \tag{31}$$

Diese beiden Gleichungen geben die Konstanten $\varkappa$ und λ. Durch Subtraktion erhält man nämlich

$$\frac{a + bi + li}{K + iK'} = \frac{a + bi}{K} - \frac{bi(\alpha + iK')}{K(K + iK')}$$

oder

$$\frac{aK' - lK}{b} = \alpha. \tag{32}$$

Ferner wird mittels der Beziehung[1])

$$Z(\alpha + iK') = Z(\alpha) - \frac{i\pi}{2K} + \frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}$$

aus der ersten Gleichung (31)

$$\frac{\alpha\pi}{2Kb} = \frac{\operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha} - Z(\alpha). \tag{33}$$

Die Gleichungen (32) und (33) drücken in transszendenter Form $\varkappa$ und λ durch die Dimensionen a, b und l des Polygons aus.

Um brauchbare Formeln zu gewinnen, wollen wir in (29) die Funktion dritter Gattung durch ϑ-Funktionen ausdrücken mittels der Beziehung[2])

$$\Pi(u, \alpha + iK') = u\left(Z(\alpha) - \frac{i\pi}{2K} + \frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u - \alpha - iK')}{\Theta(u + \alpha + iK')},$$

so daß wir aus (29) erhalten

$$\frac{\pi z}{2b} = u\left(\frac{\operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha} - Z(\alpha) + \frac{i\pi}{2K}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u - \alpha - iK')}{\Theta(u + \alpha + iK')}. \tag{34}$$

Um den Kraftlinienfluß zu berechnen, interessiert uns dieser Wert für $y = 0$; $x = \frac{\mathfrak{L}}{2}$, wo $\mathfrak{L}$ sehr groß ist, d. h. $u = \alpha - \gamma$ [siehe (27)], wo γ ein so kleiner Wert ist, daß wir in den Formeln nur endliche Größen und $\log\gamma$, aber nicht γ selbst beizubehalten brauchen.

Dann folgt

$$\frac{\pi\mathfrak{L}}{4b} = \frac{\operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha}\cdot\alpha - \alpha Z(\alpha) + \frac{i\pi\alpha}{2K} - \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\gamma + iK')}{\Theta(2\alpha + iK')}. \tag{35}$$

Nun ist[3])

$$\Theta(\gamma + iK') = i e^{\frac{\pi}{4K}(K' - 2i\gamma)} H(\gamma)$$

$$\Theta(2\alpha + iK') = i e^{\frac{\pi}{4K}(K' - 4i\alpha)} H(2\alpha),$$

so daß aus (35) wird, wenn wir noch $H(\gamma) = H'(0)\gamma$ setzen,

$$\frac{\pi\mathfrak{L}}{2b} = 2\alpha\left[\frac{\operatorname{dn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha} - Z(\alpha)\right] - \log\frac{H'(0)}{H(2\alpha)} - \log\gamma. \tag{36}$$

Dazu kommt nach (17)

$$\psi\pi = \log\frac{1 + \lambda t}{1 - \lambda t} = \log\frac{\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}u}{\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{sn}u},$$

und da $u = \alpha - \gamma$ ist

---

1) O. Schlömilch, l. c. S. 464, Gleichung (163).
2) O. Schlömilch, l. c. S. 464 Gleichung (167).
3) O. Schlömilch, l. c. S. 451 Gleichung (128).

$$\psi\pi = \log\frac{2\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha} - \log\gamma. \tag{37}$$

Durch Elimination von $\log\gamma$ aus (36) und (37) erhält man

$$\psi\pi = \frac{\pi\mathfrak{L}}{2\,\mathrm{b}} - 2\,\alpha\left[\frac{\mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha} - Z(\alpha)\right] + \log\frac{2\,\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{H}(2\,\alpha)\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}. \tag{38}$$

Durch (33) vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\psi = \frac{\mathfrak{L}}{2\,\mathrm{b}} - \frac{\alpha\,\mathrm{a}}{\mathrm{K}\,\mathrm{b}} + \frac{1}{\pi}\log\frac{2\,\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{H}(2\,\alpha)\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}. \tag{39}$$

Die Funktionen von α sollen durch ϑ-Funktionen ausgedrückt werden. Dazu erinnern wir uns an die folgenden Beziehungen.

Ist $\mathrm{v} = \frac{\alpha}{2\,\mathrm{K}}$, so gilt $\mathrm{sn}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta(v)}$; $\mathrm{cn}\,\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta(v)}$; $\mathrm{dn}\,\alpha = \sqrt{\varkappa'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta(v)}$.

Da ferner $\mathrm{H}(\alpha) = \vartheta_1(v)$ ist, so haben wir $\mathrm{H}'(0) = \vartheta_1'(0)\frac{d\,v}{d\,\alpha} = \frac{\vartheta_1'(0)}{2\,\mathrm{K}}$.

Nun ist aber[1])

$$\mathrm{H}(2\,\alpha) = \vartheta_1(2\,v) = \frac{2\,\vartheta(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3},$$

also

$$\frac{2\,\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{H}(2\,\alpha)\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha} = \frac{\vartheta_1'\,\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{2\,\mathrm{K}\varkappa'\,\vartheta_2^2(v)\,\vartheta_3^2(v)}$$

und mittels der Beziehungen

$$\vartheta_1' = \pi\,\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3;\quad 2\,\mathrm{K}\varkappa' = \pi\,\vartheta^2$$

endlich

$$\frac{2\,\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{H}(2\,\alpha)\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha} = \left(\frac{\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}\right)^2.$$

Somit wird aus (39)

$$\psi = \frac{\mathfrak{L}}{2\,\mathrm{b}} - \frac{2\,\alpha}{\mathrm{b}}\,v - \frac{2}{\pi}\log\frac{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\,\vartheta_3}. \tag{40}$$

Ferner folgt aus (32), wenn wir, wie üblich,

$$e^{-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\pi} = q \tag{41}$$

setzen,

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi}{\alpha}(2\,\mathrm{b}\,v + \mathrm{l}). \tag{42}$$

Um schließlich (33) umzuwandeln, berücksichtigen wir, daß

$$Z(\alpha) = \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)};\quad \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha} = -\frac{\mathrm{cn}'\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha},$$

also

$$Z(\alpha) - \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha} = \frac{d}{d\,\alpha}\log[\mathrm{cn}\,\alpha\,\Theta(\alpha)]$$

ist. Da aber

$$\Theta(\alpha) = \vartheta(v);\ \mathrm{cn}\,\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta(v)};\quad \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}} = \frac{\vartheta}{\vartheta_2},\ \text{also}\ \Theta(\alpha)\,\mathrm{cn}\,\alpha = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\vartheta_2(v)$$

oder $\frac{d}{d\,\alpha}\log[\mathrm{cn}\,\alpha\,\Theta(\alpha)] = \frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)}\frac{1}{2\,\mathrm{K}}$ ist, so wird aus (33)

$$\frac{\alpha\,\pi}{\mathrm{b}} = -\frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)}. \tag{43}$$

[1]) E. Pascal, Repert. d. höh. Math. Leipzig 1900, 1, S. 413.

Die Gleichungen (40), (42) und (43) stellen die gesuchten Beziehungen in der gewünschten Form dar.

Wenn $q < \frac{1}{23}$ ist, wendet man für die ϑ-Funktionen die Reihen an, die nach Potenzen von q, sonst die, welche nach Potenzen von q′ fortschreiten. Wir dürfen, wie wir aus dem Endresultat sehen werden, bereits q^2 vernachlässigen. Dann gilt[1])

$$-\frac{\vartheta_2'(v)}{\pi\,\vartheta_2(v)} = \operatorname{tg} v\pi,$$

so daß aus (43) folgt

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} v\pi, \tag{44}$$

oder wenn wir, wie früher, $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\beta$ setzen,

$$v\pi = \beta. \tag{44'}$$

Aus (42) ergibt sich

$$q = e^{-\frac{l\pi}{a} - 2\beta \operatorname{ctg}\beta} \tag{45}$$

Um schließlich (40) zu entwickeln, benutzen wir die Beziehung[2])

$$\frac{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\,\vartheta_3} = \frac{\cos v\pi\,(1 + 2q\cos 2v\pi)}{1 + 2q},$$

durch die mittels (44′)

$$\log\frac{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\,\vartheta_3} = \log\cos\beta - 4q\sin^2\beta$$

wird. Damit erhalten wir die Endformel aus (40)

$$\psi = \frac{\Omega}{2b} - \frac{2}{\pi}(\beta\operatorname{tg}\beta + \log\cos\beta) + \frac{8q}{\pi}\sin^2\beta, \tag{46}$$

wo q durch (45) definiert ist.

(46) stellt die Hälfte des Kraftlinienflusses dar. Das erste Glied rechts ist der Fluß ohne Nut, der zweite Term ist hinzuzufügen bei unendlich tiefer Nut, und der dritte Term, wenn die Nutentiefe l nicht mehr als unendlich groß im Vergleich zu ihrer Breite 2a aufgefaßt werden darf.

Da aber praktisch $\frac{l}{2a}$ stets wenigstens 2,5 ist, so wird q nach (45) kleiner als $1{,}5 \cdot 10^{-7}$, d. h. der dritte Term in (46) ist zu vernachlässigen oder praktisch darf die Nut stets als unendlich tief aufgefaßt werden.

4. Endliche Nutenteilung.

Wir haben noch zu untersuchen, was eine endliche Nutenteilung ausmacht. Zu dem Zweck hätten wir das Polygon des Bildes 10 in der z-Ebene auf ein Rechteck in der χ-Ebene abzubilden, denn auf GF ist $\varphi = 1$, auf $ABC_\infty DE$ ist $\varphi = 0$, auf AG und EF dagegen $\chi = \text{const}$, da diese Linien aus Symmetriegründen Kraftlinien sind. Das Polygon hat 7 Ecken; wir können das Problem aber dadurch vereinfachen, daß wir das Polygon in anderer Weise aus dem unendlichen Streifen herausschneiden. In Bild 11 stelle die Linie (2) (3) (4) (5) die Begrenzung eines Zahnes dar, auf der also $\varphi = 0$ ist, während die Geraden (1) (2) und (5) (6) durch die Mitten der Nuten laufen. Auf ihnen muß ψ konstant sein, während schließlich auf (6) (1) $\varphi = 1$ ist. Das Polygon (Bild 11) ist also auf ein Rechteck in der χ-Ebene abzubilden. Es hat vor dem Rechteck in Bild 10 den Vorteil, daß es nur 6 Ecken besitzt. Die Abbildung auf die t-Halbebene erfolgt in der durch Bild 12 deutlich gemachten Art mittels der Gleichung

[1]) Siehe E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig und Berlin 1909, S. 48.
[2]) E. Jahnke und F. Emde, ibidem.

$$\frac{dz}{dt} = C \frac{\sqrt{1-\varkappa^2 t^2}}{(1-\lambda^2 t^2)\sqrt{1-t^2}}. \tag{47}$$

C bestimmt sich durch Integration über den Halbkreis mit unendlich kleinem Radius, der den Punkt $t = \frac{1}{\lambda}$ umgeht, zu

$$C = \frac{2a\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{\pi\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}, \tag{48}$$

so daß sich durch Integration von (47)

$$z = \frac{2a}{\pi}\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2-\varkappa^2}}\,\frac{\varkappa^2}{\lambda}\left\{\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}} + \frac{\lambda^2-\varkappa^2}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{1}{1-\lambda^2 t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}}\right\} \tag{49}$$

ergibt.

Setzt man

$$t = \mathrm{sn}(u,\varkappa); \quad \frac{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}{\varkappa'\lambda} = \mathrm{sn}(\alpha,\varkappa'), \tag{50}$$

so wird [1]) mit Berücksichtigung der Beziehungen $\mathrm{dn}(\alpha,\varkappa') = \frac{\varkappa}{\lambda}$; $\mathrm{cn}(\alpha,\varkappa') = \frac{\varkappa\sqrt{1-\lambda^2}}{\varkappa'\lambda}$

$$z = \frac{2a}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{cn}(\alpha,\varkappa')}{\mathrm{sn}(\alpha,\varkappa')\,\mathrm{dn}(\alpha,\varkappa')}u + i\,\Pi(u, K + i\alpha)\right\}. \tag{51}$$

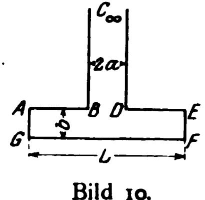



Bild 10.

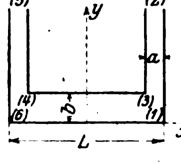


Bild 11.

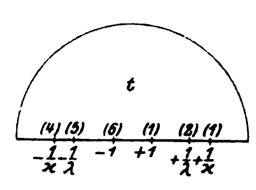


Bild 12.

Für $z = \frac{\mathfrak{L}}{2}$ ist $t = 1$; $u = K$

„ $z = \frac{\mathfrak{L}}{2} - a + bi$ ist $t = \frac{1}{\varkappa}$; $u = K + iK'$, also [2])

$$\frac{\mathfrak{L}}{2} = \frac{2aK}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{cn}(\alpha,\varkappa')}{\mathrm{sn}(\alpha,\varkappa')\,\mathrm{dn}(\alpha,\varkappa')} + iZ(K+i\alpha)\right\} \tag{52}$$

$$\frac{\mathfrak{L}}{2} - a + bi = \frac{2a}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{cn}(\alpha,\varkappa')}{\mathrm{sn}(\alpha,\varkappa')\,\mathrm{dn}(\alpha,\varkappa')}(K+iK') + i(K+iK')Z(K+i\alpha) - \frac{\pi}{2K}(K+i\alpha)\right\}. \tag{53}$$

Dividiert man (53) durch $K + iK'$ und subtrahiert von der durch K dividierten Gleichung (52), so folgt nach einfacher Umformung

$$\frac{\frac{\mathfrak{L}}{2}K' - bK}{a} = \alpha. \tag{54}$$

Aus (52) ergibt sich mittels der Formel, die $Z(i\alpha + K)$ durch $Z(\alpha,\varkappa')$ ausdrückt [3])

[1]) O. Schlömilch, l. c. S. 466.
[2]) H. Weber, l. c. S. 129.
[3]) O. Schlömilch, l. c. S. 464.

$$\frac{\mathfrak{L}}{2} = \frac{2\,a\,K}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{cn}(\alpha,\varkappa')\,\mathrm{dn}(\alpha,\varkappa')}{\mathrm{sn}(\alpha,\varkappa')} + Z(\alpha,\varkappa') + \frac{\pi\,\alpha}{2\,K\,K'}\right\}$$

oder mit Benutzung von (54) und der Definition $Z = \frac{\Theta'}{\Theta}$

$$\frac{\pi\,b}{2\,a\,K'} = \frac{d}{d\alpha}\log\left[\mathrm{sn}(\alpha,\varkappa')\,\Theta(\alpha,\varkappa')\right]. \tag{55}$$

Nun ist

$$\Theta(\alpha,\varkappa') = \vartheta(v,q');\ \mathrm{sn}(\alpha,\varkappa') = \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\,\frac{\vartheta_1(v,q')}{\vartheta(v,q')},\ \text{wo}\ v = \frac{\alpha}{2\,K'},$$

so daß sich

$$\frac{\pi\,b}{a} = \frac{\vartheta_1'(v,q')}{\vartheta_1(v,q')} \tag{56}$$

ergibt, während aus (54)

$$\log q' = \frac{2\,a\,\pi}{b}\,v - \frac{\mathfrak{L}\,\pi}{2\,b} \tag{57}$$

folgt, wenn wie üblich

$$q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}} \tag{58}$$

gesetzt wird.

(56) und (57) bestimmen v und q', das heißt α und $\varkappa'$ und somit λ und $\varkappa$. Um diese Bestimmungen auszuführen, entwickeln wir die ϑ-Funktionen nach Potenzen von q'.

Wir müssen jedoch, wie wir sehen werden, q'^2 beibehalten, um überhaupt in erster Näherung den Einfluß unendlicher Nutenteilung zu erhalten.

Aus (56) ergibt sich mittels der Reihenentwicklung für die ϑ-Funktion[1])

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\pi\,v\,[1 - 8\,q'^2\sin^2\pi\,v],$$

also in erster Näherung $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\pi\,v$. Führen wir wieder $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\beta$ ein, so erhalten wir in erster Näherung $\pi\,v = \beta$ und in zweiter

$$v\,\pi = \beta + 8\,q'^2\sin^3\beta\cos\beta, \tag{59}$$

während nach (57) unter Benutzung von (59) mit genügender Näherung

$$q' = e^{-\frac{\mathfrak{L}\pi}{2b} + 2\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}\,(1 + 16\,q'^2\sin^4\beta) \tag{60}$$

ist. (59) und (60) stellen die Lösungen von (56) und (57) dar.

Da wir noch $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ brauchen werden, leiten wir diesen Wert ab. Es ist nach (50)

$$\mathrm{dn}(\alpha,\varkappa') = \frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{\vartheta_3(v,\varkappa')}{\vartheta(v,\varkappa')}\sqrt{\varkappa}$$

oder durch Reihenentwicklung der ϑ-Funktion

$$\frac{\sqrt{\varkappa}}{\lambda} = \frac{1 + 2\,q'\cos 2\,\pi\,v}{1 - 2\,q'\cos 2\,\pi\,v},$$

so daß

$$\lambda = \sqrt{\varkappa}\,(1 - 4\,q'\cos 2\,\pi\,v + 8\,q'^2\cos^2 2\,\pi\,v - 16\,q'^3\cos^3 2\,\pi\,v)$$

wird. Nun gilt[2])

$$\sqrt{\varkappa'} = \frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta_3(0,q')} = 2\,q'^{\frac{1}{4}}\,\frac{1 + q'^2}{1 + 2\,q'}, \tag{62}$$

[1]) E. Jahnke und F. Emde, l. c. S. 48.
[2]) E. Jahnke und F. Emde, l. c. S. 48.

woraus
$$\varkappa'^2 = 16\,q'(1 - 8\,q' + 44\,q'^2 - 192\,q'^3) \tag{63}$$
und
$$\sqrt{\varkappa} = 1 - 4\,q' + 8\,q'^2 - 16\,q'^3 \tag{63'}$$
folgt, so daß sich nach (61) mit Benutzung von (59)
$$\frac{\lambda'^2}{16} = q'\cos^2\beta - 8\,q'^2\cos^4\beta + 4\,q'^3\cos^2\beta\,[8\cos^4\beta + 6\cos^2\beta - 3] \tag{64}$$
ergibt.

Wir haben nun noch das Rechteck Bild 13 in der χ-Ebene in der durch die eingeklammerten Zahlen an den Eckpunkten angegebenen Weise auf die t-Halbebene (Bild 14) abzubilden, und es handelt sich darum, $c = \psi\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ nachträglich zu bestimmen. Daß wir hier $\chi = \psi + i\,\varphi$ setzen, während wir früher $\chi = \varphi + i\,\psi$ hatten, macht nichts aus. Die Formeln werden dadurch etwas einfacher.

Es ist
$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{D}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \lambda^2 t^2)}}, \tag{65}$$

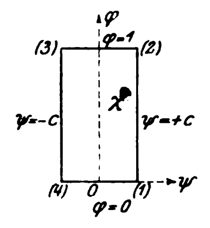


Bild 13.

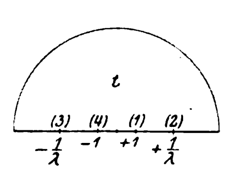


Bild 14.

also
$$t = \operatorname{sn}\left(\frac{\chi}{D}, \lambda\right). \tag{66}$$

Für $t = 1$ ist $\chi = c$

„ $t = \frac{1}{\lambda}$ „ $\chi = c + i$.

Da $\operatorname{sn}(K, \lambda) = 1$; $\operatorname{sn}(K + i\,K', \lambda) = \frac{1}{\lambda}$, so folgt
$$\frac{c}{D} = K;\quad \frac{c + i}{D} = K + i\,K', \text{ also } \frac{1}{D} = K';\quad c = \frac{K}{K'}.$$

Es ist
$$-c\,\pi = \ln q_1', \tag{67}$$
da
$$e^{-c\pi} = e^{-\frac{K}{K'}\pi} = q_1'$$
ist. Durch den Index 1 soll angedeutet werden, daß der Modul nicht $\varkappa$, sondern λ ist.

Nach (63) ist
$$\frac{\lambda'^2}{16} = q_1'(1 - 8\,q_1' + 44\,q_1'^2),$$
woraus durch Umkehrung
$$q_1' = \frac{\lambda'^2}{16}\left(1 + \frac{\lambda'^2}{2} + \frac{21}{64}\lambda'^4\right) \tag{68}$$
folgt. Setzt man in diese Gleichung den in (64) gefundenen Wert von λ' ein, so erhält man
$$q_1' = q'\cos^2\beta\,[1 - 12\,q'^2\sin^4\beta] \tag{69}$$
und nach (67) mit Benutzung von (60)
$$c = \frac{\Omega}{2\,b} - \frac{2}{\pi}(\beta\,\mathrm{tg}\,\beta + \ln\cos\beta) - \frac{4}{\pi}\sin^4\beta\, e^{-\frac{a\pi}{b} + 4\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}. \tag{70}$$

Der letzte Term rechts ist der Einfluß der endlichen Nutenteilung. Für $\frac{\mathfrak{L}}{b} = 8$, einen Wert, der praktisch vorkommt, ist $e^{-\frac{\mathfrak{L}\pi}{b}} = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$, d. h. **praktisch darf die Nutenteilung stets als unendlich groß aufgefaßt werden.**

Durch Kombination der Formeln (70) und (46) erhalten wir schließlich

$$Q = \frac{\mathfrak{L}}{b} - \frac{4}{\pi}\left[\beta \operatorname{tg}\beta + \ln\cos\beta\right] + \frac{16}{\pi}\sin^2\beta\, e^{-\frac{l\pi}{a} - 2\beta\operatorname{ctg}\beta} - \frac{8}{\pi}\sin^4\beta\, e^{-\frac{\mathfrak{L}\pi}{b} + 4\beta\operatorname{tg}\beta}. \quad (71)$$

Praktisch sind, wie wir gesehen haben, die letzten beiden Glieder zu vernachlässigen, wir haben also das einfache Resultat

$$Q = \frac{\mathfrak{L}}{b} - \frac{4}{\pi}(\beta \operatorname{tg}\beta + \ln\cos\beta) \quad (72)$$

mit

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}. \quad (73)$$

Nennen wir den Fluß, wenn keine Nuten vorhanden wären, $Q_0 = \frac{\mathfrak{L}}{b}$, so ist die Flußverminderung Δ infolge der Nuten

$$\Delta = Q_0 - Q = \frac{4}{\pi}(\beta \operatorname{tg}\beta + \ln\cos\beta). \quad (74)$$

5. Der magnetische Widerstand des Ankers.

Bisher haben wir die Permeabilität des Eisens als unendlich groß angesehen. Das hat seine Bedenken, da die Zähne sehr stark gesättigt sind, und wir werden wohl von den tatsächlichen Bedingungen nicht weit entfernt bleiben, wenn wir $\mu = 70$ annehmen.

Ist aber μ endlich, so ändert sich die Kraftlinienverteilung im Schlitz. Diese Änderung wird jedoch nicht sehr bedeutend sein, da μ immerhin noch recht groß ist. Wohl aber müssen wir die Änderung des magnetischen Widerstandes des Ankers infolge Anbringens der Nuten berücksichtigen, die jetzt berechnet werden soll.

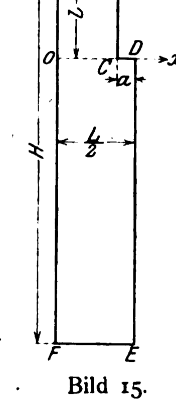


Bild 15.

Sehen wir wieder von der Krümmung ab, so stellt Bild 15 das Stück des Ankers dar, welches einem halben Zahn und einer halben Nute entspricht.

Wieder möge ABCD als Äquipotentialfläche aufgefaßt werden, d. h. wir berechnen eine untere Grenze des magnetischen Widerstandes[1]). Die Fläche EF befinde sich in der beliebigen, aber gegen die Nutentiefe l sehr großen Entfernung von der Begrenzungsfläche AB des Zahns. Dann wird EF auch eine Äquipotentialfläche sein, auf der etwa das Potential gleich Eins ist, während es auf ABCD den Wert Null hat.

Führen wir rechtwinklige Koordinaten mit den Ursprung O ein, wie das Bild es angibt, so haben wir das Problem zu lösen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (75)$$

für $y = -(H - l)$ $\qquad \varphi = 1 \quad (76)$

auf ABCD $\qquad \varphi = 0 \quad (77)$

für $x = 0$ $\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (78)$

[1]) Maxwell hat nämlich gezeigt (Lehrb. d. Elektr. u. d. Magnetism. 1, § 306), daß, wenn man eine Fläche die nicht Äquipotentialfläche ist, zu solcher macht, der Widerstand verkleinert wird.

für $x = \frac{\mathfrak{L}}{2}$ $\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ (79)

Als Funktion von x betrachtet, können wir uns φ in eine Fouriersche Reihe entwickelt denken, und genügen den Gleichungen (78) und (79), wenn wir setzen

$$\varphi = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} Y_\varkappa \cos \frac{2\varkappa\pi x}{\mathfrak{L}}. \tag{80}$$

Die $Y_\varkappa$ sind Funktionen von y, die wegen (75) die folgende Form haben

$$Y_0 = A_0 + A_0' y; \qquad Y_\varkappa = A_\varkappa \operatorname{Sin} \frac{2\pi\varkappa}{L} (y + \alpha_\varkappa) \qquad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots \tag{81}$$

Wegen (76) muß $\alpha_\varkappa = H - l$; $A_0' = \frac{A_0 - 1}{H - l}$ sein, so daß wir erhalten

$$\varphi = A_0 + \frac{A_0 - 1}{H - l} y + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} A_\varkappa \operatorname{Sin} \frac{2\pi\varkappa}{\mathfrak{L}} (H - l + y) \cos \frac{2\pi\varkappa x}{\mathfrak{L}}. \tag{82}$$

Bevor wir die A mittels (76) bestimmen, bemerken wir, daß das einzige, was uns interessiert der Kraftlinienfluß Q ist, den wir am einfachsten durch Integration längs EF berechnen. Es ist

$$Q = -2\mu \int_0^{\frac{\mathfrak{L}}{2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=-(H-l)} dx \quad . \tag{83}$$

Der Faktor 2 rührt daher, daß wir den Fluß haben wollen, der einem ganzen Zahn und einer ganzen Nut entspricht. Es ergibt sich aus (82) und (83)

$$Q = \frac{1 - A_0}{H - l} \mu \mathfrak{L}. \tag{84}$$

Ist l klein gegen H_0, so dürfen wir auf der gebrochenen Linie ABCD das y, welches im Argument der Sin-Funktionen vorkommt, gleich Null setzen[1]), erhalten also als Gleichung der gebrochenen Linie aus (82) mit Berücksichtigung von (77)

$$y = \frac{H - l}{1 - A_0} \left\{ A_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} A_\varkappa \operatorname{Sin} \frac{2\pi\varkappa}{\mathfrak{L}} (H - l) \cos \frac{2\pi\varkappa}{\mathfrak{L}} x \right\}. \tag{85}$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der A nach Fourier. Wir brauchen wegen (84) aber nur A_0 oder besser $1 - A_0$.

Integrieren wir (85) von 0 bis $\frac{\mathfrak{L}}{2}$, so erhalten wir direkt

$$\int_0^{\frac{\mathfrak{L}}{2}} y\, dx = \frac{H - l}{1 - A_0} \frac{A_0 \mathfrak{L}}{2}.$$

Andererseits ist dies Integral aber gleich dem Rechteck OCBA, d. h. gleich $\left(\frac{\mathfrak{L}}{2} - a\right) l$, sodaß wir erhalten

$$1 - A_0 = \frac{(H - l)\mathfrak{L}}{H\mathfrak{L} - 2al} \tag{86}$$

und aus (84)

$$Q = \frac{\mu \mathfrak{L}^2}{H\mathfrak{L} - 2al} = \frac{\mu \mathfrak{L}}{H} \left(1 + \frac{2al}{H\mathfrak{L}}\right) \text{ genähert.} \tag{87}$$

Der Widerstand wird also

$$W = \frac{1}{Q} = \frac{H}{\mu \mathfrak{L}} \left(1 - \frac{2al}{H\mathfrak{L}}\right) = \frac{H}{\mu \mathfrak{L}} - \frac{2al}{\mu \mathfrak{L}^2}. \tag{88}$$

Es wäre sinnlos, W als den Widerstand des betreffenden Teils des Ankers anzusehen, weil wir im ganzen Anker die Krümmung natürlich nicht vernachlässigen

[1]) Wegen dieses Verfahren vgl. man Lord Rayleigh, Phil. Mag (5) 1, S. 257; siehe auch R. H. Weber und R. Gans, Repertorium d. Physik I, 1. Leipzig u. Berlin 1915, S. 332.

dürfen. Nennen wir aber $W_0 = \frac{H}{\mu \mathfrak{L}}$ den Widerstand des doppelten Streifens Bild 14, wie er ohne Nut wäre, so ist

$$W_0 - W = \frac{2\,a\,l}{\mu \mathfrak{L}^2}. \tag{89}$$

Die Widerstandsverminderung durch Anbringung der Nut, und diese Formel kann für den behandelten Teil des wahren Ankers Gültigkeit beanspruchen.

Während es also praktischer war, bei Behandlung des Interferrikums die Flußverminderung Δ [siehe Gleichung (74)] zu berechnen, die durch die Nut hervorgerufen wird, ist nach (89) die infolge der Nut hervorgerufene Widerstandsverminderung ein einfacher (weil von H unabhängiger) Ausdruck. Beide Formeln zusammen geben den Gesamteinfluß der Nut.

Dem Elektrotechniker wird es geläufiger sein, wenn wir die Formeln (74) und (89) folgendermaßen in eine einzige zusammenfassen. Der kürzeste Luftweg ist b. Man kann das Vorhandensein der Nuten ignorieren, also die mittlere Kraftlinienlänge in dem Schlitz und dem Anker berechnen, als wenn dieser unten frei wäre, wenn man als Luftweg der Kraftlinien $b' = k\,b$ annimmt. Hier ist k der Faktor.

$$k = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L} - b\,\Delta} - \frac{2\,a\,l}{\mu \mathfrak{L} b}; \tag{90}$$

und zwar bedeutet, um es zu wiederholen, L die Nutenteilung, 2a die Nutenbreite, l die Nutentiefe, b den kürzesten Luftweg und Δ ist die durch (74) gegebene Funktion von a/b.

6. Zahlenwerte und Vergleich mit anderen Formeln.

Um unsere theoretischen Formeln bequem anwenden zu können, müssen wir vor allen Dingen Δ nach (74) berechnen. Es ergibt sich:

a/b	Δ	Δ'
0.0	0.0000	0.00
0.5	0.1530	0.18
1.0	0.5590	0.62
1.5	1.127	1.23
2.0	1.797	1.94
2.5	2.529	2.71
3.0	3.306	3.51
3.5	4.113	4.34
4.0	4.950	5.20

Δ ist in Bild 16 durch die Kurve g dargestellt. Nun hat Arnold[1]) durch eine gewisse Näherungsrechnung eine Formel für den Kraftlinienfluß gefunden, die in unserer Bezeichnungsweise lautet:

$$Q = \frac{\mathfrak{L} - 2\,a + b\,f}{b}, \tag{91}$$

wo f eine Funktion von $\frac{2\,a}{b}$ ist, die er ausrechnet und tabelliert. Nach ihm ist also die Flußveränderung

$$\Delta' = Q_0 - Q = \frac{2\,a}{b} - f\left(\frac{2\,a}{b}\right) \tag{92}$$

genau so wie bei uns eine reine Funktion von a/b, die in Bild 16 durch die Kurve A und in der vorstehenden Tabelle in der letzten Kolumne unter Δ' dargestellt ist.

Die Übereinstimmung zwischen Arnolds und unseren Werten ist als sehr gut zu bezeichnen. Unsere Zahlen sind dabei wegen der strengeren Methode als genauer anzusehen.

Außer dieser Darstellung gibt es noch eine andere von Ossanna[2]), von der gesagt wird, daß sie „vorzügliche Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ergibt". Diese lautet in unserer Schreibweise:

$$Q = Q_0 \frac{\mathfrak{L} - 2\,a + 8\,b}{\mathfrak{L} + 8\,b},$$

woraus

[1]) E. Arnold, Die Gleichstrommaschine, Verlag Julius Springer, Berlin. Mir ist das Werk unzugänglich; ich zitiere aus der französischen Übersetzung 1. Paris 1904, S. 241.

[2]) Siehe C. Heinke, Handbuch d. Elektrotechnik 5. S. 134.

$$Q_0 - Q = \frac{2\frac{a}{b}}{1 + 8\frac{b}{\mathfrak{L}}} \tag{93}$$

folgt. Hiernach wäre also die Flußverminderung keine reine Funktion von a/b, sondern hängt auch noch von $Q_0 = \mathfrak{L}/b$ selbst ab. Als Funktion von a/b bei konstantem $\mathfrak{L}/b$ ist $Q_0 - Q$ eine gerade Linie. Wir haben solche Gerade für verschiedene Werte von $\mathfrak{L}/b$ in das Diagramm des Bildes 16 eingezeichnet, indem wir den betreffenden Wert von $\mathfrak{L}/b$ an die Gerade herangeschrieben haben. Wie man sieht, stimmen Ossonnas Δ-Werte in gewissen Gebieten besser mit unseren, in anderen besser mit Arnolds überein.

Um ein definitives Urteil über die Übereinstimmung der drei Formeln zu erlangen, stellen wir den maßgebenden Faktor k nach derselben zusammen.

Nach Gans: $k = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L} - b\Delta} - \frac{2al}{\mu \mathfrak{L} b}$,

nach Arnold: $k = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L} - b\Delta'}$, (94)

nach Ossanna: $k = \frac{\mathfrak{L} + 8b}{\mathfrak{L} + 8b - 2a}$.

An einem Zahlenbeispiel, das praktischen Verhältnissen entspricht, wollen wir die drei Werte miteinander vergleichen, müssen jedoch in unserer Formel $\mu = \infty$ setzen, um sie mit den beiden anderen in Parallele stellen zu können, da die Widerstandsänderung des Ankers infolge der Nut in den Faktoren von Arnold und Ossanna nicht berücksichtigt worden ist.

Es sei

die Nutenteilung	$L = 40$	mm
die Nutenbreite	$2a = 20$	„
die Nutentiefe	$l = 60$	„
der kürzeste Luftweg	$b = 5$	„

Dann ergibt sich durch Einsetzen in (94)

nach Gans	$k = 1{,}290$
nach Arnold	$k = 1{,}320$
nach Ossanna	$k = 1{,}333$.

Die Übereinstimmung ist wohl als recht befriedigend zu bezeichnen.

Nehmen wir in unserer Formel μ nicht unendlich groß an, sondern, wie es den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, etwa $\mu = 70$, so ergibt sich $k = 1{,}204$. Mit diesem Faktor ist b zu multiplizieren, um den richtigen Widerstand zu bekommen, wenn man, sowohl was den Luftschlitz als auch den Anker anbetrifft, das Vorhandensein der Nuten ignorieren will.

La Plata, 24. November 1919. Instituto de Fisica.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 6. Heft. 1920.

Untersuchungen über Stromkurven hochgespannter intermittierender und pulsierender gleichgerichteter Ströme.

(Aus dem Forschungslaboratorium der Universitätsfrauenklinik Erlangen.

Von

Dr. rer. nat. et phil. **Friedrich Voltz.**

I. Einteilung der Arbeit.

Die vorliegende Arbeit soll in zusammenfassender Darstellung einen Überblick über eine große Reihe experimenteller Untersuchungen geben, die der Verfasser über die Stromkurven hochgespannter intermittierender und pulsierender gleichgerichteter Ströme für röntgentechnische Zwecke angestellt hat. Die Gliederung der Arbeit ist folgende:

I. Einteilung der Arbeit,
II. Die Erzeugung hochgespannter intermittierender und pulsierender Ströme,
III. Die Bedeutung der Stromkurven,
IV. Die Methoden zur Darstellung der Stromkurven,
V. Die Stromkurven intermittierender Ströme,
  a) ohne Belastung durch Röntgenröhren,
  b) mit Belastung durch Röntgenröhren,
VI. Theoretische und experimentelle Zusammenhänge,
VII. Die Stromkurven pulsierender Ströme,
  a) ohne Belastung durch Röntgenröhren,
  b) mit Belastung durch Röntgenröhren,
VIII. Zusammenfassung.

II. Die Erzeugung hochgespannter intermittierender und pulsierender Ströme.

Zum Betriebe von Röntgenröhren sowohl des „klassischen Typus" als auch des „modernen Typus"[1]) verwendet man in der Röntgentechnik entweder intermittierende oder pulsierende hochgespannte Ströme, durch deren Wirkung die Elektronen in den Röhren zu Geschwindigkeiten beschleunigt werden, die Röntgenstrahlengemische bestimmter Zusammensetzung zu erzeugen vermögen. Die Darstellung dieser Ströme geschieht entweder mittels der sogenannten Induktorapparate oder mittels der sogenannten Gleichrichterapparate. Induktorapparate erzeugen Ströme der Form, wie sie in Bild 1 schematisch dargestellt ist. Diese Ströme bezeichnet man als intermittierende gleichgerichtete Ströme.

Die Ströme, welche von den Gleichrichterapparaten erzeugt werden, haben die Form, wie sie Bild 2 schematisch wiedergibt. Diese Ströme bezeichnet man als pulsierende gleichgerichtete Ströme.

---

[1]) Als Röntgenröhren des „klassischen Typus" bezeichnet man entsprechend einem Vorschlag von Ludwig in der Röntgentechnik diejenigen Röntgenröhren, bei welchen das Kathodenstrahlenbündel durch Stoßionisation erzeugt wird, während man als Röntgenröhren des „modernen Typus" diejenigen Röntgenröhren bezeichnet, bei welchen das Kathodenstrahlenbündel mittels glühelektrischer Erscheinungen hervorgerufen wird. Vertreter dieses Typus sind die Coolidge-Röhre und die Lilienfeld-Röhre.

Der moderne Induktorapparat besteht entsprechend dem Bilde 3 aus einem großen leistungsfähigen Induktor, der durch sogenannte Gasunterbrecher U in Tätigkeit gesetzt wird. Die Gasunterbrecher sind Turbinenunterbrecher, bei welchen als Dielektrikum Leuchtgas oder Blaugas verwendet wird. Durch den Unterbrecher wird zugleich eine rotierende Schaltvorrichtung S im Hochspannungskreis betätigt. Diese bewirkt, daß die Schließungsinduktion, welche die Röntgenröhre rasch zerstören würde, nicht in die Röntgenröhre R gelangen kann. Die Röntgenröhre ist nur während der Öffnungsinduktion mit dem Hochspannungskreis verbunden.

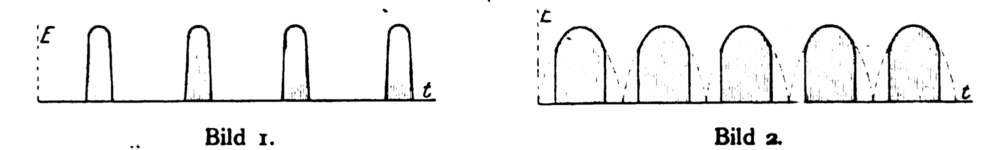


Bild 1. Bild 2.

Die zum Betriebe derartiger Induktoren verwendeten Gasunterbrecher sind meistens so eingerichtet, daß sie während einer Umdrehung den Strom viermal schließen und viermal öffnen. Steht als Primärstrom an Stelle von Gleichstrom Wechselstrom zur Verfügung, so erfolgt der Antrieb des Unterbrechers durch einen Synchronmotor. In Bild 4 ist der Unterbrechungsvorgang in die Wechselstromkurve eingezeichnet.

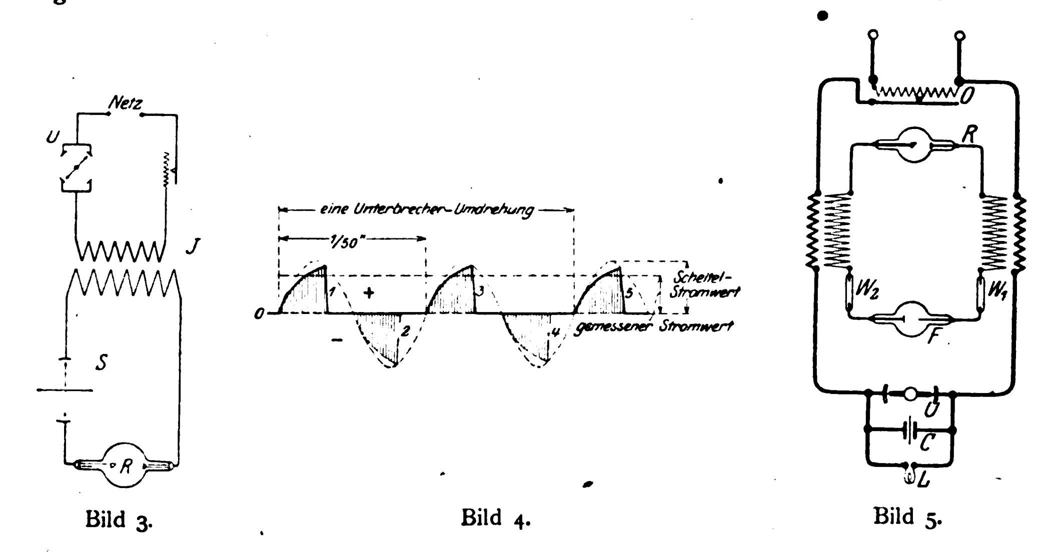


Bild 3. Bild 4. Bild 5.

Da die Induktoren für Wechselstrombetrieb meistens 2 Primärwickelungen besitzen, von denen die eine rechtsläufig, die andere linksläufig hergestellt ist, so können außer den positiv verlaufenden Wechseln auch die negativ verlaufenden Wechsel ausgenutzt werden. Auch bei Wechselstrombetrieb werden rotierende Schaltvorrichtungen im Hochspannungskreis angebracht, um die Schließungsinduktion von den Röntgenröhren fern zu halten.

Für besondere röntgentechnische Zwecke wird von dem einfachen Aufbau des Instrumentariums, entsprechend Bild 3, abgegangen und die symmetrische Anordnung gewählt, wie sie Bild 5 darstellt.

Dieses sogenannte Symmetrieinduktorium, wie es von der Reiniger, Gebbert & Schall A.-G.[1]) hergestellt wird, besteht aus zwei völlig getrennten Spulenhälften. In der einen sekundären Stromkreishälfte liegt die Röntgenröhre R und in der anderen

[1]) Wintz-Baumeister, Münchner med. Wochenschrift 1917. Nr. 6.

sekundären Stromkreishälfte eine Ventilfunkenstrecke F und zwei Wasserwiderstände W_1 und W_2. Der sekundäre Stromkreis ist also symmetrisch, ebenso wie auch der Primärkreis vollkommen symmetrisch aufgebaut ist. Auf der einen Seite dieses elektrischen Kreises befindet sich der Regulierwiderstand O zur Regulierung der Primärstromstärke, auf der anderen Seite befindet sich der Gasunterbrecher U und der Kondensator C, sowie eine Sicherheitslampe L. Durch diese symmetrische Schaltung von Röntgenröhre, Ventilfunkenstrecke und Induktoren wird, wie die Erfahrung gezeigt hat, das erreicht, was zur Erzeugung besonders kurzwelliger Röntgenstrahlenkomponenten notwendig ist. Erstens wird verhindert, daß die von der Funkenstrecke, wie von jeder ausgehenden, schnellen elektrischen Schwingungen zur Röntgenröhre gelangen und deren Widerstandswert herabsetzen, weil diese Schwingungen von den Windungen der Sekundärspulen und den Wasserwiderständen W_1 und W_2 abgedrosselt werden[1]). Die Ventilfunkenstrecke F hat in der Anordnung nach Bild 5 zwei Aufgaben zu erfüllen, einmal soll sie die Schließungsinduktion unterdrücken, dann soll sie eine spannungserhöhende Wirkung ausüben. Ihr Widerstandswert ist zu diesem Zwecke sehr hoch eingestellt, nämlich 10 cm Spitze-Platte. Die Spannung muß so hoch ansteigen bis der Widerstand der Röntgenröhre plus demjenigen der Ventilfunkenstrecke überwunden werden kann; dann erst erfolgt der Röntgenröhrendurchbruch. Zweitens kann bei der Anordnung nach Bild 5 die elektrische Aufladung, welche nach jedem einzelnen Stromstoß an den Elektroden der Röntgenröhre zurückbleibt und ebenfalls die Röntgenröhre leitfähiger macht, also auch den Widerstandswert derselben herabsetzt, zu den Metallmassen der Sekundärspulen abfließen, weil die die Leitung trennenden Vorrichtungen, wie Ventilfunkenstrecke usw. nicht zwischen Röntgenröhre und Induktoren liegen.

Welchen Einfluß diese elektrische Gestaltung des Hochspannungsgerätes auf die Form der Stromkurven der mit diesem Geräte erzeugten Ströme hat, wird in Abschnitt V dargestellt werden.

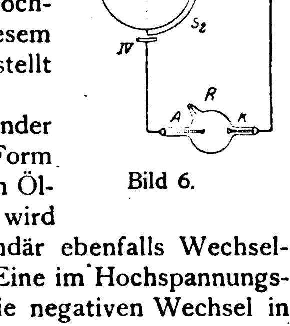


Bild 6.

Der Gleichrichterapparat, der zur Erzeugung pulsierender gleichgerichteter Ströme verwendet wird, deren prinzipielle Form in Bild 2 aufgezeichnet ist, besteht meistens aus einem großen Öltransformator T. Die Primärspule dieses Transformators wird mit technischem Wechselstrom gespeist. Man erhält sekundär ebenfalls Wechselstrom und zwar einer Spannung von ungefähr 150000 Volt. Eine im Hochspannungskreis befindliche Gleichrichtervorrichtung sorgt dafür, daß die negativen Wechsel in der gleichen Richtung verlaufen wie die positiven Wechsel. Das Apparateprinzip wird durch Bild 6 wiedergegeben. Es ist T der eisengeschlossene Öltransformator. G ist die Gleichrichtervorrichtung.

Sie besteht meistens aus einer großen Scheibe von sehr gut isolierendem Material mit etwa 60 cm Durchmesser. Der Antrieb der Scheibe erfolgt, soferne Wechselstrom direkt vorhanden ist, durch einen Synchronmotor. Ist Gleichstrom vorhanden, so wird der Wechselstrom für die Primärspule des Transformators durch einen Umformer erzeugt, der zugleich die Gleichrichterscheibe in Umdrehung versetzt. Auf der Peripherie der Gleichrichterscheibe sind zwei Metallamellen S_1 und S_2 angebracht, deren Endpunkte mit dem Mittelpunkt der Scheibe einen Winkel ω von ungefähr 100^0 bilden. Die Enden der einen Lamelle sind von den Enden der anderen Lamelle ungefähr 80^0 entfernt. Diese Scheibe mit den Metallamellen gleitet an vier Kontaktsegmenten I, II, III, IV vorbei, die um je 90^0 voneinander abstehen. Bei

[1]) Vgl. Janus, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 24, 453, 1917.

der nun synchron mit dem Wechselstrom vorsichgehenden Umdrehung der Gleichrichterscheibe sind dann jeweils die Kontaktsegmente in folgender Reihenfolge verbunden:

Durch S_1	Durch S_2
I und II	III und IV
II und III	IV und I
III und IV	I und II
IV und I	II und III.

Der Transformator ist mit den Kontaktsegmenten I und III verbunden, die Röntgenröhre mit den Kontaktsegmenten II und IV. Wenn I negativ ist und III positiv, so verläuft der Strom so, daß die Elektrode K der Röhre negativ ist und die Elektrode A positiv. Ist I positiv und III negativ, so verläuft der Strom so, daß K negativ bleibt und A positiv. Die Röntgenröhre erhält auf diese Weise nur einseitig verlaufenden Strom, wie ihn Bild 2 darstellt. Die auf diese Weise erzeugten Ströme bezeichnet man als pulsierende gleichgerichtete Ströme.

Bei diesen Apparaten werden am Gleichrichter bisweilen Veränderungen angebracht, um eine möglichst homogene kurzwellige Röntgenstrahlung zu erzeugen. Dies geschieht in der Weise, daß man die Dauer der Verbindung der einzelnen Kontaktsegmente miteinander verkürzt durch die Veränderung der Länge der Kontaktsegmente I, II, III, IV oder durch Veränderung des Winkels ω.

III. Die Bedeutung der Stromkurven.

In dem von einer Röntgenröhre ausgehenden Röntgenstrahlengemisch hat man es mit zwei Spektren zu tun, welche sich überlagern, einmal dem Bremsstrahlenspektrum, das andermal dem Eigenspektrum der Antikathode. Das Eigenspektrum der Antikathode ist ein Linienspektrum, das Bremsstrahlenspektrum ist ein kontinuierliches Spektrum. Das Eigenspektrum ist in seiner Zusammensetzung von der Natur des Materials der Antikathode abhängig. Das Bremsstrahlenspektrum ist durch die Geschwindigkeiten der Kathodenstrahlen in der Röntgenröhre bedingt. Je langsamer die Kathodenstrahlen in der Röntgenröhre sind, um so langwelliger werden die durch die Bremsung der Kathodenstrahlen entstehenden Röntgenstrahlen sein und umgekehrt, je schneller die Kathodenstrahlen in der Röntgenröhre sind, um so kurzwelliger sind auch die emittierten Röntgenstrahlen. Es gilt nach Wiechert[1]) für einen Bremswinkel von $\varphi = 90^0$ die Grundgleichung der Röntgenphysik

$$\lambda = c \cdot \tau. \qquad (1)$$

Es ist mit anderen Worten die Wellenlänge λ für das Bremsstrahlenspektrum gegeben durch die Geschwindigkeit c des Kathodenstrahlenelektrons einerseits und durch die Bremszeit τ des Elektrons andererseits. Kathodenstrahlengeschwindigkeit c und Bremszeit τ stehen naturgemäß in einem ganz bestimmten Zusammenhang. Dabei ist weiter darauf zu achten, daß selbst bei homogenen Kathodenstrahlengeschwindigkeiten verschiedene Bremszeiten entstehen werden, so daß also das emittierte Röntgenstrahlengemisch stets heterogen sein wird.

Die Kathodenstrahlengeschwindigkeit c ist ihrerseits wieder eine Funktion der an der Röntgenröhre anliegenden und zur Wirkung kommenden elektrischen Spannung. Die zur Wirkung kommende Spannung ist bei den Röntgenröhren des „klassischen Typus" abhängig von dem Grade der Luftleere der Röhre, während sie bei den Röntgenröhren des „modernen Typus" also der Coolidge-Röhre und der Lilienfeld-Röhre beliebig gestaltet werden kann durch elektrische Veränderungen im Apparatesystem. Es besteht somit zwischen der Impulsbreite λ eines Röntgenstrahles und dem Momentanwert der Spannung eine direkte Beziehung, welche durch die Gleichung (2) ausgedrückt ist.

[1]) Wiechert, Phys. Ökon. Gesellschaft Königsberg 1896.



$$\lambda = f(V_{mom}). \qquad (2)$$

Nach der Planckschen Quantentheorie kann von einer Strahlungsquelle ein Strahl bestimmter Wellenlänge erst dann ausgesandt werden, wenn in der Strahlungsquelle die Energie E_0 aufgespeichert ist und für welche die Beziehung gilt:

$$E_0 = \frac{h \cdot c}{\lambda}. \qquad (3)$$

In dieser Gleichung bedeutet h die Planksche Konstante, λ die Wellenlänge und c die Lichtgeschwindigkeit. Nun ist:

$$h = 6{,}52 \cdot 10^{-27} \text{ Erg/sec} \qquad (4)$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec} \qquad (5)$$

$$E_0 = V \cdot e. \qquad (6)$$

In der Gleichung (6) bedeuten V die Spannung in elektrostatischen Einheiten und e die Ladung eines Elektrons. Für die Ladung des Elektrons gilt:

$$e = 4{,}77 \cdot 10^{-10} \text{ elektrostat. Einheiten.} \qquad (7)$$

Aus den Gleichungen (3) und (6) ergibt sich die nachfolgende Beziehung:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{V \cdot e}. \qquad (8)$$

Diese Beziehung (8) wurde durch die Versuche von Duane und Hunt[1]) und durch die gleichzeitigen Versuche von Webster[2]) bestätigt, und es ergibt sich, daß die Energie bestimmter Wellenlängen erst merkbar wird, wenn bestimmte Minimalspannungen überschritten sind, wobei bemerkt sei, daß die Versuche dieser Autoren sich auf das Bremsstrahlenspektrum beziehen. Diese Minimalspannungen genügen sehr gut der Gleichung (8), welche sich nach Einstein auch in der Form (9) schreiben läßt.

$$e \cdot V = h \cdot \nu. \qquad (9)$$

Es ist also zur Erregung einer Strahlung (Bremsstrahlung) von der Frequenz ν eine Elektronengeschwindigkeit notwendig, die durch die Gleichung (9) bestimmt ist und wobei h die Planksche Konstante, e die Elementarladung und V die Voltgeschwindigkeit ist. Die Eigenstrahlung wird erst dann erregt, wenn die Spannung etwas höher getrieben worden ist. Setzt man in die Gleichung (9) die Werte der Beziehungen 4 und 7 ein und wertet die Gleichung dann aus, so ergibt sich:

$$V = \frac{12{,}3}{\lambda_{\text{ÅE}}} \text{ Kilo Volt.} \qquad (10)$$

Hier ist $\lambda_{\text{ÅE}}$ die Wellenlänge der zu erregenden Strahlung in Ångström-Einheiten (Größenordnung 10^{-8} cm).

Von einer Röntgenröhre werden also, allgemein betrachtet, so viele Strahlen verschiedener Wellenlänge ausgehen, als an der Röntgenröhre momentane Spannungswerte anliegen und zur Wirkung kommen. Der Zusammenhang zwischen der Röhrenspannung und dem Wellenlängenmittelwert[3]) des emittierten Röntgenstrahlengemisches ist auch durch experimentelle Arbeiten verschiedener Autoren wie Klingelfuß[4]), Dessauer[5]), Voltz[6]) und andere bestätigt worden.

Ist die Wellenlänge der Röntgenstrahlen durch die momentanen Spannungswerte gegeben, so ist die Zusammensetzung des Bremsstrahlenspektrums für jeden einzelnen Entladungsstoß, der durch eine Röntgenröhre hindurch geht, in Bezug auf die Strahlen verschiedener Wellenlänge durch den jeweiligen Verlauf der Spannungskurve an der Röntgenröhre relativ gekennzeichnet. Die Spektraluntersuchungen

[1]) Duane und Hunt, Phys. Rev. 6, 1915, 166.
[2]) Webster, Proc. Nat. Acad. 2, 1916, 90.
[3]) Voltz, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen. 26, 1918, Heft 1.
[4]) Klingelfuß, Strahlentherapie 3. 772.
[5]) Dessauer, Physikalische Zeitschrift 14. 246, 1913.
[6]) Voltz, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 24, 1916, Heft 2, 3, 4.

von Duane und Hunt[1]) zeigen deutlich, daß mit wachsenden Spannungen an einer Röntgenröhre das Spektrum eines Röntgenstrahlengemisches sich ständig weiter nach den kürzeren Wellen zu ausdehnt.

Von einer Reihe von Autoren wie Rosenthal[2]), Dessauer[3]), Voltz[4]) und anderen ist nun früher bereits gezeigt worden, daß die Zusammensetzung eines Röntgenstrahlengemisches, also der Wellenlängenmittelwert [Voltz[5])] des Gemisches von der Form der Entladung an der Röhre abhängt. Dessauer[3]) insbesondere hat nachgewiesen, daß das emittierte Röntgenstrahlengemisch sich aus einer Reihe von Komponenten verschiedenen Wellenlängenmittelwertes zusammensetzt und daß diese Komponenten bedingt sind durch Partialentladungen, die durch die Röhre hindurchgehen. Voltz[4]) hat ebenfalls nachgewiesen, daß eine Entladung aus einer Reihe von Partialentladungen bestehen kann.

Spannungskurvenaufnahmen an Röntgentransformatoren beim Betriebe verschiedener Röntgenröhren sind von Wertheimer[6]), Deguisne[7]) und Wehnelt[8]) gemacht worden. Auch diese Autoren zeigen, daß die Entladungen, die durch eine Röntgenröhre hindurchgehen, in Partialentladungen zerfallen. Auf diese Arbeiten wird im folgenden mehrmals zurückgegriffen werden müssen, insbesondere weil hier ebenfalls dargetan ist, wie die Form der Entladung von der Betriebsform und dem Betriebszustand der Röntgenröhre abhängig ist.

Den Spannungsverlauf an einer Röntgenröhre festzuhalten ist wegen der Kompliziertheit der Versuchsanordnung und wegen der vielen Störungen, die auftreten können, außerordentlich schwierig, vor allem aber deswegen, weil die Röhre während des Betriebes ziemlich unregelmäßig arbeitet. Viel einfacher und übersichtlicher ist es die Stromkurven zu untersuchen. Zwischen der Form der Stromkurve und der Form der Spannungskurve bestehen, wie aus den bisher vorliegenden Versuchsresultaten der im vorausgehenden genannten Autoren sich ergibt, bestimmte Zusammenhänge. Es liegen über den Stromkurvenverlauf an Röntgenröhren beim Betriebe mit Funkeninduktoren und mit Funkentransformatoren bereits eine größere Reihe systematischer Versuche des Verfassers vor, die in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden. Aus denselben ergibt sich, daß die Form der Stromkurve einen bestimmten Einfluß auf die Zusammensetzung des Strahlengemisches ausübt. Jeder Änderung der Form der Stromkurve während des Betriebes der Röntgenröhre entspricht eine Änderung der spektralen Verteilung des emittierten Röntgenstrahlengemisches und umgekehrt.

Das Studium des Verlaufes der Stromkurven beim Betriebe von Röntgenröhren ist also für das Studium der Zusammensetzung des jeweils emittierten Gemisches von Bedeutung und besonders wichtig für den Aufbau und Ausbau der technischen Methoden zur Erzeugung der Röntgenstrahlen. Inwieweit das Studium der Stromkurven auch mitbestimmend war für den Aufbau der in Abschnitt II dargelegten technischen Methoden soll in den folgenden Abschnitten noch eingehender behandelt werden.

IV. Die Methoden zur Darstellung der Stromkurven.

Zur Darstellung der Stromkurven hochgespannter Ströme stehen drei Hilfsmittel zur Verfügung:

---

[1]) Duane und Hunt, Phys. Rev. 6, 1915, 166.
[2]) Rosenthal, Verhandlungen d. deutschen Röntgengesellschaft 4, 67, 1908.
[3]) Dessauer, Physikalische Zeitschrift 14, 246, 1913.
[4]) Voltz, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 24, 1916, Heft 2, 3, 4.
[5]) — Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 26, 1918, Heft 1.
[6]) Wertheimer, Dissertation Göttingen 1911.
[7]) Deguisne, Physikalische Zeitschrift 15, 1914, 630 und 17, 1916, 106.
[8]) Wehnelt, Annalen der Physik 47, 1915, 1112.



1. die Braunsche Röhre,
2. die Joubertschen Scheiben,
3. die Lessing-Gehrkesche Röhre.

1. Die Braunsche Röhre. Will man mit der Braunschen Röhre die Stromkurven der hochgespannten Ströme untersuchen, so ordnet man an einer solchen Röhre zwei koaxiale Magnetspulen derartig an, daß die Spulenachse auf der Röhrenachse senkrecht steht. Werden die Spulen von dem Strome, dessen Stromkurven man aufnehmen will, durchflossen, so wird das Kathodenstrahlenbündel und damit auch der Fluoreszenzfleck auf dem Fluoreszenzschirm proportional der Intensität des magnetischen Feldes und damit der die Spulen durchfließenden Stromstärke in einer senkrecht zur Röhre und Spulenachse verlaufenden Richtung abgelenkt.

Die Bewegungen des Fluoreszenzfleckes können vermittels eines rotierenden Spiegels beobachtet oder auf einer bewegten photographischen Schicht festgehalten werden. Richtet man den rotierenden Spiegel so ein, daß er synchron mit dem Stromverlauf rotiert, so wird man die Stromkurven als ruhig stehendes Bild beobachten können.

Die Methode der Aufnahme der Stromkurven mittels der Braunschen Röhre hat aber für die hier in Betracht kommenden Fälle gewisse Nachteile. Die hohen Spannungen, die anliegen, bewirken Verzerrungen, und es ist fast kaum möglich, für systematische Untersuchungen konstante Verhältnisse zu erreichen.

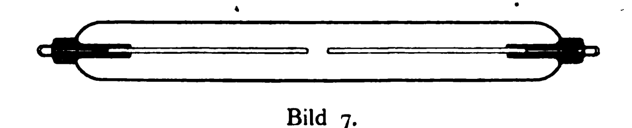


Bild 7.

2. Die Joubertschen Scheiben. Die Joubertsche Scheibe wird auf die Achse des Unterbrechermotors oder des Gleichrichtermotors direkt aufgesetzt. Meistens bringt man zwei derartige Scheiben an, um gleichzeitig Strom- und Spannungsmessungen vornehmen zu können. An der Peripherie der Scheibe ist ein leitender Kontakt angebracht. Der auf der Peripherie der Scheibe angebrachte Kontakt berührt bei jedem Umlauf eine feststehende, aber mit einem konzentrischen Teilkreise längs der Peripherie der Scheibe einstellbare Feder in einer durch ihre Einstellung bestimmten Phase des Umlaufes.

Mit der Kontaktleitung werden die Zuleitungen zum Hochspannungskreis verbunden und gleichzeitig an die Kontaktleitung die Pole eines Elektrometers oder Galvanometers angeschaltet. Dem Meßinstrument sei ein Kondensator geeigneter Größe parallel geschaltet. Der Ausschlag zeigt den Strom an dem gewählten Punkte an. Die Stromkurve konstruiert man aus einer Anzahl solcher Bestimmungen.

Diese Methode hat für röntgentechnische Zwecke den Nachteil, daß erstens durch die hohen Spannungen Störungen im Galvanometer oder Elektrometer auftreten und daß andererseits die Feststellung der Kurven eine ganze Reihe von Messungen beansprucht, während deren sich der Röntgenröhrenzustand in den meisten Fällen erheblich geändert hat.

3. Die Lessing-Gehrkesche Röhre. Die geeignetste und einfachste Methode die Stromkurven hochgespannter intermittierender und pulsierender Ströme darzustellen, ist ihre Aufnahme vermittels der Lessing-Gehrkeschen Röhre. Dieselbe besteht in der Form, wie sie heute in der Röntgentechnik angewendet wird, aus einer einfachen zylindrischen Geißlerröhre mit axialen sich gegenüberstehenden Drahtelektroden. Bild 7 zeigt eine derartige Röhre. Ihre Wirkungsweise als Hilfsmittel zur Analyse der Stromkurven beruht darauf, daß das negative Glimmlicht an der Kathode einer Geißlerröhre so lange eine der Stromstärke proportionale Fläche bedeckt, als es die Kathode noch nicht ganz überzieht. Besteht

die Kathode der Röhre, wie bei den in der Röntgentechnik gebräuchlichen Röhren aus einem Draht, so wird derselbe in einer der Stromstärke proportionalen Länge vom Glimmlicht überzogen[1]). Die Trägheit des Glimmlichtes ist nach den Untersuchungen von Lessing[2]) so gering, daß sie bisher überhaupt noch nicht nachweisbar war.

Will man die Sekundärstromkurve untersuchen, so braucht man den Sekundärstrom nur durch die Röhre hindurchzusenden und das Glimmlicht im rotierenden Spiegel betrachten, dessen Achse mit der Achse der Oszillographenröhre parallel läuft. Man erblickt dann die zeitlich aufeinander folgenden Phasen des Stromverlaufes räumlich nebeneinander. Die gesuchte Stromkurve bildet die Begrenzungslinie des Glimmlichtbildes. Die Kurven kann man auch photographisch festhalten, indem man eine photographische Schicht schnell an der leuchtenden Röhre vorbeibewegt.



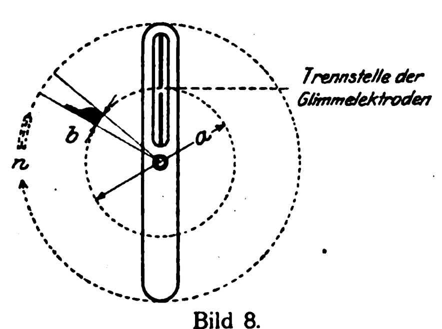


Bild 8.

Die Betrachtung der Stromkurve im rotierenden Spiegel hat aber den einen Nachteil, daß das im Spiegel erscheinende Bild nur von bestimmten Punkten des Raumes aus und auch da nur wieder in Teilerscheinungen und als flackerndes Bild zu beobachten ist. Dieser Nachteil wurde von dem Verfasser durch seinen von ihm angegebenen[3]) Kurvenindikator beseitigt. Die Methode des Verfassers sei im folgenden näher beschrieben, da die in den weiteren Abschnitten dargestellten Untersuchungen der Stromkurven sämtlich mit dieser Methode gemacht sind. Bild 8 zeigt das Prinzip des Apparates. Eine Glimmlichtröhre besonderer Konstruktion mit Drahtelektroden ist in einen großen Flügel, eine Art Propeller eingebaut und zwar derart, daß die Glaswand der Röhre zusammen mit dem Flügel eine einzige Fläche bildet und damit der Luft keinen Widerstand mehr bieten kann. Der Flügel wird durch einen kräftigen Motor in rasche Rotation versetzt. Die Tourenzahl des Motors ist durch einen in den Stromkreis eingebauten Regulierwiderstand beliebig fein einstellbar. Die Zuleitungen des Hochspannungskreises erfolgen durch die Achse des Flügels einerseits und durch einen mit dem anderen Pol der Glimmlichtröhre verbundenen Schleifring andererseits. Die Stromzuführung zu dem Schleifring erfolgt dadurch, daß auf dem Schleifring eine Kohlebürste schleift, die mit dem Hochspannungskreis in leitender Verbindung steht.

Der Flügel kann also während des Betriebes der Glimmlichtröhre in rasche Rotation versetzt werden und der Glimmlichtröhre wird während des Betriebes dauernd Strom zugeführt. Dadurch wird dann das Glimmlicht der Röhre zum Kurvenbild auseinander gezogen, wobei allerdings zu beachten ist, daß infolge der radialen Entstehungsform Verzeichnungen der Kurvenbilder entstehen. In Anbetracht der Tatsache, daß man mit dieser Vorrichtung stets eine Reihe von Entladungsvorgängen beobachten kann, ist man bei der Feststellung von Veränderungen nicht nur auf Teilerscheinungen beschränkt, sondern kann diese Veränderungen im Zusammenhang mit anderen Vorgängen bequem studieren.

Durch Regulierung an dem Widerstand des Motorkreises läßt es sich erreichen, daß der Flügel synchron mit dem Unterbrecher beziehungsweise mit dem Motor des Hochspannungsgleichrichterapparates läuft. Der Synchronismus kann auch

[1]) Hehl, Dissertation Erlangen 1901.
[2]) Lessing, Dissertation Erlangen 1902.
[3]) Voltz, Physikalische Zeitschrift 16, 1915, 133. — Voltz, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen Bd. 24, 1916, Heft 2, 3, 4.

dadurch erreicht werden, daß man die Achse des Propellers mit der Achse des Unterbrechermotors oder der Achse des Gleichrichters direkt kuppelt. Das Kurvenbild bleibt dann vor den Augen des Beschauers ruhig stehen, kann ruhig betrachtet und ohne besondere Schwierigkeiten mit jedem gewöhnlichen photographischen Apparat im Bilde festgehalten werden. Bei den Aufnahmen ist es allerdings um klare und scharfe Kurvenbilder zu erhalten erwünscht, ein besonderes lichtstarkes Objektiv zu verwenden, da es sich bei diesen Aufnahmen teilweise um Lichterscheinungen handelt, die einen großen Anteil an photographisch wenig wirksamen Strahlen enthalten. Bild 9 zeigt ein Modell eines derartigen Kurvenapparates.

An der Vorrichtung hat dann der Verfasser im Laufe seiner systematischen Untersuchungen noch eine Meßvorrichtung angebracht, die in einem um die Achse des Propellers drehbaren Meßstab bestand, der über eine an der Peripherie der Schutzvorrichtung befindliche und in 360° eingeteilte Kreisskala lief. Durch diese Meßvorrichtung war es möglich, sowohl die Höhe des Glimmlichtes in Millimetern abzulesen, als auch die Größe der Basis der Stromkurven in gleichem Maße durch rechnerische Auswertung der Winkelgrade festzustellen. Ebenso konnte die Höhe des Glimmlichtes einzelner Teilentladungen und ihre Breite in Millimetern in der gleichen Weise festgelegt werden. Dadurch konnte jede einzelne Entladungskurve genau untersucht und graphisch ausgewertet werden.



Bild 9.

V. Die Stromkurven intermittierender Ströme.

a) Die Stromkurven ohne Belastung des Hochspannungskreises durch Röntgenröhren.

Die Entladung, welche von einem Funkeninduktorium geliefert wird, besteht aus einem Schließungsinduktionsstoß, der der Schließung des Stromes im Primärkreis entspricht und dem Öffnungsinduktionsstoß, der bei der Öffnung des Stromes zustande kommt. Soferne man bei dem elektrischen Aufbau entsprechend Bild 3 die rotierende Schaltvorrichtung im Hochspannungskreis kurz schließt und die rotierende Glimmlichtröhre direkt an die Hochspannungsquelle anschließt, erhält man ein Kurvenbild, wie es Abb. 10 darstellt. Man sieht die negativen Phasen, welche die Schließungsinduktion bedeuten und die positiven Phasen, welche die Öffnungsinduktion darstellen.

Man erkennt aus dem graphisch ausgewerteten Bild, daß die Öffnungsinduktion über einen relativ großen Winkel sich erstreckt. In Bild 10 ist dies der Winkel β. Die Schließungsinduktion erstreckt sich über den Winkel α; seine Größe ist von der Länge der Kontaktsegmente im Unterbrecher abhängig. Bei dem Bild in Abb. 11 ist der Kurzschluß der rotierenden Schaltvorrichtung beseitigt worden. Die Öffnungsinduktion kommt allein zur Geltung und zwar zerfällt auch sie ebenso wie bei Bild 10 in mehrere Schwingungen, über deren Bedeutung im folgenden noch eingehender berichtet wird.

Systematische Untersuchungen über die Gestaltung der Stromkurven wurden von dem Verfasser nun vorgenommen, bei der durch Bild 5 dargestellten elektrischen Anordnung der Hochspannungsquelle. Es liegen zwei systematische Versuchsreihen vor.

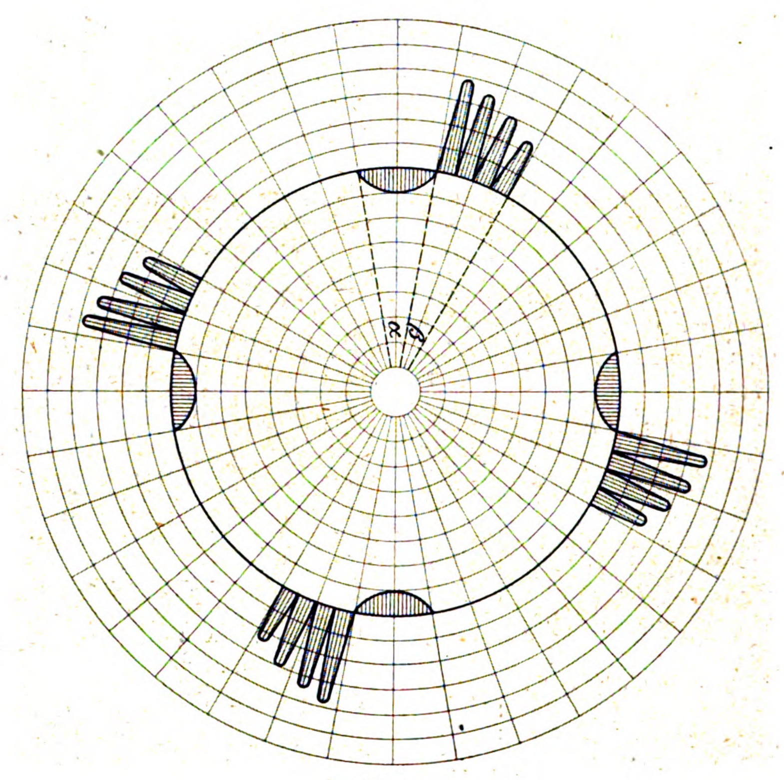


Bild 10.

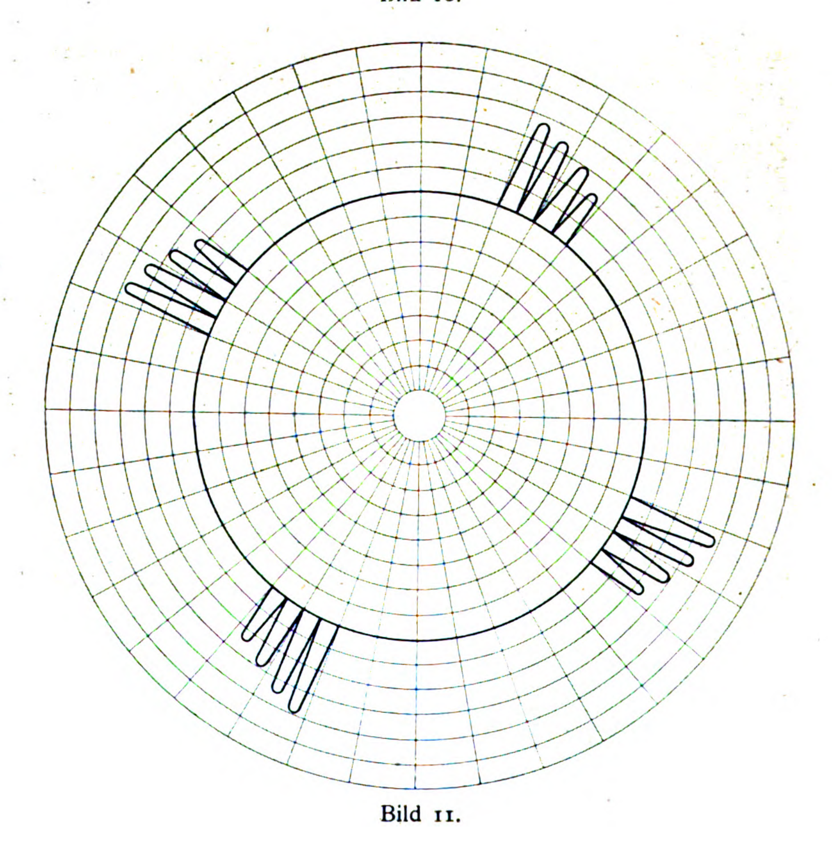


Bild 11.

1. Versuchsreihe.

Im Sekundärkreis des Symmetrieinduktoriums ist nur die Glimmlichtröhre eingeschaltet und jede Vorrichtung, die die Schließungsinduktion unterdrücken könnte, ausgeschaltet, also auch die Gasfunkenstrecke F, die zwischen den beiden

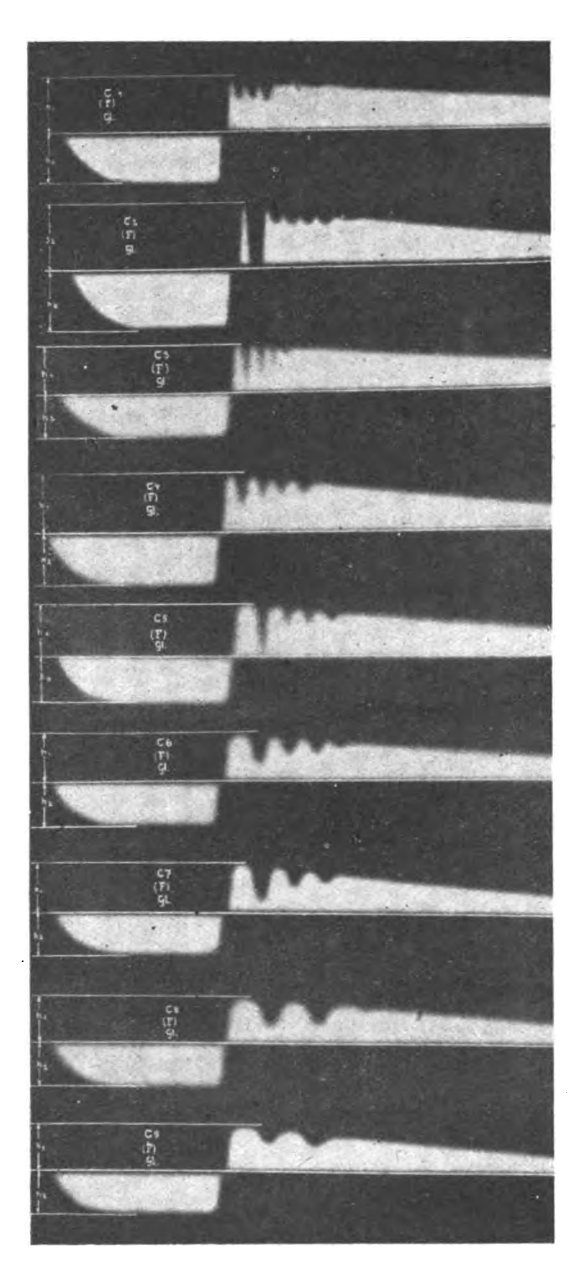


Bild 12.

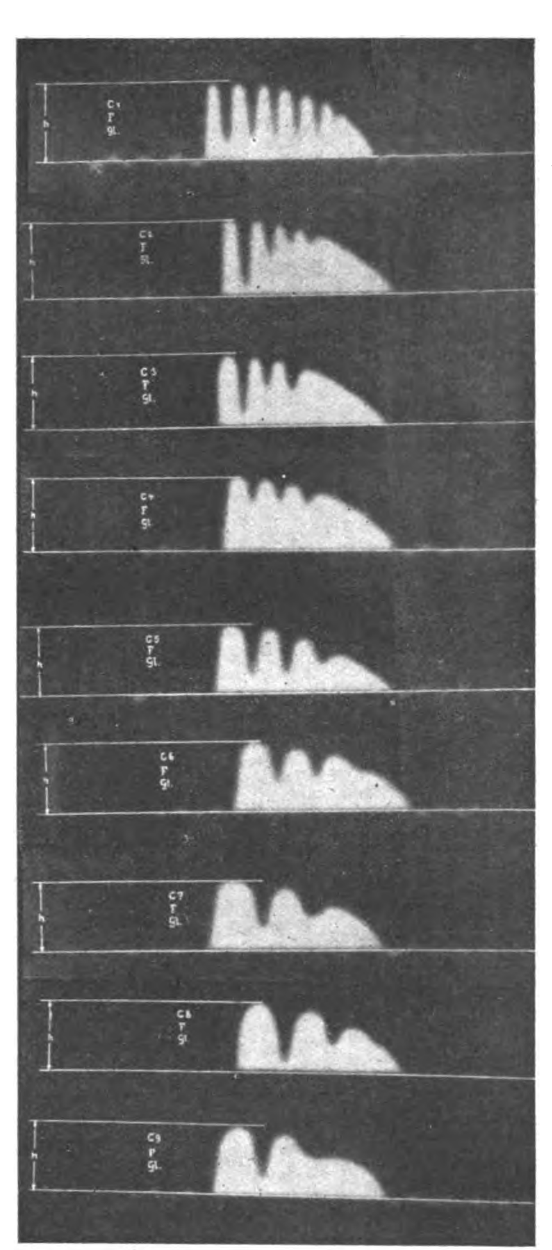


Bild 13.

Sekundärspulenhälften liegt. Verändert wurde während der Untersuchungen lediglich die Kapazität des Kondensators, welcher bei allen Induktorapparaten parallel zum Unterbrecher liegt, und zwar in den Grenzen $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Die gewonnenen Kurvenaufnahmen sind in Bild 12 zusammengestellt.

Man erkennt, daß bei Vergrößerung der Kapazität, die parallel zum Unterbrecher liegt, das Kurvenbild des Öffnungsstromstoßes sich verändert in dem Sinne, daß bei geringer Kapazität die Anzahl der Teilentladungen, welche in dem Kurvenbild auftreten, bedeutend größer ist als bei den großen Kapazitäten. Die Abnahme der Teilentladungen geht gleichmäßig vor sich, eine Erscheinung, die im Verlauf dieser Arbeit noch theoretisch untersucht werden soll.

2. Versuchsreihe.

Bei dieser Versuchsreihe war in dem Hochspannungskreis außer der rotierenden Glimmlichtröhre auch die Ventilfunkenstrecke F eingeschaltet. Die Schließungsinduktion, die in den Kurvenaufnahmen Bild 12 als entgegengerichtete Schwingung zu sehen ist, wird durch die Ventilfunkenstrecke F unterdrückt. Die sich ergebenden Kurvenbilder sind in Bild 13 zusammengestellt, wobei auch hier wieder systematisch die Größe der parallel zum Unterbrecher liegenden Kapazität in den Grenzen von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm verändert wurde.

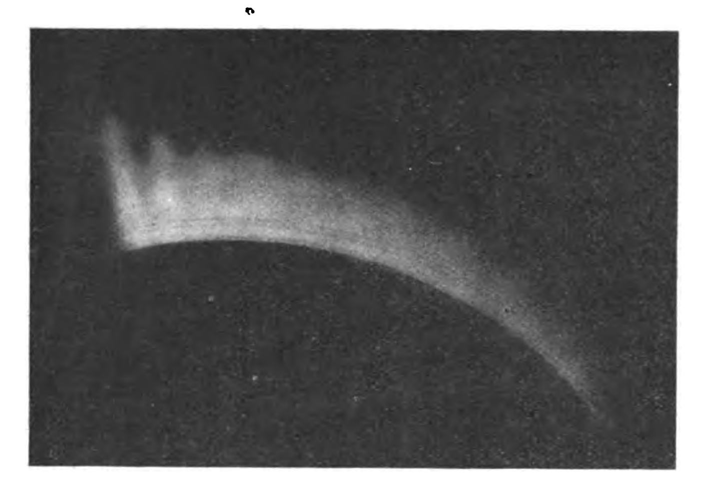


Bild 14.

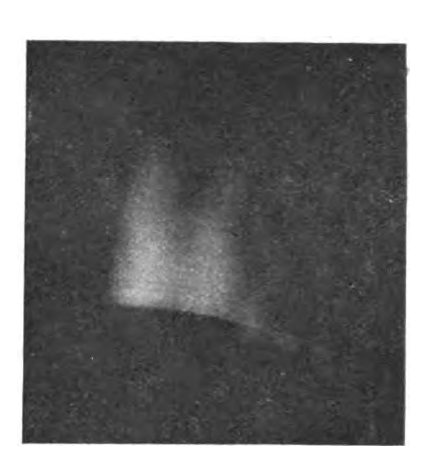


Bild 15.

Das Ergebnis der Untersuchungen ist genau das gleiche wie bei der ersten Versuchsreihe. Die Teilentladungen nehmen mit steigender Kapazität ab, nur sind die Teilentladungen stärker ausgeprägt als in den Kurven der 1. Versuchsreihe, da die eingeschaltete Ventilfunkenstrecke nicht nur den Schließungsinduktionsstoß abdrosselt, sondern auch die unteren Spannungswerte verschwinden läßt Der Entladungspotential ist in diesem Fall höher.

Die Abnahme der Teilentladung geht ebenso, wie in dem vorausgegangenen Fall, mit zunehmender Kapazität gleichmäßig vor sich.

Die nachfolgenden Bilder 14 und 15 zeigen zwei photographische Aufnahmen solcher Stromkurvenbilder. Bild 14 zeigt die Entladung bei einer kleinen Kapazität, während Bild 15 die Stromkurve bei erhöhter Kapazität darstellt.

b) Die Stromkurven mit Belastung des Hochspannungskreises durch Röntgenröhren.

Interessante Erscheinungen treten in den Stromkurvenbildern ein, wenn der Hochspannungskreis mit Röntgenröhren verschiedener Art und verschiedenen Zustandes belastet wird. Die nachfolgenden Bilder zeigen eine Reihe solcher Aufnahmen, die mit einem elektrischen System, wie es in Bild 4 dargestellt ist, gewonnen wurden, wobei verschiedene Versuchsbedingungen eingehalten wurden.

Bild 16 zeigt ein graphisch aufgenommenes Kurvenbild. Der Funkeninduktor wurde mit einem Gasunterbrecher, wie er in Abschnitt II beschrieben ist, betrieben. Man erkennt, wie die Entladung in Form einer Exponentialkurve abfällt und dann das ganze System in Form von Schwingungen ausklingt. Die Aufnahme wurde bei Belastung des Instrumentariums mit einer weichen Röhre gemacht. Es ergibt sich dabei, daß die eigentliche Entladung in eine Reihe von Partialentladungen zerfällt. Man erkennt 7 Teilentladungen, deren Amplituden kleiner werden. Es ist $c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > c_5 > c_6 > c_7$. Der Synchronismus zwischen dem Unterbrecher und der rotierenden Glimmlichtröhre war ein vollkommener, weswegen 4 Entladungen auf eine Umdrehung der rotierenden Glimmlichtröhre entfallen.

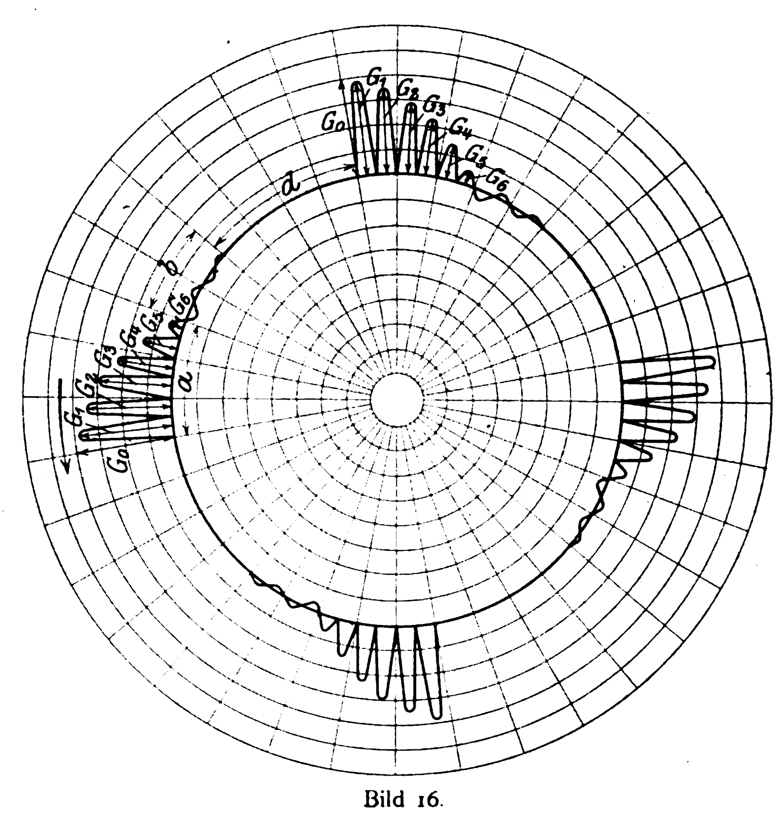


Bild 16.

Bild 17 gibt eine photographische Aufnahme der Stromkurve, die unter gleichen Versuchsbedingungen gemacht wurde, nur daß diesmal eine etwas härtere Röntgenröhre in den Hochspannungskreis eingeschaltet wurde. Auch hier kann man neben dem reinen Kurvenverlauf noch eine Reihe von Partialentladungen erkennen. Beim genauen Betrachten der Platte zeigt es sich, daß man 5 Teilentladungen hat. Außerdem ist der Abfall der Kurve steiler als der der Kurve in Bild 16.

Eine weitere photographische Aufnahme unter den gleichen Versuchsbedingungen gibt Bild 18. Die Röntgenröhre wurde hier aber wiederum härter gewählt. Man erkennt in dem Bilde eine einzige kräftige Entladung, nach deren Abfall das ganze System, ebenso wie es in Bild 16 der Fall war, in Schwingungen ausklingt.

Die bisherigen Aufnahmen zeigen bereits, daß das Stromkurvenbild auch abhängig ist von dem Betriebszustand der Röntgenröhre. Es ergibt sich, daß bei weicheren Röhren, also gashaltigeren Röhren die eigentliche Entladung in eine Reihe von Teilentladungen zerfällt, während bei härteren Röhren die Entladung nur aus wenigen oder unter Umständen nur aus einer einzigen Teilentladung besteht.

Worauf diese Erscheinung zurückzuführen ist, darauf soll später noch genauer eingegangen werden, ebenso wie das Wesen der Teilentladungen noch geklärt werden soll.

Noch bedeutend interessanter und deutlicher werden diese eben beschriebenen Erscheinungen, wenn man an Stelle des einfachen elektrischen Aufbaues des Funkeninduktoriums den Aufbau wählt, wie er in Bild 5 wiedergegeben ist. Hier liegen ebenfalls eine Reihe systematischer Untersuchungen des Verfassers vor, die im nachstehenden nun beschrieben werden sollen.

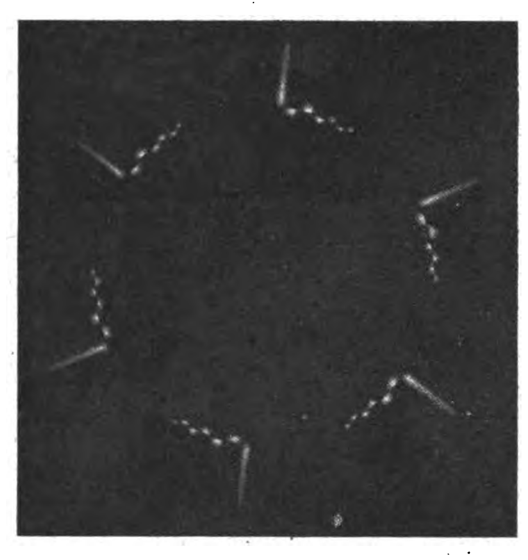


Bild 17.

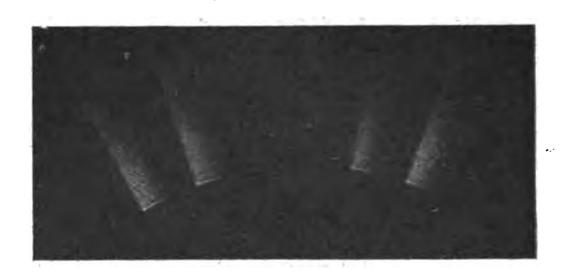


Bild 18.

1. Versuchsreihe.

Bei dieser Versuchsreihe wurde eine Röntgenröhre des modernen Typus und zwar eine Lilienfeld-Röhre mit dem in Abschnitt II beschriebenen Symmetrieinduktorium betrieben. Die Spannung für die Hilfsentladung, durch welche die Geschwindigkeit des Kathodenstrahlenbündels und damit die Durchdringungsfähigkeit des Röntgenstrahlenbündels bedingt ist, wurde in bekannter Weise reguliert. Bei dieser Versuchsreihe wurde ferner, wie in den beiden Versuchsreihen in Abschnitt Va die Kapazität, welche parallel zu dem mechanischen Unterbrecher liegt, in den Grenzen zwischen $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm verändert, wobei die Schaltung der Lilienfeld-Röntgenröhre so gewählt wurde, daß das emittierte Röntgenstrahlengemisch eine Farbenzusammensetzung von einem Wellenlängenmittelwert[1]) hatte, der mit 15 bezeichnet sei, entsprechend der Schaltung der Röhre. Gleichzeitig wurde das von der Röhre ausgehende Röntgenstrahlengemisch elektrometisch untersucht, um zugleich den Einfluß der Form der Entladung auf die Zusammensetzung des emittierten Röntgenstrahlengemisches zu studieren. Auf die Zusammenhänge wird dann in Verbindung mit den theoretischen Untersuchungen eingegangen werden. Während der Messung wurde die sekundäre Entladungskurve dargestellt und das durch den Synchronismus der Apparatur, der in der erwähnten Weise erzielt wurde, ruhig gestellte Kurvenbild graphisch ausgewertet und photographisch aufgenommen. Die in dieser Versuchsreihe gewonnenen Kurvenaufnahmen sind in dem Bilde 19 zusammengestellt.

[1]) Voltz, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen Band 26, Heft I, 1918.

Die Betrachtung des Bildes 19 läßt folgende Schlüsse zu: Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm zeigt die Stromkurve acht kräftige Entladungen, die in einer Exponentialkurve abzufallen scheinen. Die Kapazität $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt nur mehr

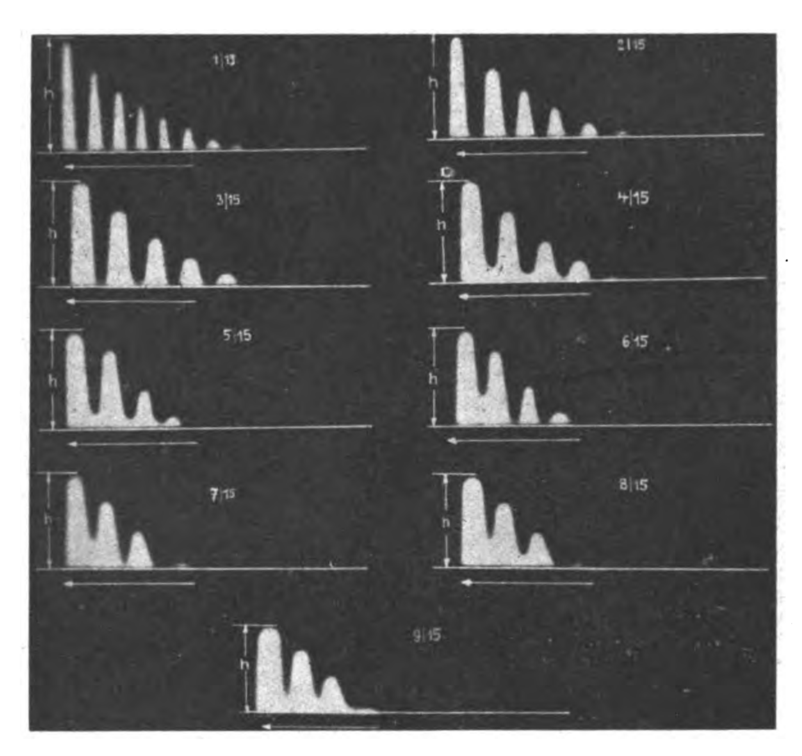


Bild 19.

sechs Teilentladungen; auch hier liegen die Scheitelwerte auf einer Exponentialkurve. Fünf Entladungen erhält man bei $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm Kapazität. Bei einer Kapazität von $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm sind es nur mehr vier Teilentladungen und bei einer solchen von

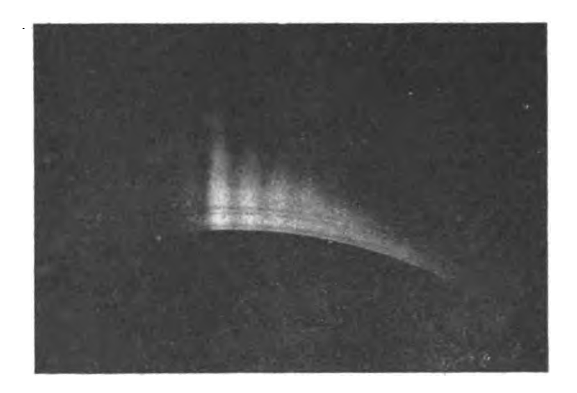


Bild 20.

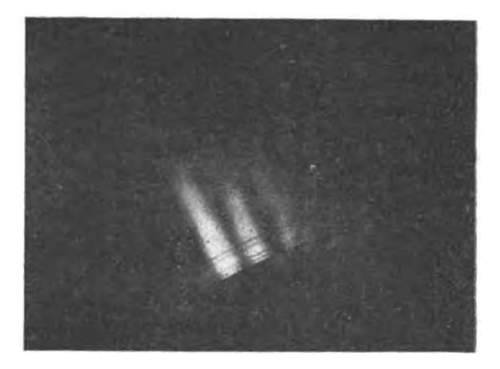


Bild 21.

$8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm sind es ebenfalls vier Einzelstromstöße. Das gleiche Bild hat man bei einer Kapazität von $6 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Bei einer Kapazität von $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und einer solchen von $8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm wird die vierte Teilentladung zu einer kleinen nachklingenden Entladung. Ebenso ist dies bei einer Kapazität von $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm der Fall.

Betrachtet man die Kurven in ihrer Folge weiter genauer, so sieht man, daß bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis etwa $4 \cdot 9 \cdot 10^6$ cm die einzelnen Teilentladungen voneinander isoliert zu sein scheinen, während bei der weiteren Vergrößerung der Kapazität die Teilentladungen ineinander übergehen.

Als Ergänzung zu Bild 19 mögen noch die Bilder 20, 21 und 22 beigefügt sein, welche photographische Aufnahmen der geschriebenen Erscheinungen darstellen.

Bild 20 zeigt die Entladung bei einer kleinen Kapazität. Es sind leider nicht sämtliche Teilentladungen auf der photographischen Platte sichtbar geworden.

Bild 21 gibt die Entladung bei etwas gesteigerter Kapazität wieder. Man kann in dem Bilde deutlich den Abfall der Kurven und die einzelnen Partialentladungen studieren.



Bild 22.

Bild 22 ist gewonnen worden, in dem die Kapazität bedeutend gesteigert wurde. Es ist zu erkennen, ebenso wie in den Aufnahmen des Bildes 19, daß durch die Steigerung der Kapazität eine Verringerung der Teilentladungen eingetreten ist.

2. Versuchereihe.

Bei dieser Versuchsreihe wurde die Lilienfeld-Röhre wieder mit dem Symmetrieinduktorium betrieben. Die Spannung für die Hilfsentladung war jedoch höher als bei der vorausgegangenen Versuchsreihe 1. Der Wellenlängenmittelwert des Gemisches sei mit 20 bezeichnet wieder entsprechend der elektrischen Schaltung der Röhre. Bei diesem Röhrenzustand wurden nun der Reihe nach ebenfalls die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ dem Unterbrecher parallel geschaltet und auch hierüber die Stromkurven untersucht und graphisch ausgewertet. Die aufgenommenen Kurven sind in Abb. 23 zusammengestellt. Die Betrachtung des Bildes 23 läßt folgende Schlüsse zu:

Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm zeigt das Kurvenbild acht kurze Entladungen, deren Maximalwerte wieder in einer Exponentialkurve abzufallen scheinen. Die Kapazität von $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt nur mehr sieben Teilentladungen. Auch hier liegen die Scheitelwerte auf einer Exponentialkurve. Fünf Teilentladungen erhält man bei $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm Kapazität. Bei einer Kapazität von $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm sind es fünf Teilentladungen, während bei einer solchen von $5 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm vier Teilstromstöße beobachtet werden. Eine kräftige Entladung und zwei kurze nachklingende Entladungen beobachtet man bei einer Kapazität von $6 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Eine Kapazitätssteigerung auf $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt eine kräftige Hauptentladung, die in zwei weiteren kleineren Teilentladungen ausklingt. Das gleiche Bild erhält man, wenn man an

Stelle von $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm $8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher parallel schaltet. Betrachtet man hier die Kurven genauer, so sieht man, daß bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm der einzelnen Teilentladungen voneinander isoliert zu sein scheinen, während bei der weiteren Steigerung der Kapazität die Partialentladungen ineinander übergreifen.

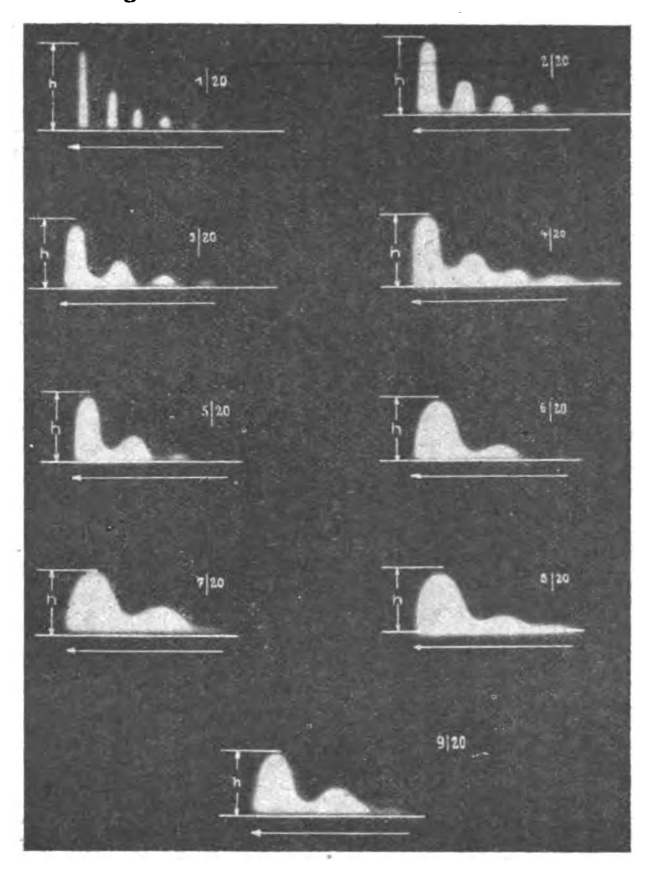


Bild 23.

3. Versuchsreihe.

Bei dieser Versuchsreihe wurde die gleiche Lilienfeld-Röhre wieder mit dem Symmetrieinstrumentarium betrieben, jedoch war die Spannung für die Hilfsentladung abermals gesteigert worden, so daß das Strahlengemisch damit kurzwelliger wurde.

Der Wellenlängenmittelwert dieses Gemisches sei entsprechend der Schaltung der Lilienfeld-Röhre mit 25 bezeichnet. Bei diesem Röhrenzustand wurden der Reihe nach ebenfalls die Kapazitäten $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher parallel geschaltet und auch hier wieder die Stromkurven untersucht und graphisch ausgewertet. Die meßbaren Größen wurden in der gleichen Weise beobachtet, wie dies bei der Versuchsreihe 1 ausführlich beschrieben worden ist. Die Kurvenaufnahmen, welche sich aus dieser Versuchsreihe ergaben, sind in Bild 24 dargestellt. Die Betrachtung des Bildes 24 läßt folgende Schlüsse zu: Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergeben sich im Kurvenbild 7 kräftige Entladungen, deren Maximalwerte wieder auf einer Exponentialkurve liegen. Die Anzahl der im Kurvenbild beobachteten Teilentladungen verringert sich auf 6 Teilentladungen, wenn man die Kapazität von $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm dem Unterbrecher parallel schaltet. Eine Steigerung der Kapazität auf $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergibt 5 Teilentladungen, die gleiche Anzahl von Teilstromstößen

erhält man bei einer Kapazität von $4 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Bei einer Kapazität von $5 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm erhält man nur mehr 4 Teilladungen, während die Steigerung der Kapazität auf $6 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm nur mehr 3 Teilladungen beobachten läßt, deren dritte sehr klein ist. Die Kapazität von $7 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm zeigt ebenfalls 3 Teilentladungen. Auch hier ist der dritte Stromstoß sehr klein. Die gleichen Stromkurvenbilder kann man beobachten bei den Kapazitäten $8 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm. Eine genauere Betrachtung der Stromkurvenbilder zeigt auch hier, daß teilweise die einzelnen Partialentladungen voneinander isoliert erscheinen. Vollständig ist dies aber nur der Fall bei der Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm, während bei den größeren Kapazitäten die Teilentladungen entweder ganz oder teilweise ineinander überfließen.

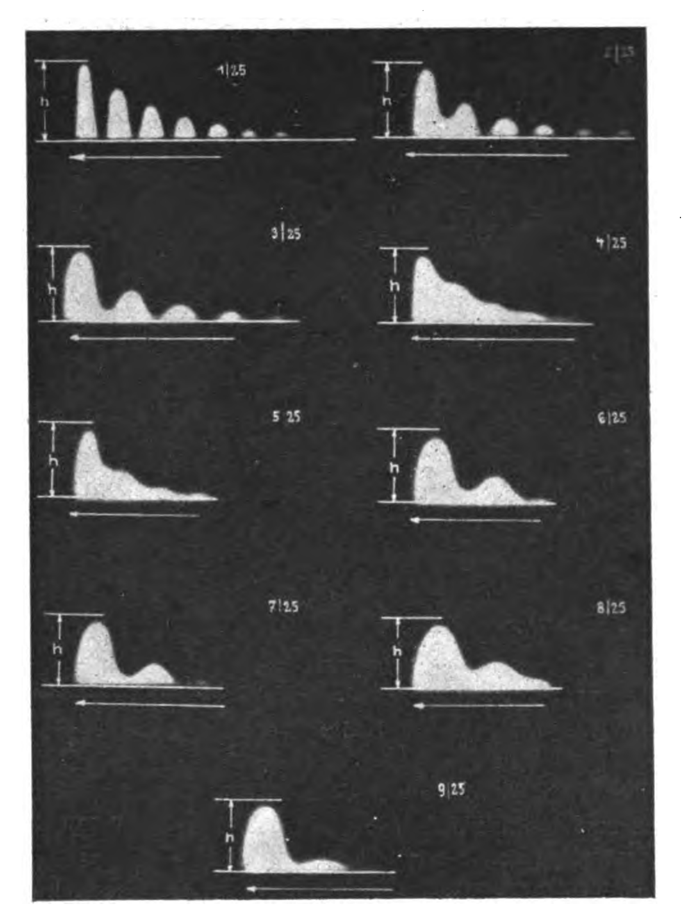


Bild 24.

4. Versuchsreihe.

In dieser Versuchsreihe wurde eine Coolidge-Röhre, also ebenfalls eine Röntgenröhre des modernen Typus, mit der elektrischen Anordnung entsprechend dem Bilde 5 betrieben. Der Strom für die Heizspirale der Coolidge-Röhre wurde von einer isoliert aufgestellten Akkumulatorenbatterie von 10 Volt geliefert. Die Heizstromstärke für die Glühspirale war unverändert, gemäß der Einstellung auf eine bestimmte sekundäre Stromstärke, 4,0 Ampere. Von einer Heizung der Glühspirale durch Umformer und Transformator wurde für die vorliegenden Versuche abgesehen, da für exakte Versuche die Spannungsschwankungen des Stadtstromnetzes größere Intensitätsschwankungen hervorriefen, als für die Genauigkeit der

Messungen zulässig ist. Für den konstanten Versuchsbetrieb der Coolidge-Röhre kann vorerst nur ein Akkumulator als Stromquelle für die Heizung verwendet werden. Die gewonnenen Kurvenaufnahmen sind in Bild 25 zusammengestellt. Die Betrachtung des Bildes 25 läßt folgende Schlüsse zu:

Bei einer Kapazität $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergeben sich im Kurvenbild eine Reihe von Teilentladungen, die allerdings nicht vollständig ausgeprägt sind. Man kann etwa fünf Teilentladungen erkennen. Die Anzahl der Teilentladungen, welche im Kurvenbild

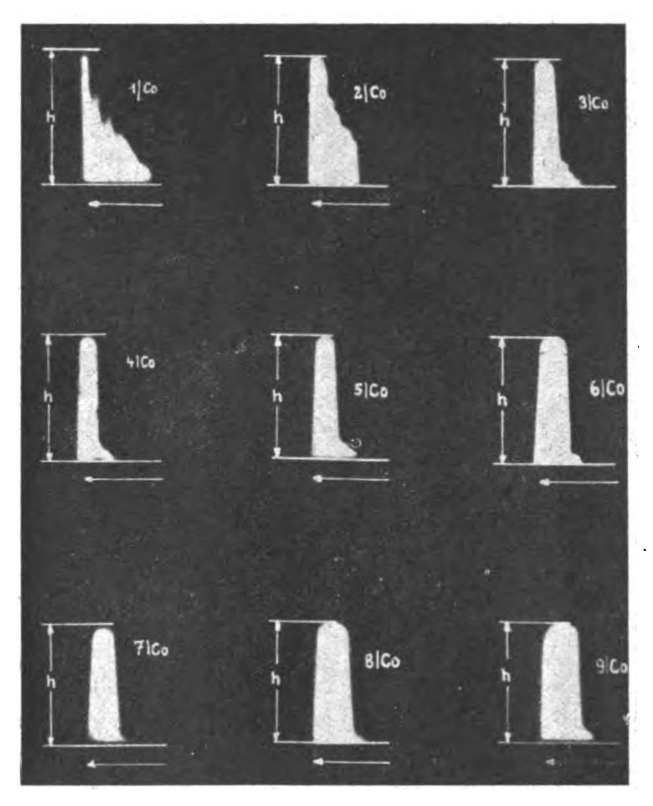


Bild 25.

beobachtet werden können, verringert sich, wenn die Kapazität auf $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm gesteigert wird. Auffällig ist hier das starke plötzliche Abfallen der Stromkurve. Eine weitere Steigerung der zum Unterbrecher U parallel liegenden Kapazität bewirkt, daß die Stromkurve aus einer einzigen Entladung besteht, der kleinere Teilentladungen nachfolgen. Diese Teilentladungen werden kleiner und kleiner und verschwinden bei einer Kapazität von $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm fast vollständig.

5. Versuchsreihe.

Diese Versuchsreihe wurde mit einer „selbsthärtenden Siederöhre“ [1]), das heißt also einer Röntgenröhre des klassischen Typus, die mit der gleichen elektrischen Anordnung betrieben wurde, gemacht. Die Konstanz der Röhre wurde durch einen Regenerierautomaten [2]) aufrecht erhalten. Die Kurvenbilder wurden in der gleichen Weise wie bei den vorausgegangenen Versuchsreihen ausgewertet und sind in Bild 26 dargestellt.

[1]) Wintz: Münchner med. Wochenschrift 1917, Nr. 29, 944.
[2]) Wintz: Münchner med. Wochenschrift 1916, Nr. 11, 382.

Die Betrachtung des Bildes 26 läßt folgende Schlüsse zu: Bei einer Kapazität von $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm ergeben sich im Kurvenbild drei Teilentladungen. Die Begrenzungslinien der Stromkurven beziehungsweise ihrer Teilentladungen sind aber nicht, wie man es in den vorausgegangenen Kurvenbildern beobachten konnte, scharf, sondern die eigentlichen Entladungskurven sind überlagert von feinen Zacken, die besonders deutlich beobachtet werden können, wenn die Größe der Kapazität gesteigert wird. Die Anzahl der Teilentladungen, welche im Kurvenbild beobachtet werden können, verringert sich, wenn man die Kapazität auf $2 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm steigert, und zwar werden es hier zwei Teilentladungen. Die weitere Steigerung der Kapazität auf $3 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm und mehr bewirkt, daß die eigentlichen Teilentladungen verschwinden und die Stromkurve nur mehr aus einer einzigen Entladung besteht.

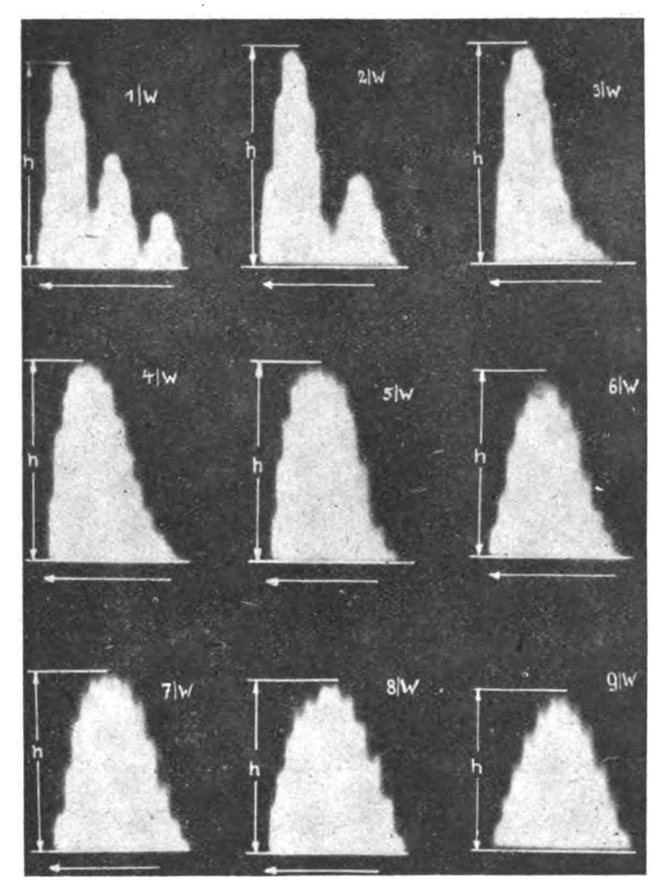


Bild 26.

VI. Theoretische und experimentelle Zusammenhänge.

Wir betrachten zunächst die elektrische Anordnung des Bildes 5, mit welchem die eben beschriebenen Versuchsreihen aufgenommen wurden: Die beiden Primärspulen P_1 und P_2 des Symmetrieinduktoriums bilden mit dem Kondensator C, der dem Unterbrecher U parallel liegt, bei unterbrochenem Strom einen Schwingungskreis, in welchem bei schneller Öffnung des Stromes im Unterbrecher langsam abklingende Schwingungen zustande kommen, die auch analog im Sekundärkreis $S_1 S_2$ auftreten, wenn man von der Rückwirkung des Sekundärkreises S_1 und S_2 auf den Primärkreis $P_1 P_2$ absieht. Diese Schwingungen lassen sich für alle Möglichkeiten berechnen, solange der Sekundärkreis $S_1 S_2$ nicht belastet wird. Der Be-

rechnungsmöglichkeit entziehen sich diese Schwingungen jedoch, sobald der Sekundärkreis mit Röntgenröhren oder auch nur mit einer Glimmlichtröhre belastet wird. Die berechneten Vorgänge, also die Vorgänge im Sekundärkreis $S_1 S_2$ ohne Belastung ergeben jedoch manchen interessanten Vergleich mit den experimentell analysierten Kurven, weshalb für das eben genannte elektrische System die Vorgänge ohne Belastung des Sekundärkreises berechnet wurden.

Unter der Annahme, daß sich ein langgestreckter Eisenkörper wie ein Ellipsoid verhält, berechnet sich die Selbstinduktion einer Primärspule des elektrischen Systems nach folgender Formel:

$$\mathfrak{L} = \frac{(\pi \cdot N \cdot d)^2}{l} \cdot \frac{\mu}{1 + \nu(\mu - 1)}. \tag{11}$$

Hier bedeuten:
N die Windungszahl der Primärspule,
d den Durchmesser des Eisenkernes,
μ die Permeabilität,
ν den relativen Entmagnetisierungsfaktor,
l die Länge des Eisenkernes.

Ferner gilt die Beziehung:

$$\nu = \frac{P}{4\pi}. \tag{12}$$

Hier ist:
ν der relative Entmagnetisierungsfaktor,
P der Entmagnetisierungsfaktor.

Da in dem vorliegenden Fall das Verhältnis $\frac{l}{d}$ durch die folgende Beziehung dargestellt wird:

$$\frac{l}{d} = 5, \tag{13}$$

so ist:

$$P = 0{,}701 \tag{14}$$

und

$$\nu = 0{,}0558, \tag{15}$$

damit ergibt sich für μ der angenäherte Wert = 1001, also gilt:

$$\frac{\mu}{1 + \nu(\mu - 1)} = 66{,}64. \tag{16}$$

Aus den aufgeführten Beziehungen berechnet sich die Selbstinduktion L einer Primärspule:

$$\begin{aligned} L_p &= 0{,}1065 \cdot 10^9 \text{ cm} \\ &= 0{,}1065 \text{ Henry.} \end{aligned} \tag{17}$$

Da die elektrische Anordnung aus zwei hintereinander geschalteten Primärspulen besteht, die praktisch wie eine doppelt so große Selbstinduktion wirken, so gilt für die Selbstinduktion L_p des Primärkreises

$$\begin{aligned} L &= 0{,}2130 \cdot 10^9 \text{ cm} \\ &= 0{,}2130 \text{ Henry.} \end{aligned} \tag{18}$$

Die Kapazität des Primärkreises ist, wie in Abschnitt V ausgeführt wurde, variabel zwischen $1 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm bis $9 \cdot 9 \cdot 10^5$ cm.

Die rechnerische Auswertung des nach der schnellen Öffnung des Stromes im Unterbrecher U auftretenden Schwingungsvorganges führt zu dem Wurzelausdruck:

$$2\pi n = \sqrt[2]{\frac{1}{\mathfrak{L} \cdot C} - \frac{W^2}{4\mathfrak{L}^2}}. \tag{19}$$

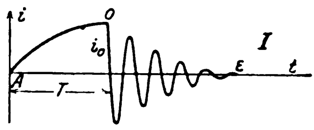
Hier ist:

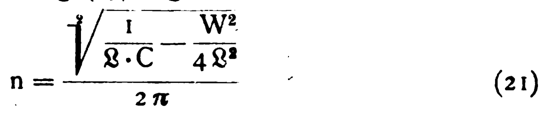
L die Selbstinduktion des Kreises,
C die Kapazität des Kreises,
W der Widerstand des Kreises.

Für den vorliegenden Fall ist:

$$W = 0{,}852\ \Omega. \tag{20}$$

Aus der Gleichung (19) ergibt sich:





$$n = \frac{\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{L}\cdot C} - \frac{W^2}{4\mathfrak{L}^2}}}{2\pi} \tag{21}$$

und

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{L}\cdot C} - \frac{W^2}{4\mathfrak{L}^2}}}. \tag{22}$$

Bild 27.

Die Vorgänge im Primärkreis und analog im Sekundärkreis spielen sich nun entsprechend den Kurven in Bild 27 ab.

Betrachtet man das Kurvenbild I, so stellt hier der Punkt A den Beginn des Stromschlusses dar. Der Strom steigt dann innerhalb der Zeit T, das ist die Zeit, in welcher der Quecksilberstrahl des Umbrechers über das Segment gleitet, auf den Wert i an. Für den Stromanstieg, also die Kurve AO, gilt die Beziehung:

$$i = \frac{E}{W} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{W \cdot t}{\mathfrak{L}}}\right)}. \tag{23}$$

Wird nun der Strom bei O rasch unterbrochen, wie es bei dem Unterbrecher des beschriebenen elektrischen Systems der Fall ist, so finden abklingende langsame Schwingungen statt, die durch die Schwingungskurve dargestellt sind und deren Schwingungszeit T und deren Frequenz n sich aus den Gleichungen (21) und (22) ergeben. Analog den Schwingungen, die im Primärkreis nach der schnellen Stromöffnung auftreten, treten auch im Sekundärsystem abklingende langsame Schwingungen auf, die durch die Kurvenbilder II und III, abgesehen vom Maßstab, gleichsinnig dargestellt sind. Hier sind ferner die Kurven maxima gegenüber der Lage dieser Maxima bei der Kurve I um $^1/_4$ Periode gegen E zu verschoben, was aus der Form des Vorganges ohne weiteres verständlich ist. Von der Rückwirkung des Sekundärsystems auf das Primärsystem ist hierbei abgesehen.

Für den vorliegenden Fall berechnen sich nun leicht aus den übrigen theoretisch gefundenen Größen die Schwingungszeiten T und die Frequenzen n bei Veränderung der Primärkapazität C. Die aus den Rechnungen gefundenen Werte sind in der Tabelle I eingetragen.

Tabelle 1.

C in cm	T in sec.	n
$1 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,002 898	345,0
$2 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,004 098	244,0
$3 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,005 020	200,0
$4 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,005 870	170,0
$5 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,006 481	154,0
$6 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,007 099	151,0
$7 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,007 688	130,0
$8 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,008 198	122,0
$9 \cdot 9 \cdot 10^5$	0,008 695	115,0

Die Tabelle I wird durch die Kurven I und II in Bild 28 ergänzt. Auf den Ordinaten sind einmal die Schwingungszeiten T, das anderemal die Frequenzen n eingetragen, während auf der Abszisse die Größe der Kapazität C aufgetragen ist.

Diese hier geschilderten noch ziemlich übersichtlichen Verhältnisse werden nun außerordentlich kompliziert, wenn in der Sekundärspule ein Strom fließt, das heißt, wenn die Sekundärspule durch einen Widerstand oder eine Glimmlichtröhre oder eine Röntgenröhre kurz geschlossen ist.

Von Corbino[1]) liegen Untersuchungen über den Verlauf des Sekundärstromes vor, wenn die Sekundärspule durch Funken belastet wird. Der Strom verläuft entsprechend den Schwingungen der Spannung, Bild 27 Kurve III periodisch, und zwar besteht er, wie Bild 29 darstellt, aus einem fast linear abfallenden Anteil, dem gedämpfte Schwingungen sich überlagern. Bei kurzen Funken ist die Amplitude der Schwingungen sehr klein, Bild I des Bildes 29. Die Amplitude nimmt mit der Vergrößerung der Funkenstrecke zu. Aber auch bei der größten Länge der Funkenstrecke bleibt die Amplitude der Schwingungen so klein, daß der Strom nur immer in einer Richtung fließt, Bild II des Bildes 29.

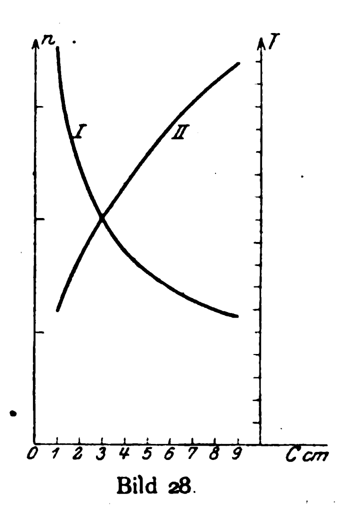


Bild 28.

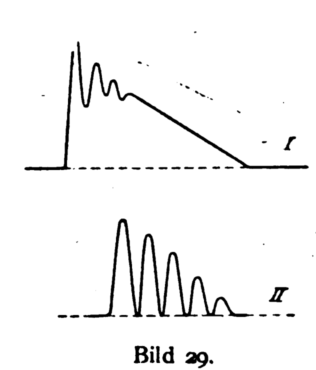


Bild 29.

Die Untersuchungen von Corbino sind insofern für die vorliegenden Erwägungen von besonderer Bedeutung, als die gleichen Erscheinungen auch bei der Belastung des Sekundärkreises durch Röntgenröhren auftreten, wie die große Reihe der Kurvenaufnahmen zeigt.

Vergleicht man mit den Werten der Tabelle I die experimentell aus den Versuchsreihen sich ergebenden Zahlen, so kommen eine Reihe von weiteren interessanten Zusammenhängen zustande, auf die nunmehr eingegangen werden soll.

Zwischen der Anzahl der Teilstromstöße und der Frequenz bei einer bestimmten Kapazität besteht eine direkte Beziehung, die sich in die Form bringen läßt.

$$N = f(n). \qquad (24)$$

In der Tabelle II sind die Anzahl der Teilentladungen bei den verschiedenen Versuchsreihen in Abhängigkeit von der Kapazität eingetragen.

Die Tabelle II wird durch die 4 Kurven des Bildes 30 entsprechend ergänzt. Es ist ersichtlich, daß die Anzahl der Teilstromstöße abnimmt, entsprechend den zunehmenden Werten der Kapazität ebenso wie auch die Frequenz abnimmt.

[1]) Corbino: Atti del Ass. Elettrod. Ital. 1907.

Tabelle II.

C in cm	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	n
$1 \cdot 9 \cdot 10^5$	8	8	7	3	3	345,0
$2 \cdot 9 \cdot 10^5$	6	7	6	2	2	244,0
$3 \cdot 9 \cdot 10^5$	5	6	5	1	1	200,0
$4 \cdot 9 \cdot 10^5$	4	5	4	1	1	170,0
$5 \cdot 9 \cdot 10^5$	4	4	3	1	1	154,0
$6 \cdot 9 \cdot 10^5$	4	3	3	1	1	151,0
$7 \cdot 9 \cdot 10^5$	4	3	3	1	1	130,0
$8 \cdot 9 \cdot 10^5$	4	3	2	1	1	122,0
$9 \cdot 9 \cdot 10^5$	4	3	2	1	1	115,0

Es ergibt sich:

$$n = f(C), \tag{25}$$
$$N = f(n), \tag{26}$$

folglich ist auch:

$$N = \varphi(C) \tag{27}$$

Das heißt also: Die Anzahl der Teilstromstöße bei ein und derselben Röntgenröhre und ein und demselben Röhrenzustand ist eine Funktion der parallel zum Unterbrecher liegenden Kapazität. Gleichzeitig ist aber aus der Tabelle II auch zu ersehen, daß die Anzahl der Teilstromstöße und insbesondere auch ihre Form abhängt von der Röntgenröhre und ihrem Betriebszustand, eine Beobachtung, die man bereits an den Kurvenbildern der Bilder 19—26 machen konnte.

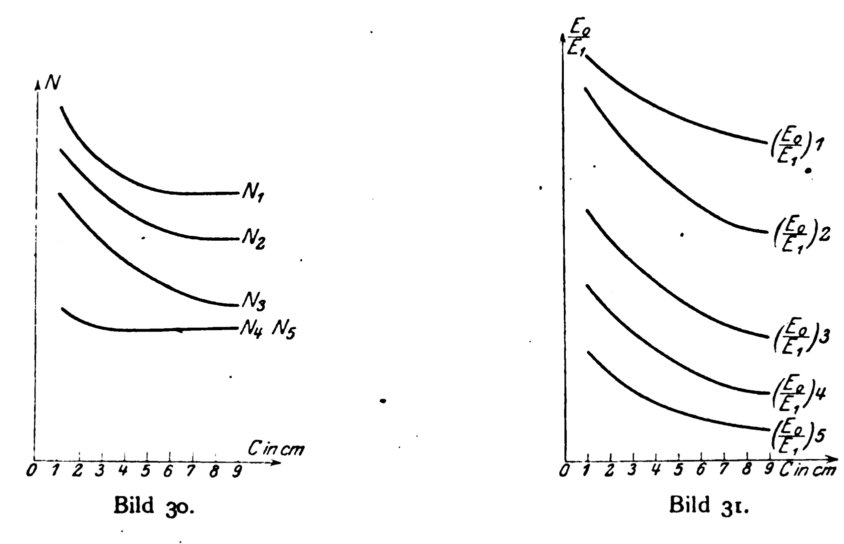


Bild 30. Bild 31.

Interessant ist weiter der Zusammenhang, der sich zwischen der Farbenzusammensetzung, also dem Wellenlängenmittelwert des emittierten Röntgenstrahlengemisches ergibt und der Kapazität, beziehungsweise den Partialentladungen. Untersucht man das emittierte Röntgenstrahlengemisch einmal bei offener Strahlung, also einer Strahlung, die keine absorbierende Substanz durchlaufen hat, so ergibt sich ein Energiewert E_0. Untersucht man dann das Gemisch nach Durchlaufen einer absorbierenden Substanz, deren Dicke für sämtliche Messungen konstant sein soll, so ergibt sich ein Energiewert E_1. Bei sämtlichen Messungen sollen auch sonst konstante Versuchsbedingungen eingehalten werden. Das Verhältnis $\frac{E_0}{E_1}$, welches man in der Röntgentechnik als

den Dosenquotienten bezeichnet, gibt einen Anhalt für die qualitative Veränderung des primären Strahlengemisches. $\frac{E_0}{E_1}$ ist um so kleiner, je mehr sich das Intensitätsmaximum des primären Spektrums nach dem kurzwelligen Gebiet zu ausdehnt. Aus den Versuchsreihen ergeben sich für $\frac{E_0}{E_1}$ die in der Tabelle III festgelegten Werte in Abhängigkeit von der Kapazität.

Tabelle III.

C in cm	$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)$ 1	$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)$ 2	$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)$ 3	$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)$ 3	$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)$ 5	n
$1 \cdot 9 \cdot 10^5$	11,7	12,6	12,2	10,7	7,7	345,0
$2 \cdot 9 \cdot 10^5$	12,6	11,1	11,0	9,0	6,9	244,0
$3 \cdot 9 \cdot 10^5$	12,3	10,3	10,4	9,5	7,1	200,0
$4 \cdot 9 \cdot 10^5$	11,2	8,5	8,3	10,0	8,3	170,0
$5 \cdot 9 \cdot 10^5$	10,7	8,0	7,0	9,0	8,1	154,0
$6 \cdot 9 \cdot 10^5$	9,3	7,2	7,5	7,5	7,6	151,0
$7 \cdot 9 \cdot 10^5$	10,2	6,4	6,6	6,5	7,2	130,0
$8 \cdot 9 \cdot 10^5$	9,2	6,2	7,0	6,0	6,0	122,0
$9 \cdot 9 \cdot 10^5$	9,2	6,2	6,5	7,0	4,9	115,0

Die Tabelle III wird durch die Kurven 1, 2, 3, 4, 5 des Bildes 31 entsprechend ergänzt. Es ist ersichtlich, daß das Verhältnis $\frac{E_0}{E_1}$ kleiner wird, entsprechend den zunehmenden Werten der Kapazität, ebenso wie auch die Frequenz abnimmt. Es ergibt sich:

$$\frac{(E_0)}{(E_1)} = f\,(C), \tag{28}$$

$$N = f\,(C), \tag{29}$$

folglich ist auch:

$$\frac{E_0}{E_1} = \varphi\,(N). \tag{30}$$

Es kann ferner ein Zusammenhang dargestellt werden zwischen den Werten E, die an einem Meßinstrument Sk. gemessen werden, welches entsprechend dem Bilde 32 an eine Hilfsspule angeschlossen ist, die über die Primärspule P des Induktoriums geschoben ist und die aus wenigen Windungen einer Kupferlitze besteht. Derartige Meßinstrumente — Sklerometer — werden in der Röhrentechnik zur Kontrolle des Röhrenbetriebes verwendet. Die Werte, welche sich aus den beschriebenen Versuchsreihen ergeben, sind in der Tabelle IV eingetragen, ebenfalls wieder in Abhängigkeit von der Kapazität.

Tabelle IV.

C in cm	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_n
$1 \cdot 9 \cdot 10^5$	43,6	55,5	67,5	81,0	83,5	345,0
$2 \cdot 9 \cdot 10^5$	37,5	40,7	50,0	69,0	72,5	244,0
$3 \cdot 9 \cdot 10^5$	36,5	36,5	45,5	70,5	76,0	200,0
$4 \cdot 9 \cdot 10^5$	34,6	32,5	40,7	66,7	81,5	170,0
$5 \cdot 9 \cdot 10^5$	33,5	32,5	39,5	64,5	77,7	154,0
$6 \cdot 9 \cdot 10^5$	30,5	29,7	38,0	64,5	80,0	151,0
$7 \cdot 9 \cdot 10^5$	29,5	28,5	37,5	62,0	81,5	130,0
$8 \cdot 9 \cdot 10^5$	28,0	30,5	36,5	67,5	80,5	122,0
$9 \cdot 9 \cdot 10^5$	25,5	31,0	35,5	67,5	79,5	115,0

Die Tabelle IV wird in entsprechender Weise durch die Kurven 1, 2, 3, 4, 5 des Bildes 33 ergänzt. Es ist ersichtlich, daß die Werte E des Sklerometers abnehmen, entgegengesetzt den zunehmenden Werten der Kapazität. Dies gilt aber nur für ein und denselben Röhrenzustand. Für den verschiedenen Zustand ein und derselben Röhre zeigt das Instrument entsprechend der größeren Härte der Röhre höhere Werte an, vorausgesetzt, daß das elektrische System nicht verändert wird.

Es ergibt sich:

$$E = f(C), \tag{31}$$

$$N = f(C), \tag{32}$$

folglich ist auch:

$$E = \varphi(N). \tag{33}$$

Wie diese sinkenden Werte von E zustande kommen, ergibt sich aus den Kurven des Bildes 33.

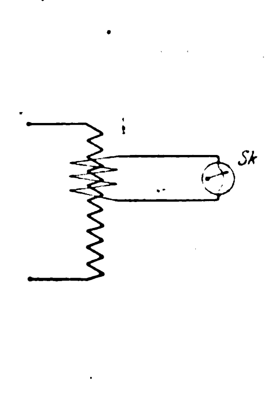


Bild 32.

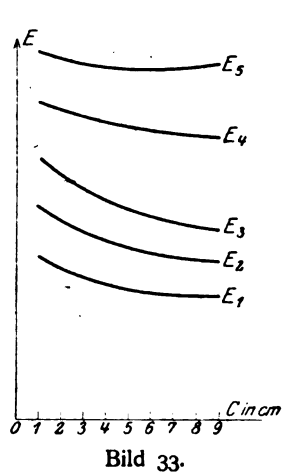


Bild 33.

In dem Falle des vorliegenden elektrischen Systems geschieht nämlich die Öffnung des Primärstromes in äußerst kurzer Zeit. Die maximale Spannung in dem Primärsystem berechnet sich aus der Gleichung:

$$V_{1\,max} = \sqrt{\frac{\mathfrak{L}_1}{C}} \cdot \mathfrak{J}.$$

Dementsprechend ergeben sich für die Werte von $V_{1\,max}$ die in der Tabelle V aufgezeichneten Zahlen.

Tabelle V.

C in cm	1.9.10⁵	2.9.10⁵	3.9.10⁵	4.9.10⁵	5.9.10⁵	6.9.10⁵	7.9.10⁵	8.9.10⁵	9.9.10⁵
$V_{1\,max}$	1606,0	1205,0	1065,6	922,8	825,6	753,6	709,6	642,8	615,2

Die von dem Sklerometer angezeigten Werte von E entsprechen den Werten von $V_{1\,max}$, das heißt sie nehmen proportional diesen Werten ab.

Die Zeitdauer einer Entladung ist bei den größeren Kapazitäten kleiner als bei den kleinen Kapazitäten. Es ergeben sich Werte von $8{,}7 \cdot 10^{-3}$ sec. bis $2{,}9 \cdot 10^{-3}$ sec. Diese Werte stimmen mit den von Dessauer[1]) gefundenen Werten für die Zeitdauer einer Strahlenemission pro Entladungsstoß von $4 \cdot 10^{-3}$ sec. gut überein.

[1]) Dessauer: Phys. Zeitschrift 14, 1913, 246.

VII. Die Stromkurven pulsierender Ströme.

a) Ohne Belastung durch Röntgenröhren.

Bei den elektrischen Systemen entsprechend dem Bilde 6 werden zur Erzeugung des hochgespannten Stromes, der zum Betriebe der Röntgenröhren erforderlich ist, meistens eisengeschlossene Öltransformatoren verwendet. Die Primärseite dieser

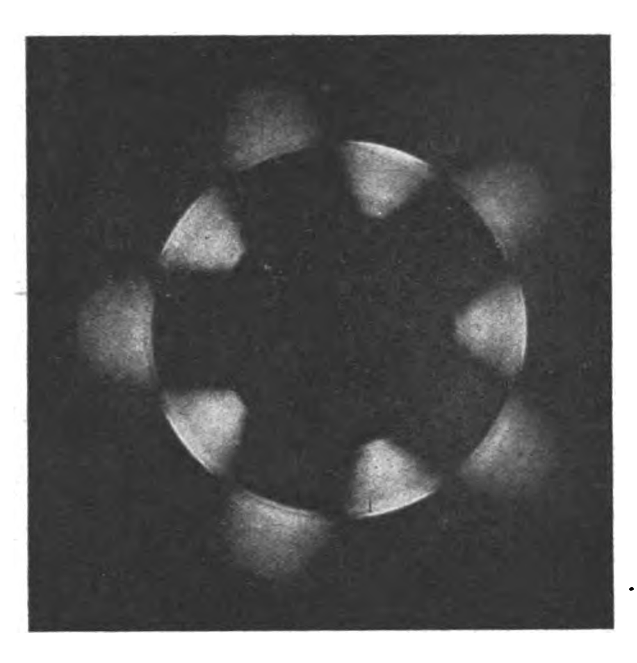


Bild 34.

Transformatoren wird mit Wechselstrom gespeist. Man erhält infolgedessen auch sekundär hochgespannten Wechselstrom. Bild 34 gibt ein Bild dieses Wechselstromes.

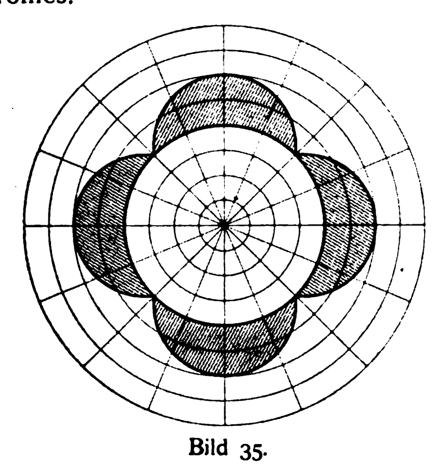


Bild 35.

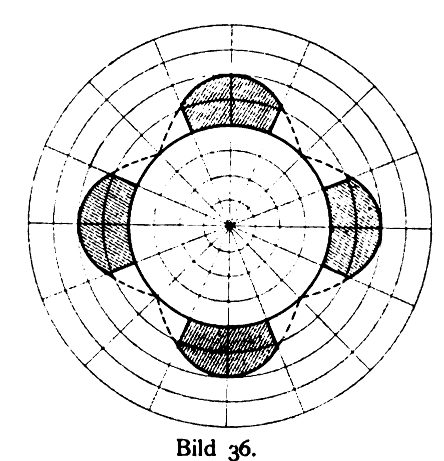


Bild 36.

Die Aufnahme zeigt charakteristische Abstufungen an den einzelnen Kurven. Diese Abstufungen sind auf die Nutung des Ankers der Gleichtrom-Wechselstrommaschine zurückzuführen, von der aus der Primärkreis des Transformators gespeist wurde. Diese Abstufungen sind beim Betrachten des Kurvenbildes direkt an der rotierenden Röhre noch weitaus deutlicher zu erkennen.

Dieser hochgespannte Wechselstrom wird nun durch die in Abschnitt II beschriebene Gleichrichtervorrichtung in hochgespannten pulsierenden Gleichstrom umgewandelt. Die Bilder 35 und 36 zeigen die prinzipiellen Umwandlungen. An Stelle des Bildes 34 erhält man durch die Gleichrichtervorrichtung das Bild 35.

Allerdings wird das Bild 35 in den praktischen Fällen nicht erhalten, da der Hochspannungsgleichrichter wie bereits in Abschnitt II ausgeführt wurde, meistens so gestaltet ist, daß nicht die ganze Halbwelle im Hochspannungskreis erscheint, sondern nur ein Teil. Es wird infolge der Anordnung am Gleichrichter ein Teil der Kurve abgeschnitten, wie das Bild 36 zeigt.

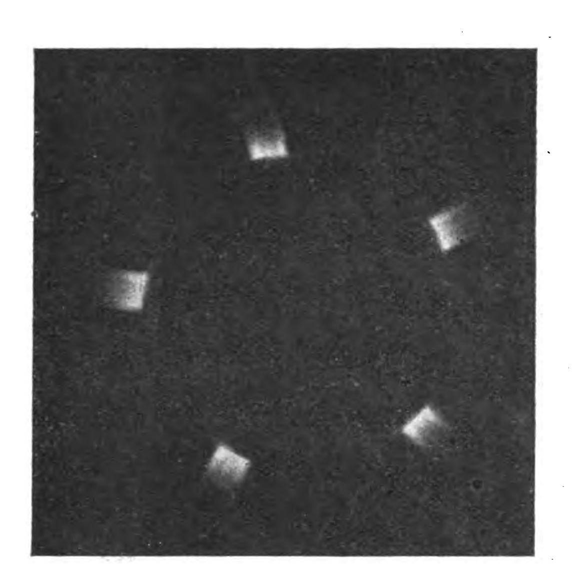


Bild 37.

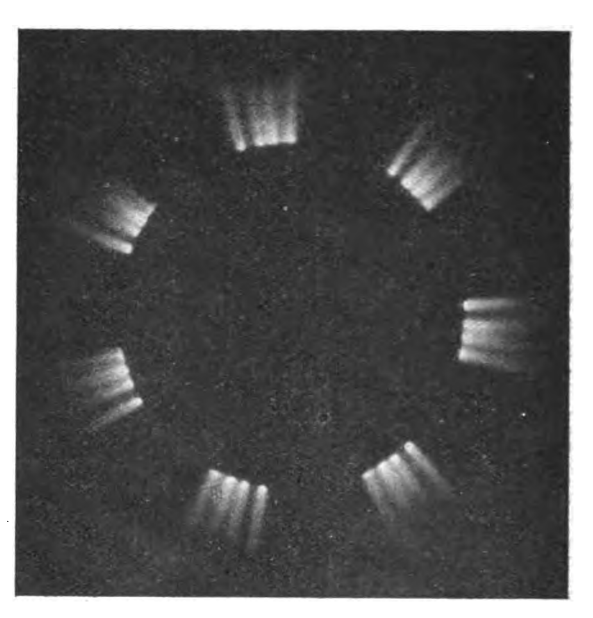


Bild 38.

In Bild 37 ist die rotierende Glimmlichtröhre direkt an den Gleichrichter angeschlossen worden. Man kann hier ein Zerrissenwerden der Entladungskurve beobachten, eine Erscheinung, die ihre Ursache in der Funkenbildung am Hochspannungsschalter haben mag. Betrachtet man diese Aufnahme genauer, so erkennt man, daß die Basis der Kurve bei weitem ausgedehnter ist als das obere Lichtbündel. Die Ursache hiervon ist eine unrichtige Einstellung des Hochspannungsschalters. Infolgedessen geht ein Teil der Entladungskurve verloren.

b) Mit Belastung durch Röntgenröhren.

Schaltet man an ein derartiges Hochspannungssystem eine Röntgenröhre an und ordnet in Serie damit die in Abschnitt IV beschriebene rotierende Glimmlichtröhre, so treten eigentümliche Entladungserscheinungen auf, die sich mit der Röhre und ihrem Zustand verändern. Einige Klarheit in die sehr verwickelten Erscheinungen bringen die nachfolgenden Bilder.

Die Aufnahme in Bild 38 läßt deutlich erkennen, daß die einzelnen Impulse des pulsierenden hochgespannten Gleichstromes in mehrere Zackungen zerrissen werden. Bei dem vorliegenden Photogramm sind es in jeder Hauptentladung vier Einzelzackungen. Das Zerreißen der Hauptentladung in Teilentladungen hat wie erwähnt seine Ursache in der Funkenbildung an der rotierenden Schaltvorrichtung



des Hochspannungskreises. Die Anzahl der Zackungen dürfte, wie sich aus den bisherigen Versuchen ergibt, zum Teil von dem Zustand der Röntgenröhre abhängig sein.

Bei den meisten Hochspannungs-Gleichrichterapparaten ist es möglich von den hundert Stromimpulsen, welche sich aus den 50 Perioden eines Wechselstromes ergeben, 50 abzuschalten, um größere Pausen zwischen den durch die Röhre gehenden Entladungen für die Röhrenschonung[1]) zu erreichen. Dabei werden 50 Impulse der Röntgenröhre zugeführt, während die dazwischen liegenden Impulse, ebenfalls 50 Impulse, einem Hochspannungswiderstand zugeführt und dort vernichtet werden. Das Bild 39 zeigt einen derartigen Fall. Mit der Glimmlichtröhre war auch hier eine Röntgenröhre in Serie geschaltet. Die Glimmlichtröhre rotierte dabei mit einer Geschwindigkeit, welche gleich der des rotierenden Systems des Hochspannungs-

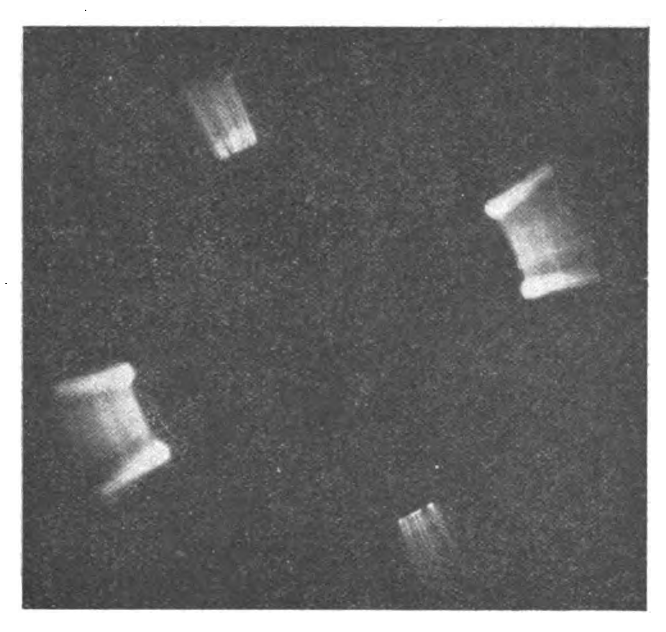


Bild 39.

kreises war, so daß also Synchronismus zwischen den beiden Systemen vorlag. 50 Impulse waren dabei in der eben geschilderten Weise von der Röntgenröhre abgeschaltet. Man sieht in Bild 39 die 50 durch die Röhre fließenden Impulse als breite Lichtbänder. Auch hier tritt ein Zerrissenwerden der Entladung ein, ebenfalls wieder infolge der Funkenbildung am rotierenden Hochspannungsschalter. Hier ist jedoch das Bild der Einzelentladungen ein völlig anderes als in dem vorausgegangenen Fall, bei welchem auf jede Einzelentladung 4 Partialentladungen kommen. Diese veränderte Erscheinung hat ihre Ursache darin, daß eine andere Röntgenröhre von anderem Zustand verwendet worden ist. In dem Bild 39 sieht man ferner an den Stellen, an denen die anderen 50 abgeschalteten Impulse auftreten sollten, ein schwaches gleichfalls zerrissenes Lichtbündel. Diese Entladungen können entweder von Restladungen auf den abgeschalteten Segmenten des Hochspannungsschalters herrühren, oder aber damit erklärt werden, daß infolge schlechter Isolation des Hochspannungssystems noch ein schwacher Stromübergang stattfand. Die letztere Annahme dürfte die größere Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Die Aufnahme in dem Bild 40 ist gleichfalls an einem Hochspannungsgleichrichterapparat gewonnen worden. Auch hier war wieder eine Röntgenröhre in Serie

[1]) Ludewig,: „Das Verhalten der Röntgenröhre im praktischen Röntgenbetriebe". Phys. Zeitschrift 16, 1915, Heft 3.



mit der rotierenden Glimmlichtröhre geschaltet. Durch eine besondere Vorrichtung im Hochspannungskreis wurde aber ein Zerrissenwerden der Entladung fast vollständig vermieden.

A. Wehnelt[1]) zeigte, daß es ihm mit Hilfe der Braun'schen Röhre gelungen ist, den Verlauf der Spannungen einer Röntgenröhre aufzunehmen. Wehnelt benutzt zum Betriebe seiner Röntgenröhre einen Hochspannungsgleichrichter, bei dem aber nicht maximale Teile der Spannungskurve herausgeschnitten und zum Betriebe der Röntgenröhre verwendet wurden, sondern bei welchen die ganze sinusförmige Halbperiode an der Röntgenröhre lag. In Bild 41 ist das Resultat der Wehnelt-

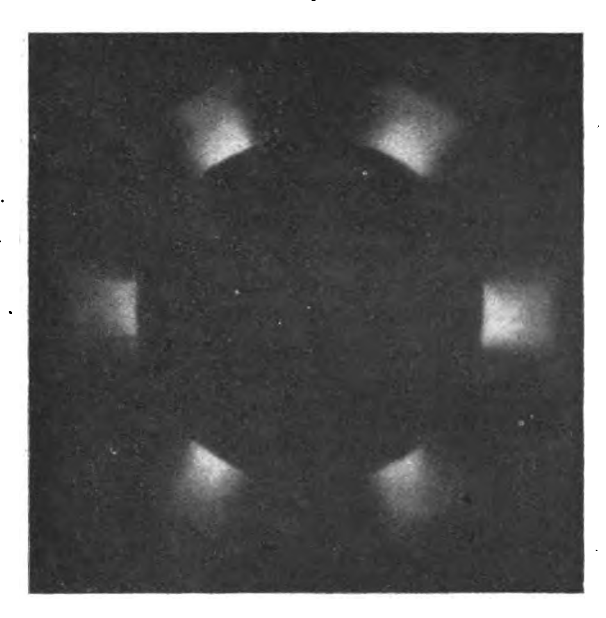


Bild 40.

schen Arbeit aufgezeichnet, und zwar ist in Bild 1 die sinusförmige Halbperiode, wie sie normalerweise verläuft, skizziert ist. Es zeigt sich dann durch Bild 2, daß beim Betriebe mit sinusförmigen Halbperioden zuerst die Spannung auf einen ziemlich hohen Wert ansteigt, und zwar zu der sogenannten Zündspannung, wie sie von Kröncke[2]) genannt wurde, und dann zu einem tiefliegenden Teil abfällt, der dem stabilen Betrieb der Röntgenröhre entspricht. Die in Bild 38 (I und II) aufgezeichneten Kurven entsprechen dem Bild 3 der Wehneltschen Arbeit. Wehnelt beobachtet dann weiter ein Wiederansteigen der Spannung gegen das Ende der Halbperiode. Ludewig[3]) erklärt dieses Wiederansteigen dadurch, daß er annimmt, daß bei langsam ansteigendem Strom die Leitfähigkeit in der Röhre noch Zeit hat, wieder wenigstens bis zu einem gewissen Grade abzunehmen. Das von Wehnelt erzielte Resultat und die von Ludewig hier angeknüpfte Definition ist für die vorliegenden Untersuchungen insoferne besonders interessant, als man das gleiche Verhalten bereits an der Form der Stromkurve beobachten kann.

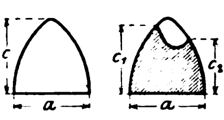


Bild 41.

In Bild 36 war schematisch dargestellt, wie der gleichgerichtete, rein sinusförmige Wechselstrom, und zwar die ganzen Halbperioden des Wechselstromes sich

[1]) Wehnelt, Annalen der Physik Bd. 47, 1915, 1112.
[2]) Kröncke, Dissertation Göttingen 1913.
[3]) Ludewig, Phys. Zeitschrift 16, 1915, 38.

an der rotierenden Glimmlichtröhre zeigen. Es tritt hier allerdings infolge der radialen Entstehungsform der Kurven eine Verzerrung ein, die aber an und für sich für das Studium der Kurve nicht störend ist. Es lassen sich die Werte, die hieraus abgenommen werden können, ohne weiteres von dem Polarkoordinatensystem auf rechtwinkliges Koordinatensystem übertragen. Es bedeuten a die Basis der Halb-

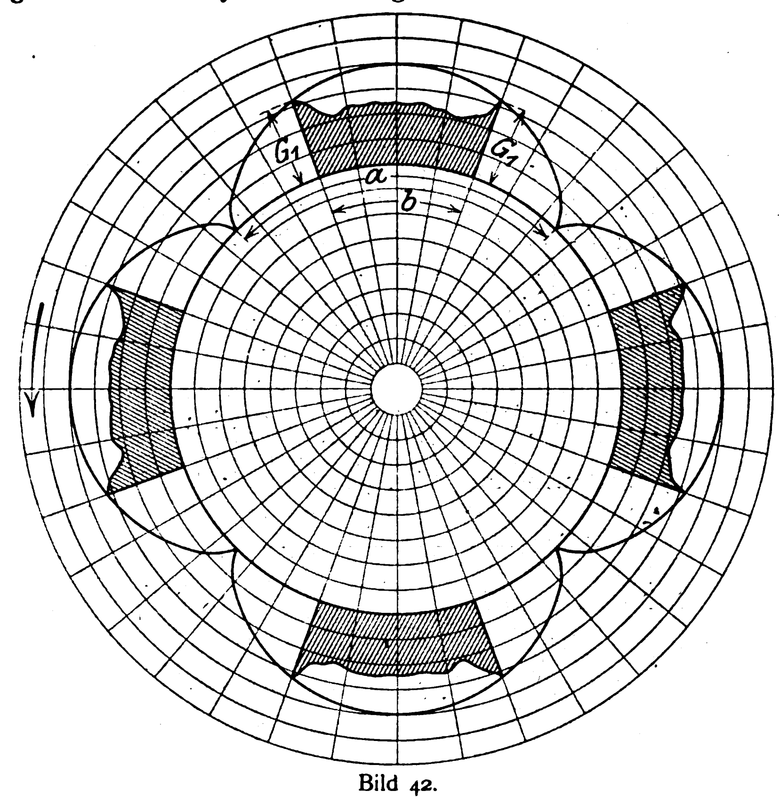


Bild 42.

periode, b das aus der Halbperiode herausgeschnittene Stück der Kurve, c die Höhe des Stromwertes. In Bild 42 ist ebenfalls a die Basis der Halbperiode, b das aus der Halbperiode herausgeschnittene Stück der Kurve, c zeigt die Stromwerte an. Der schwarz schraffierte Teil der Kurve ist der Verlauf der Stromkurve. Bild 42 wurde nach einem Photogramm genau gezeichnet, welches mittels der rotierenden Glimmlichtröhre an einem Hochspannungsgleichrichter bei Röntgenröhrenbetrieb genommen wurde. In Bild 43 1 ist das beobachtete Resultat vom Polarkoordinatensystem in das rechtwinkelige Koordinatensystem übertragen worden, und zwar in gleichem Maßstabe. a ist wieder die Basis der Halbperiode und b das herausgeschnittene Stück der Kurve. In Bild 43 ist unten die Basis der Halbperiode verkleinert worden und der Umriß des schwarz schraffierten Teiles der Kurve zeigt bereits, daß der Verlauf der Form der Stromkurve in diesem Falle ziemlich analog ist dem Verlauf der Spannungskurve, wie ihn A. Wehnelt in seiner erwähnten Arbeit festgestellt hat.

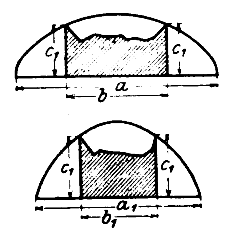


Bild 43.

Die in den Bildern 38 und 39 in den einzelnen Phasen zu beobachtenden Teilentladungen konnten auch von anderen Autoren in verschiedenen Arbeiten beobachtet werden. Es sei hier auf die Arbeiten von Wertheimer[1]) Deguisne[2]) u. a. verwiesen.

[1]) Wertheimer, Dissertation Göttingen 1911.
[2]) Deguisne, Phys. Zeitschr. 15, 1914, 630 und 17, 1916, 106.

VIII. Zusammenfassung.

Aus den vorausgegangenen Ausführungen geht hervor, daß es mit einer auf einem Propeller aufgebauten Glimmlichtröhre möglich ist, die Stromkurven hochgespannter, pulsierender und intermittierender gleichgerichteter Ströme darzustellen und jede beliebige Untersuchung an diesen Stromkurven vorzunehmen.

Weiter wird gezeigt, in welcher Weise und Form die Stromkurven verlaufen, sowohl wenn das Hochspannungssystem mit Röntgenröhren belastet ist, als auch ohne Belastung des Hochspannungssystems.

Bei einem bestimmten elektrischen Aufbau wird systematisch der Entladungsvorgang untersucht. Es geht aus den Untersuchungen zunächst hervor, daß die Anzahl der beobachteten Teilentladungen eine Funktion der parallel zum Unterbrecher liegenden Kapazität ist. Die Zahl der Partialentladungen wird geringer durch die Vergrößerung der Primärkapazität. Weiter zeigt sich, daß die Form der Entladungen auch abhängig ist von der Art der Röntgenröhre und ihrem Betriebszustand.

Ähnliche Zusammenhänge ergeben sich auch, wenn man zum Betriebe von Röntgenröhren an Stelle von Funkeninduktoren Gleichrichter verwendet. Auch hier zeigt es sich, daß die Form der Entladung von der Art der Röntgenröhre und ihrem Zustande abhängig ist.

Die Verhältnisse für das Funkeninduktorium werden im Zusammenhang mit den experimentellen Resultaten theoretisch gedeutet und gezeigt, daß die Partialentladungen im ursächlichen Zusammenhang stehen mit den Schwingungsvorgängen im Primärkreis.

Über den schiefen Austritt von Induktionslinien aus Eisen.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

1. Erste Form des Brechungsgesetzes. Treten Induktionslinien aus Eisen in Luft über, so erleiden sie eine Brechung. Die Einfallswinkel α_1 und α_2 (Bild 1) stehen in der Beziehung:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\mu} = \operatorname{tg}\alpha_1 \qquad (1)$$

(μ = Permeabilität).

Wenn in Lehrbüchern aus dieser Formel eine Folgerung gezogen wird, so wird gewöhnlich gesagt, daß bei Eisen infolge seiner hohen Permeabilität der Winkel α_1 klein ausfallen muß, und daß daher die Induktionslinien an der Grenzfläche Luft-Eisen praktisch senkrecht stehen. Sicherlich trifft diese Überlegung für viele Fälle zu. Man sieht aber sofort, daß sie nicht mehr gelten kann, sobald $\operatorname{tg}\alpha_2$ selbst von gleicher Größenordnung oder auch größer als μ wird, also wenn im Eisen die Induktionslinien sehr nahe der Eisenoberfläche parallel laufen oder noch anders ausgedrückt, wenn die Streuung klein ist. Gerade diese Fälle strebt der Praktiker an. Wie groß dann der Winkel α_1 ist, läßt sich nur sagen, wenn man den Winkel α_2 kennt. Das obige Brechungsgesetz ist daher für viele praktische Fälle nicht zugeschnitten. Ich will es im Folgenden in eine Form gießen, die die Abhängigkeit des Austrittswinkels α_1, oder besser seines Komplementwinkels β, von der Streuung unmittelbar hervortreten läßt.

Wenn sich auch im allgemeinen der Praktiker nicht viel um den Austrittswinkel von Induktionslinien kümmert, scheint mir die neue Fassung doch im Hinblick auf die Materialprüfung nicht überflüssig zu sein[1]).

[1]) Man vergleiche den folgenden Aufsatz des Herrn Lehrs.



2. Zweite Form des Brechungsgesetzes. In einem Eisenstabe (etwa einem Epsteinbündel) werde an der Stelle $x = 0$ der Fluß Φ gemessen und das gleiche werde an verschiedenen anderen Stellen getan. Der Fluß Φ ist somit durch Messung als eine bekannte Funktion von x anzusehen:

$$\Phi = f_{(x)}.$$

Wir greifen zwei benachbarte Stellen x und $x + dx$ heraus. Bei der Stelle x tritt der Fluß $f_{(x)}$ ein; an der Stelle $x + dx$ tritt der Fluß $f_{(x+dx)}$ aus. Der Differenzfluß

$$-[f_{(x+dx)} - f_{(x)}]$$

(U = Eisenumfang.)

verläßt das Eisen durch die Oberfläche $U\,dx$ (Bild 2).

Ist B_n die Normalkomponente der Induktion, die wir für alle Stellen des Umfangs als gleich voraussetzen, so gilt:

$$-[f_{(x+dx)} - f_{(x)}] = B_n U\,dx,$$

$$B_n = -\frac{1}{U} \cdot \frac{df_{(x)}}{dx}.$$

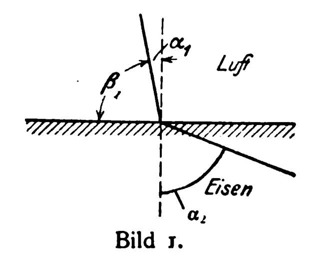


Bild 1.

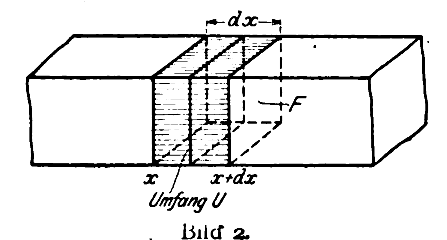


Bild 2.

An der Stelle x sei F der Querschnitt, μ die Permeabilität. Die Tangentialkomponente der Induktion hat dann den Wert

in Eisen $B_{t\,Eisen} = \frac{f_{(x)}}{F}$ in Luft $B_{t\,Luft} = \frac{1}{\mu}\frac{f_{(x)}}{F}$

somit ergibt sich (Bild 1)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{B_t}{B_n}\right)_{Luft} = -\frac{f_{(x)}\,U}{\mu F \cdot \frac{df_{(x)}}{dx}},$$

oder, wenn wir den Komplementwinkel β von α_1 einführen

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\mu F \frac{df_{(x)}}{dx}}{f_{(x)} \cdot U}.$$

Wir brauchen jetzt nur noch die prozentuale Streuung γ einzuführen, die wir auf $f_{(0)}$, den Fluß Φ an der Stelle $x = 0$ beziehen. Es sei also bekannt:

$$\gamma = \frac{f_{(0)} - f_{(x)}}{f_{(0)}} \cdot 100 = 100\left(1 - \frac{f_{(x)}}{f_{(0)}}\right),$$

dann ist:

$$f_{(x)} = f_{(0)}\left(1 - \frac{\gamma}{100}\right); \quad \frac{df}{dx} = -\frac{f_{(0)}}{100}\cdot\frac{d\gamma}{dx}; \quad -\frac{\frac{df_{(x)}}{dx}}{f_{(x)}} = \frac{\frac{d\gamma}{dx}}{100 - \gamma}.$$

Somit lautet unsere neue Form des Brechungsgesetzes

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\mu \cdot F}{U} \cdot \frac{\frac{d\gamma}{dx}}{100 - \gamma} \tag{2}$$

μ = Permeabilität; F = Eisenquerschnitt in cm^2; U = Eisenumfang in cm; γ = prozentuale Streuung. Aus dieser Formel liest man ohne weiteres ab, daß bei genügend kleiner Streuung β wesentlich kleinere Werte als 90^0 haben kann. Auf die genauere Diskussion gehe ich nicht ein, da dies Herr Lehrs in der folgenden Arbeit für einige praktische Beispiele tut.

Das Feld in der Umgebung magnetisierten Eisens.

Von

L. Lehrs.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

1. Ziel.

In dem vorhergehenden Aufsatz dieses Heftes hat Herr Professor Rogowski gezeigt, daß die magnetischen Feldlinien nicht in allen Fällen senkrecht auf der Eisenoberfläche stehen müssen, sondern bei geringer Streuung schief austreten können.

Im folgenden soll in einigen Beispielen die Größe des Austrittswinkels zahlenmäßig angegeben werden. Nach der Formel von Rogowski sind es allein Streuungsmessungen, die an der Eisenoberfläche über den Verlauf von Tangential- und Normalkomponente Aufschluß geben. Es wird nun weiter gezeigt werden, daß aus eben diesen Streuungsmessungen sich auch ermitteln läßt, wie schnell sich Tangential- und Normalkomponente in der näheren Umgebuug des Eisens ändern. Aus der Untersuchung werden sich dabei Gesichtspunkte zur Beurteilung einer Methode der Permeabilitätsmessung von Gumlich und Rogowski ergeben[1]).

2. Die Bestimmung des Austrittswinkels beim Epstein-Apparat.

Als Grundlage unserer Rechnung benutzen wir Streuungsmessungen am Epstein-Apparat, die Gumlich und Rogowski seinerzeit[1]) vorgenommen haben. Sie verwandten zwar einen unzerschnittenen Rahmen, während in der Praxis vier einzelne Blechbündel aneinandergefügt werden. Doch haben sie in der Arbeit gezeigt, daß die Stoßfugen im allgemeinen die Streuung nur um wenige Prozent erhöhen. Die Größenordnung der Streuung bleibt die gleiche, und die folgenden Resultate werden sich daher durch Berücksichtigung der Stoßfugen nur unwesentlich ändern.

Wir entnehmen der Arbeit unser Bild 1 und verwenden die, von der Eisenoberfläche aus gesehen, rechten Kurvenzweige des Bündels I, und zwar für die Induktionen $\mathfrak{B} = 18000$, 15000, 10000 c. g. s. Die Formel von Rogowski lautet:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\mu \cdot F}{U} \cdot \frac{\frac{d\gamma}{dx}}{100 - \gamma}. \qquad (1)$$

Hierin bedeutet β den Winkel der Feldlinien gegen die Eisenoberfläche, μ die Permeabilität, F den Querschnitt, U den Umfang des Eisens, γ die prozentuale Streuung, bezogen auf einen beliebigen Querschnitt.

Wir wollen den für Form und Material charakteristischen Faktor

$$\frac{\mu \cdot F}{U} = p$$

setzen, schreiben also

$$\operatorname{tg}\beta = p \cdot \frac{\frac{d\gamma}{dx}}{100 - \gamma}.$$

Da das Epstein-Bündel quadratischen Querschnitt mit der Seite 3 cm hat, so wird

$$\frac{F}{U} = \frac{3}{4}.$$

Die Werte von μ für die jeweilige Induktion entnehmen wir einer Kurve, die sich

[1]) E. Gumlich und W. Rogowski, Methode zur absoluten Bestimmung der Magnetisierung von Dynamoblech an Epsteinschen Bündeln. E. T. Z. 1912, S. 262.

aus Messungen von Gumlich für legiertes Dynamoblech ergibt[1]). So erhalten wir folgende Tabelle:

$\mathfrak{B}$	μ	p
18000	82	61,5
15000	440	330
10000	4600	2280

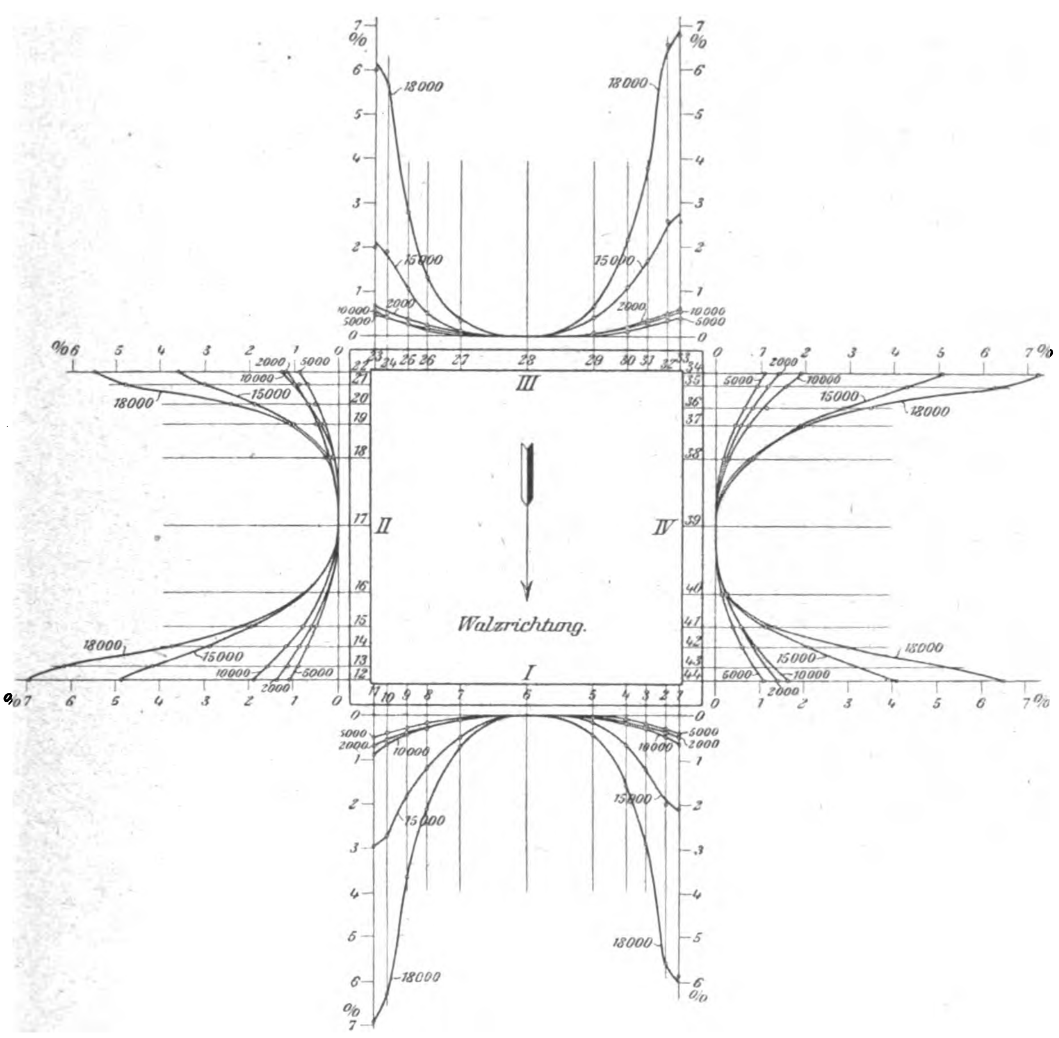


Bild 1. Streuungskurven am Epsteinschen Apparat von Gumlich und Rogowski.

Hiermit nun könnten wir $\operatorname{tg}\beta$ für einzelne Punkte berechnen und erhielten etwa das Bild 2a. Durch folgende Annäherung läßt sich aber aus der Streuungskurve unmittelbar eine Kurve der Austrittsneigungen herleiten:

In der Praxis werden im allgemeinen die Werte von γ klein gegen 100 sein. Dann aber können wir angenähert setzen:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{p}{100} \cdot \frac{d\gamma}{dx}. \qquad (2)$$

[1]) E. T. Z. 1909, S. 1098.

Vereinen wir nun die Richtungselemente des Bildes 2a zu einer Kurve

$$y = F(x),$$

so ist deren Tangente an jedem Punkte parallel der an der zugehörigen Abszisse austretenden Feldlinie. Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta = \frac{p}{100} \cdot \frac{d\gamma}{dx},$$

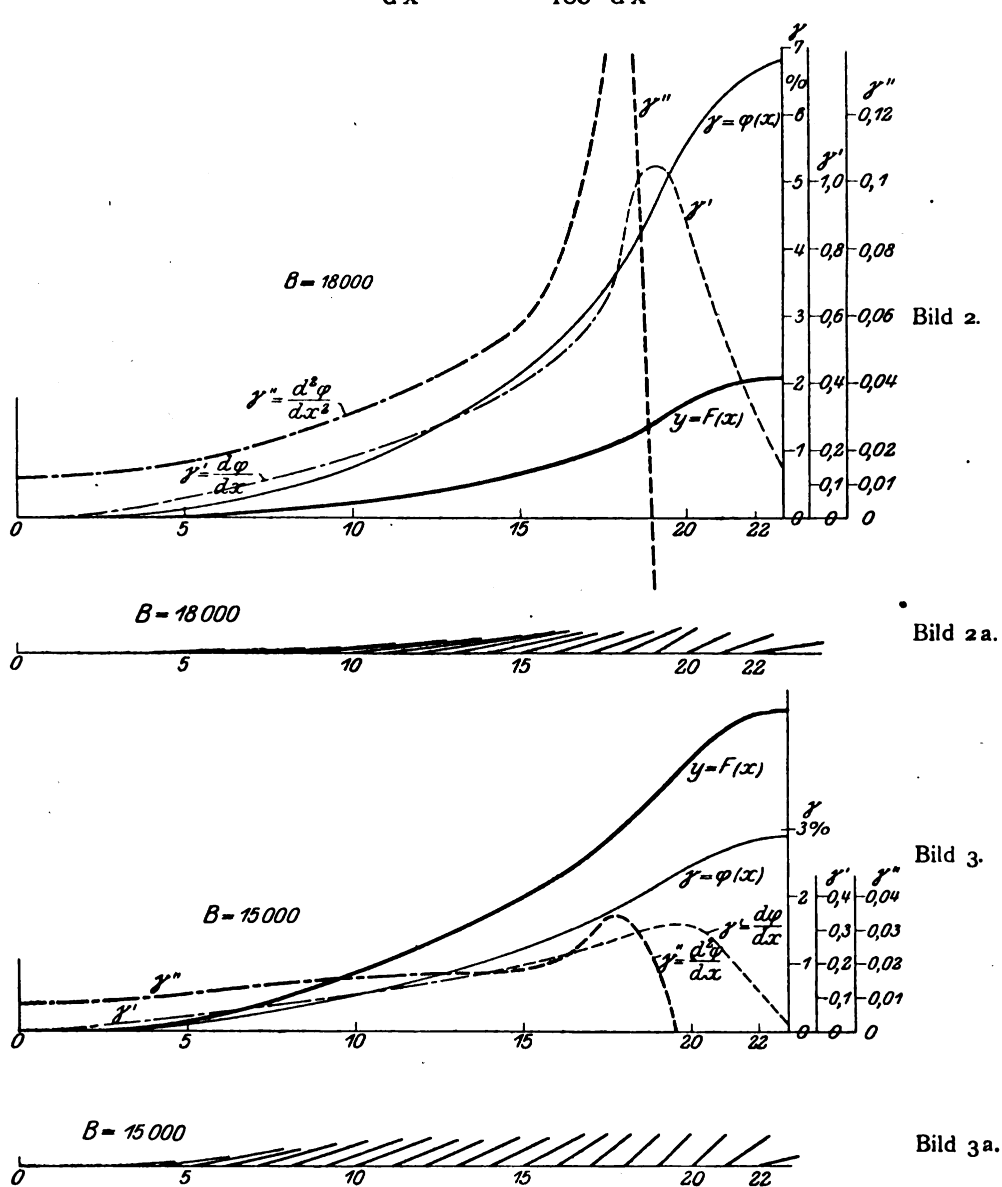


Bild 2.

Bild 2a.

Bild 3.

Bild 3a.

worin $\gamma = \varphi(x)$ die aufgenommene Streuungskurve ist. Die Integration ergibt

$$y = \frac{p}{100} \cdot \gamma$$

wo die Integrationskonstante $C = 0$ gesetzt werden konnte, weil die absolute Größe der Ordinaten y ja nicht interessiert.

Man erhält also die Kurve der Austrittsneigung unmittelbar aus der Streuungskurve, indem man die Ordinaten mit dem Faktor $\frac{p}{100}$ streckt.

Auf diese Weise wurden aus den dem Bilde 1 entnommenen Kurven $\gamma = \varphi\,(x)$ in den Bildern 2, 3, 4 die Kurven $y = F\,(x)$ konstruiert[1]). Es zeigt sich nun, daß im Falle $\mathfrak{B} = 18000$, wo also μ sehr klein ist, die Feldlinien über die ganze Länge des Bündels hin äußerst flach austreten. Die Stelle des steilsten Austritts entspricht dem Wendepunkte der Streuungskurve, und der Winkel erreicht nur den Wert

$$\operatorname{tg} \beta_{max} = \sim 0{,}6, \quad \beta_{max} = \sim 31^0.$$

Im Falle $\mathfrak{B} = 15000$ sind die Neigungen bereits etwas größer, doch erreicht hier der größte Winkel auch nur den Wert

$$\operatorname{tg} \beta_{max} = \sim 1, \quad \beta_{max} = \sim 45^0.$$

Im Falle $\mathfrak{B} = 10000$ haben wir bereits erheblich steilere Austrittsrichtungen -- μ ist nahe seinem Maximalwert. Doch auch hier bleibt der Winkel auf eine Länge von etwa 6 cm von der Mitte des Bündels aus unter 45^0.

Die erwähnte Methode der Permeabilitätsmessung von Gumlich u. Rogowski beruht auf dem stetigen Übergang der Tangentialkomponente des magnetischen Feldes vom Eisen in die Luft. So wird zur Bestimmung von

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$$

die Induktion $\mathfrak{B}$ durch eine das Eisen umschlingende Spule, das Feld $\mathfrak{H}$ durch eine auf das Eisen gelegte flache Spule gemessen. Eine geringe fehlerhafte Neigung dieser letzteren gegen die Tangentialrichtung wird dabei offenbar um so schwerer ins Gewicht fallen, je größer das Verhältnis einer etwa vorhandenen Normalkomponente zur Tangentialkomponente ist, d. h. je steiler die Feldlinien auf der Eisenoberfläche stehen. In dem oben abgeleiteten Verfahren haben wir also die Möglichkeit, aus den Streuungsmessungen allein die jeweilige Genauigkeit dieser Methode zu prüfen[2]).

Bild 4.

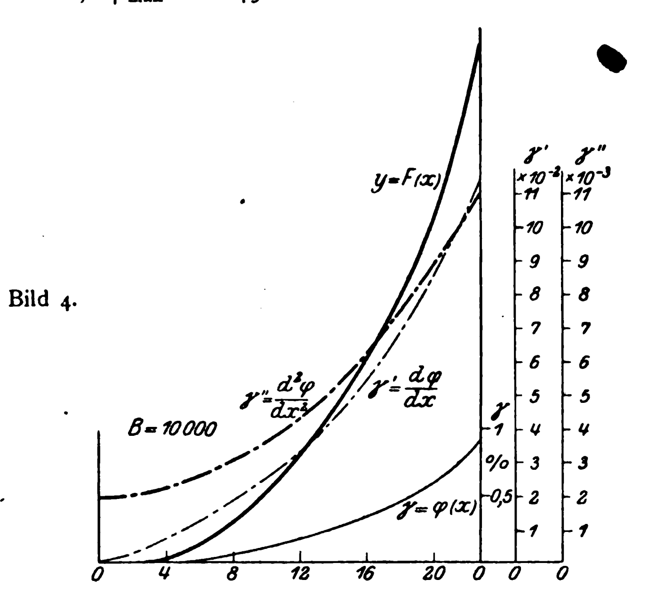


Bild 4a.

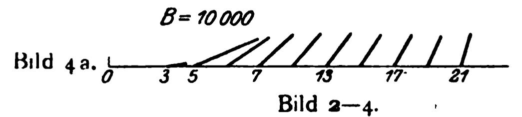


Bild 2—4.
Streuungskurven, ihre erste und zweite Ableitung und Kurven der Austrittsneigungen der Feldlinien.

Bild 2a—4a.
Die Richtungen der Feldlinien auf der Eisenoberfläche.

Wir bemerken noch, daß in die Formel (1) nicht nur, wie zu erwarten, die Permeabilität, sondern auch das Verhältnis von Querschnitt zu Umfang eingeht. Bei gleicher prozentualer Streuung wird also $\operatorname{tg}\beta$ um so kleiner, je flacher der Eisenquerschnitt ist. Demnach wäre es vorteilhaft, beim Epsteinschen Bündel in Rücksicht auf die Permeabilitätsmessungen vom quadratischen Querschnitt abzuweichen, z. B. nur halb so viel Bleche zu nehmen und den einzelnen Streifen doppelt so breit zu machen.

[1]) Während der Maßstab von γ aus Gründen der Zweckmäßigkeit zu wählen ist, müssen x und y natürlich maßstabsgleich sein, um die wahre Neigung zu liefern.

[2]) In Fällen nicht ausreichender Genauigkeit steht heute der Spannungsmesser von Rogowski zur Verfügung. Siehe W. Rogowski und W. Steinhaus: Die Messung der magnetischen Spannung. Arch. f. El. 1912, S. 141.

3. Das Feld in der Umgebung des Eisens.

Die Streuungsmessungen geben uns Kenntnis über den Verlauf der Tangentialkomponente der Induktion längs der Eisenoberfläche, die daraus ermittelten Austrittsneigungen ergeben den gleichen Aufschluß über die Normalkomponente. Damit haben wir eine Anzahl von Bestimmungsstücken, die uns gestatten, das Feld auf Grund seiner Ausbreitungsgesetze in die Luft hinein zu verfolgen. Dabei wollen wir uns nur auf eine enge Umgebung des Eisens beschränken.

a) Die Tangentialkomponente.

Wir führen als x-Achse die Richtung der Tangentialkomponenten, als z-Achse die der Normalkomponenten ein (in der y-Richtung sei das Feld homogen). Da wir jetzt in den Luftraum hineingehen, mögen die Werte des Feldes auf der Eisenoberfläche durch den Index o ausgezeichnet werden.

In stromlosen Gebieten ist das geschlossene Linienintegral der magnetischen Feldstärke gleich Null. Wir bilden dieses Integral um ein kleines, auf der Eisenoberfläche stehendes Rechteck mit den Seiten dx und dz (Bild 5). Dann erhalten wir

$$\mathfrak{H}_{xo} \cdot dx + \left(\mathfrak{H}_{zo} + \frac{\partial \mathfrak{H}_{zo}}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dz - \left(\mathfrak{H}_{xo} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \cdot dz\right) dx - \mathfrak{H}_{zo} \cdot dz = 0,$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_{zo}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} = 0,$$

und da in Luft

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H},$$

so

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{zo}}{\partial x}. \tag{3}$$

Hierin ist uns, wie erwähnt, die rechte Seite aus der Streuungsmessung bekannt. Streng genommen gilt nun diese Beziehung nur für den ersten, unendlich kleinen Schritt vom Eisen in die Luft. In der engen Umgebung des Eisens aber, auf die wir uns beschränken wollen, können wir in erster Annäherung die Feldkomponenten als linear ansteigend ansehen. Denn da das Feld in diesem Gebiet keinen Sprung machen kann, so wird auf kleine endliche Strecken hin seine Veränderung so gering sein, daß die Abweichungen dieser von der Proportionalität von zu vernachlässigender Größenordnung sein werden.

Unter diesen Voraussetzungen dürfen wir also ansetzen:

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} \cdot z + \mathfrak{B}_{xo}$$

und wegen Gleichung (3)

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{B}_{zo}}{\partial x} \cdot z + B_{xo}. \tag{4}$$

Nach dem Vorgang von Rogowski ersetzen wir hierin die Ableitung der Normalkomponente durch die zweite Ableitung des Tangentialflusses:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{zo}}{\partial x} = -\frac{1}{U} \cdot \frac{d^2 f(x)}{d x^2}.$$

Von diesem gehen wir zur prozentualen Streuung und zur Tangentialkomponente der Induktion über durch die Beziehungen:

$$\frac{d^2 f(x)}{d x^2} = -\frac{f(o)}{100} \cdot \frac{d^2 \gamma}{d x^2},$$

$$\frac{f(o)}{100} = \frac{f(x)}{100 - \gamma}$$

und

$$f(x) = \mu \cdot F \cdot \mathfrak{B}_{xo}.$$



So erhalten wir

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{zo}}{\partial x} = \frac{\mu \cdot F}{U} \cdot \frac{\frac{d^2 \gamma}{d x^2}}{100 - \gamma} \cdot \mathfrak{B}_{xo}.$$

Vernachlässigen wir wieder γ gegen 100 und führen p ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{zo}}{\partial x} = \frac{p}{100} \cdot \frac{d^2 \gamma}{d x^2} \cdot \mathfrak{B}_{xo}.$$

Diese Beziehung setzen wir in Gleichung (4) ein und erhalten

$$\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_{xo} \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d^2 \gamma}{d x^2} \cdot z\right) \qquad (5)$$

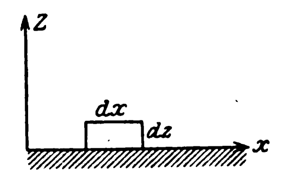


Bild 5. Zur Bildung des geschlossenen Linienintegrales der magnetischen Feldstärke.

Die Kurve der zweiten Ableitung kann entweder graphisch oder durch analytische Approximationen vermittels einer Potenzreihe aus der Streuungskurve hergeleitet werden.

Dieses Ergebnis wenden wir auf die Streuungskurven der Bilder 2, 3, 4 an. Wir finden als analytische Approximation — bei $\mathfrak{B} = 18000$ und 15000 nur bis zum Wendepunkte, der weitere Verlauf ist graphisch konstruiert — die Gleichungen:

$$\mathfrak{B} = 18000: \qquad \gamma = 57{,}7 \left(\frac{x}{100}\right)^2 + 1634 \left(\frac{x}{100}\right)^4 + 892 \left(\frac{x}{100}\right)^6$$

$$\mathfrak{B} = 15000: \qquad \gamma = 0{,}408 \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 0{,}114 \left(\frac{x}{10}\right)^4 - 0{,}0181 \left(\frac{x}{10}\right)^6$$

$$\mathfrak{B} = 10000: \qquad \gamma = 0{,}958 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1{,}453 \cdot 10^{-6} \cdot x^4.$$

Aus ihren ersten und zweiten Ableitungen ergeben sich nun die Kurven γ' und γ', in den Bildern 2, 3, 4.

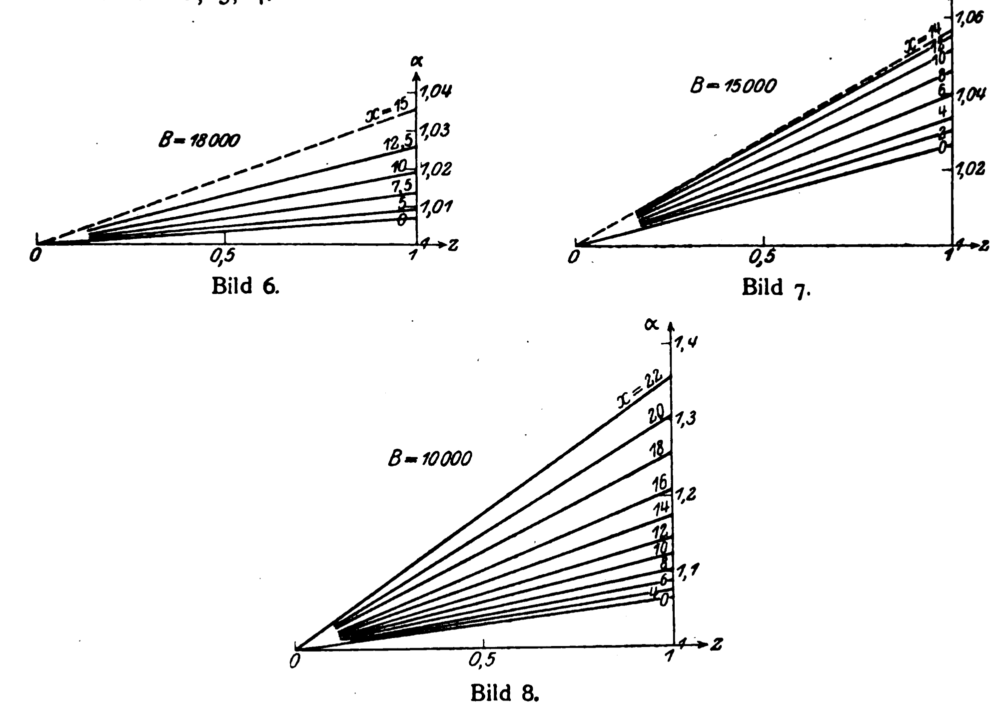


Bild 6.

Bild 7.

Bild 8.

Bild 6–8. Der Korrektionsfaktor α für verschiedene Stellen x der Eisenoberfläche.

Nach Gleichung (5) gibt uns γ'' unmittelbar die Geschwindigkeit, mit der sich die Tangentialkomponente in der Normalrichtung ändert. Sie entspricht also der Krümmung der Streuungskurve. Demnach können wir der Streuungskurve unmittelbar

folgendes entnehmen: Im Gebiet der Konvexität der Streuungskurve nimmt die Tangentialkomponente nach außen hin zu, im Gebiet ihrer Konkavität nimmt sie ab, an Wendepunkten bleibt sie konstant.

Nunmehr können wir aus der Streuungskurve allein den Korrektionsfaktor ableiten, der sich bei Gumlich und Rogowski aus der endlichen Dicke der Feldspule ergibt[1]). Denn aus Gleichung (5) erhalten wir

$$\alpha = \frac{\mathfrak{B}_x}{\mathfrak{B}_{x0}} = 1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d^2 \gamma}{d x^2} \cdot z.$$

In den Bildern 6, 7, 8 sind für eine Anzahl Stellen der Eisenoberfläche die Werte $\frac{p}{100} \frac{d^2 \gamma}{d x^2}$ am Ende einer Strecke von der Länge $z = 1$ cm aufgetragen. Die einzelnen Ordinaten-Endpunkte sind mit dem Anfangspunkte $z = 0$ der Strecke verbunden Nun ist aber der z-Achse der Ordinatenwert $\alpha = 1$ erteilt. So stellen die Gradenbüschel die Endpunkte der Ordinaten

$$\alpha = 1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d^2 \gamma}{d x^2} \cdot z$$

für

$$0 \leq z \leq 1$$

dar. An jede Grade ist die zugehörige Stelle der Eisenoberfläche angeschrieben. Die Entfernungen x sind von der Mitte des Bündels gezählt.

Gumlich und Rogowski haben in ihrer Arbeit den Korrektionsfaktor durch besondere Messungen bestimmt[2]). Wir wollen die Übereinstimmung mit unserem Ergebnis in einem Falle prüfen. Der Induktion $\mathfrak{B} = 15000$ entspricht ein Feld

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{0{,}4 \pi \mu} = 27{,}1 \frac{\text{AW}}{\text{cm}}.$$

Aus der angeführten Abbildung entnehmen wir hierfür einen prozentualen Korrektionsfaktor von etwa 3,8 %. Dies ist der experimentelle Wert.

Da die Feldspule eine Länge von 6 cm hatte, symmetrisch über die Mitte des Bündels gelegt war, und ihre Mittelebene 1 cm vom Eisen entfernt war, so entnehmen wir dem Bilde 7 unmittelbar zu $x = 3$ cm

$$\alpha = \sim 1{,}032$$

also in Prozenten

$$(\alpha - 1) \cdot 100 = \sim 3{,}2\,\%.$$

Dies ist der berechnete Wert, der in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen steht.

b) Die Normalkomponente:

Der Fluß der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ durch eine geschlossene Hülle ist gleich Null. Es sei diese Hülle die Oberfläche eines kleinen, auf dem Eisen ruhenden Parallelepipedons mit den Seiten dx, dy, dz (Bild 9). Da das Feld in der y-Richtung als homogen angenommen ist, so geht durch die der x-z-Ebene parallelen Seitenflächen kein Fluß. Wir erhalten also

$$\mathfrak{B}_{z0} \cdot dx \cdot dy - \left(\mathfrak{B}_{z0} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} \cdot dz\right) dx \cdot dy + \mathfrak{B}_{x0} \cdot dz \cdot dy - \left(\mathfrak{B}_{x0} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{x0}}{\partial x} \cdot dx\right) dz \cdot dy = 0.$$

Es bleibt

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = - \frac{\partial \mathfrak{B}_{x0}}{\partial x}, \tag{6}$$

worin uns wieder die rechte Seite aus der Streuungskurve bekannt ist. Die gleichen Überlegungen wie unter a) führen zur Annahme des gradlinigen Anstiegs der Normalkomponente, also zu dem Ansatz:

[1]) l. c. S. 263.
[2]) l. c. Abb. 3.

$$\mathfrak{B}_z = \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} \cdot z + \mathfrak{B}_{zo},$$

somit wegen Gleichung (6) zu

$$\mathfrak{B}_z = -\frac{\partial \mathfrak{B}_{xo}}{\partial x} \cdot z + \mathfrak{B}_{zo}. \tag{7}$$

Nun ergibt die Ableitung von Rogowski

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{xo}}{\partial x} = \frac{1}{\mu \cdot F} \cdot \frac{d f(x)}{dx}$$
$$= -\frac{U}{\mu \cdot F} \cdot \mathfrak{B}_{zo}$$
$$= -\frac{1}{p} \mathfrak{B}_{zo}.$$

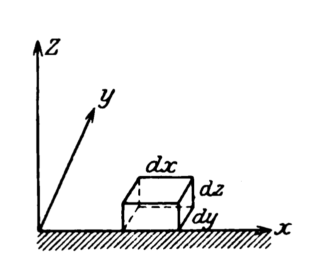


Bild 9. Zur Bildung des Hüllenintegrales des magnetischen Induktionsflusses.

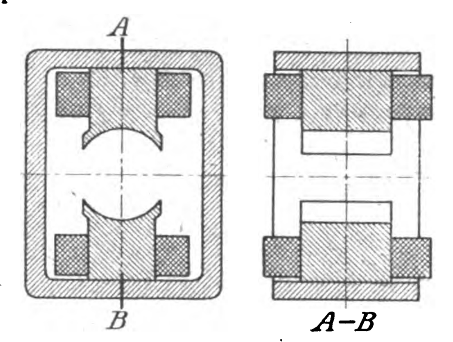


Bild 10. Die Gleichstrommaschine.

Dieses setzen wir in Gleichung (7) ein und erhalten

$$\mathfrak{B}_z = \mathfrak{B}_{zo}\left(1 + \frac{z}{p}\right). \tag{8}$$

Die Unabhängigkeit dieser Beziehung von γ ist nur scheinbar. Denn wegen

$$\mathfrak{B}_{zo} = \mathfrak{B}_{xo} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

und Gleichung (2) ist $\mathfrak{B}_z$ von der ersten Ableitung von γ abhängig. Sehr häufig, zumal in dem Bereiche der maximalen Permeabilität, wird $\frac{z}{p}$ gegen 1 zu vernachlässigen sein und somit $\mathfrak{B}_z$ als in der z-Richtung annähernd konstant anzusehen sein.

4. Weitere Beispiele.

Im folgenden seien noch einige eigene Streuungsmessungen nach dem abgeleiteten Verfahren behandelt.

a) Die Maschine.

Streuungsmessungen am Joch eines 2poligen 8,6 KW-Gleichstrommotors der Firma Schuckert & Co. (Bild 10) bei einer Induktion $\mathfrak{B} = 8900$ c. g. s. ergaben die Streuungskurve des Bildes 11. Es ergibt sich

$$\frac{F}{U} = \frac{16}{9}.$$

Als Permeabilität wurde aus bereits erwähnten Messungen von Gumlich für Gußeisen $\mu = 140$ angenommen und hiermit p berechnet. Auch hier bleiben die Neigungen (Bild 11a) in einem beträchtlichen Abschnitt unter 45°.

Es war anzunehmen, daß sich der Streufluß nicht gleichmäßig über den Jochumfang verteilte. Ob dies zutraf, wurde dadurch geprüft, daß zwischen zwei das Joch umschlingende Meßspulen außen und innen je eine flache Spule auf das Joch gesetzt wurde. Es ergab sich in der Tat, daß 90% des Streuflusses nach innen, nur 4,5%

nach außen verlief — der Rest von 5,5 % kommt auf die schmalen Seiten. Bei Bestimmung von $\operatorname{tg}\beta$ hatten wir gleichmäßige Verteilung, also je rund 47 % nach außen und innen angenommen. Da nun der Fluß sich praktisch homogen über das Eisen verteilt, so werden in jedem Falle außen wie innen die Tangentialkomponenten einander gleich sein. Dann geht aber die prozentuale Verschiebung ganz auf die Normalkomponente, d. h. direkt auf $\operatorname{tg}\beta$. Wir erhalten also

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{innen}} = \frac{90}{47}\cdot\operatorname{tg}\beta = \sim 1{,}9\operatorname{tg}\beta$$

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{außen}} = \frac{4{,}5}{47}\cdot\operatorname{tg}\beta = \sim 0{,}1\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Um soviel günstiger also noch liegen die Verhältnisse an der Außenseite gegenüber Bild 8a[1]).

Bereits vor Gumlich und Rogowski hat Denso.[2]) die früher angegebene Methode zur absoluten Bestimmung der Permeabilität besonders in Rücksicht auf das Joch von Dynamomaschinen beschrieben. Es ist erklärlich, daß seine Arbeit wenig Resonanz gefunden hat, denn es fehlte in ihr die Möglichkeit, die Genauigkeit der Methode zahlenmäßig und exakt festzustellen.

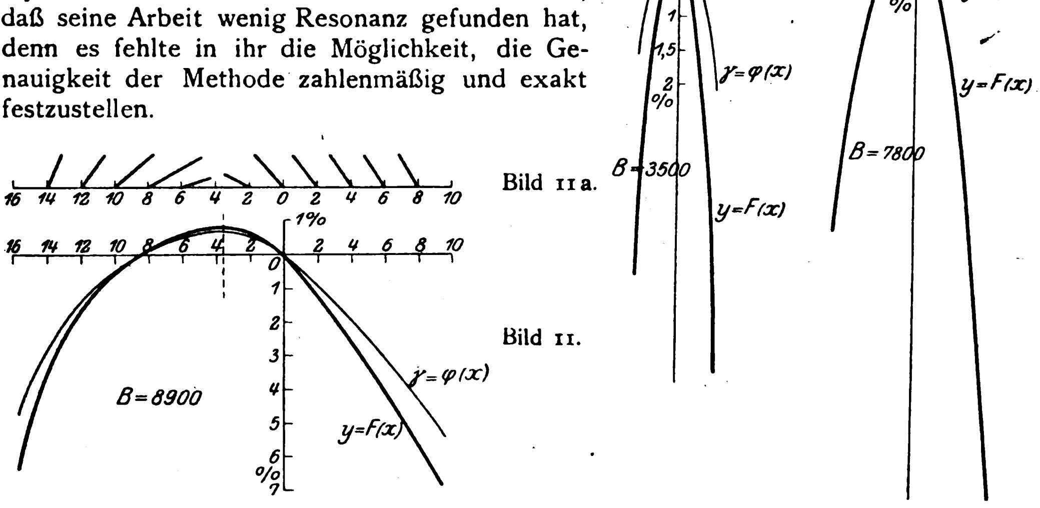


Bild 11. Kurven der Streuung und der Austrittsneigungen an der Gleichstrommaschine.

Bild 11a. Die Richtungen der Feldlinien auf der Oberfläche des Maschinenjoches.

Bild 12. Kurven der Streuung und der Austrittsneigungen am einzelnen Epsteinbündel.

Bild 13. Dasselbe wie Bild 12 bei lose angefügtem Joch.

b) Das einzelne Epsteinbündel in einer Spule.

Wir untersuchen noch in zwei besonders ungünstigen Fällen die Austrittsrichtung der Feldlinien. Über die Enden eines einzelnen Bündels wurden je 18 cm lange Magnetisierungsspulen geschoben, die in der Mitte also eine Länge von 14 cm freiließen. Hier wurde die Streuung bei einer Induktion von $\mathfrak{B} = 3500$ gemessen. Unter Zugrundelegung von $\mu = 3330$ und dem Querschnitt des Bündels $3 \times 2{,}5$ cm ergibt sich Bild 12.

Bild 13 stellt den gleichen Fall dar, nur ist mittels lose angelegter drei weiterer Bündel eine Art Joch geschaffen. Die Induktion betrug diesmal 7800. Hierzu wurde μ zu 5650 angenommen.

Es ist klar, daß bei diesen niedrigen Induktionen, bei denen μ nahezu seine maximale Größe hat, und bei der ungünstigen Anordnung die Streulinien sehr steil verlaufen werden, wie es auch die Bilder 9 und 10 zeigen. Aber auch hier gibt es einen merklichen Bereich, in dem die Linien wesentlich unter 45° austreten.

[1]) Die in Bild 8 eingezeichnete Stelle geringster Streuung fällt, wie zu erwarten, auf die Mitte des Jochs.

[2]) Denso, Diss. Rostock.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 7. Heft. 1920.

Stromverdrängung beim Seekabel.

Von

Otto Oldenberg.

(Mitteilung aus dem Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen.)

Inhalt:

Einleitung: Problemstellung; Literatur.

Während des Krieges wurden in der Ostsee unter Leitung von Herrn Professor Reich Messungen an einadrigen Seekabeln ausgeführt, die am Ende mit dem Wasser leitend verbunden mit Wechselströmen verschiedener Frequenzen gespeist wurden. Der Zweck dieser Versuche war die Durchbildung einer Methode, in enger Hafeneinfahrt die Schiffahrtslinie kenntlich zu machen. Einen Teil der Ergebnisse dieser Arbeit hat neuerdings H. Lichte[1]) veröffentlicht. Gemessen wurde bei den Versuchen außer den charakteristischen Kabelgrößen, Widerstand, Selbstinduktion, Kapazität und Ableitung pro km, die magnetische Feldstärke in verschiedenen Abständen vom Kabel, sowie die Abnahme der effektiven Stromstärke im Kabel mit der Entfernung vom Anfangspunkt. Auffallend war bei den Versuchen das von der üblichen Annahme abweichende Ergebnis, daß mit zunehmender Frequenz des Wechselstroms der Ohmsche Widerstand des Kabels zunahm und daß sich gleichzeitig die Selbstinduktion verringerte. Eine Erklärung wurde darin gefunden, daß sich mit wachsender Frequenz die elektrische Strömung im Wasser enger in der Nähe des Kabels zusammenzieht.

In der vorliegenden Arbeit soll diese dem Skineffekt verwandte Erscheinung theoretisch begründet werden, um damit die Versuchsergebnisse zu erklären. Über diese Versuche hinaus hat die Theorie wohl allgemeineres Interesse für die Untersuchung der Zeichenübermittlung durch das einadrige Seekabel; denn hierfür bilden die charakteristischen Kabelgrößen die Grundlage.

Für die Mitteilung der noch nicht veröffentlichten Versuchsergebnisse und für die Anregung zu dieser Arbeit schulde ich Herrn Professor Reich, dem Leiter des unterzeichneten Instituts, aufrichtigen Dank.

Ausgegangen wird von der nächstliegenden Annahme, daß das Kabel von einer unbegrenzten, homogenen Masse von Seewasser umgeben ist. Später wird eine zylinderförmige Begrenzung des Seewassers angenommen, um wenigstens qualitativ ein Bild vom Einfluss der Begrenzung der Wasserschicht durch den Meeresspiegel zu gewinnen. Sodann wird der große Einfluß der Eisenbewehrung eingehend untersucht.

[1]) E. T. Z. 1920, S. 88–90.

Die Stromverteilung in der Umgebung eines Seekabels ist zuerst, und zwar mit außerordentlich großer Allgemeinheit, von J. J. Thomson[1]) berechnet. Er untersuchte auf Grund der Maxwellschen Gleichungen die Stromwellen in Kern und Mantel eines konzentrischen Kabels, dessen Mantel nach außen als unbegrenzt angenommen wird. Die Theorie des Skineffektes ist in seiner Theorie als Grenzfall mit enthalten. Daß durch diese große Allgemeinheit bei der Diskussion der Gleichungen zahlreiche Vernachlässigungen erforderlich werden, durch die wesentliche Einzelheiten verloren gehen, wendete Sommerfeld[2]) ein. Von einigen Abweichungen zwischen Thomsons Endformeln und den hier erhaltenen Resultaten wird unten (S. 297f.) die Rede sein.

Für das konzentrische Kabel hat A. Russell[3]) Stromverteilung, Widerstand und Selbstinduktion berechnet. Er nahm aber als Außenleiter ein Metallrohr an, so daß seine Annäherungen auf die Verhältnisse beim Seekabel nicht anwendbar sind.

M. B. Field[4]) berechnete nach anderer Methode die Energieverluste, die bei einem unterirdischen Kabel durch induzierte Ströme in einem eisernen Schutzrohr verursacht werden. Unser Problem des Seekabels unterscheidet sich wesentlich von seinem dadurch, daß bei uns die Eisenbewehrung als Bestandteil des Rückleiters aufgefaßt wird.

F. Breisig[5]) machte Messungen an eisenbewehrten Kabeln, die auf freiem Felde ausgelegt waren. Er fand bei zunehmender Frequenz einen stark anwachsenden Widerstand und eine stark abnehmende Selbstinduktion.

Zu ähnlichen Ergebnissen über den Widerstand gelangte M. Swingedauw[6]) bei Versuchen mit einem bleiarmierten Kabel.

Versuche über die Wirkung eines nahe benachbarten Rückleiters auf die Stromverteilung in einem Draht sind ausgeführt von Kenelly, Laws und Pierce[7]). Bei ihnen hatte der Rückleiter nicht die Form eines konzentrischen Zylinders. Auch sie fanden mit wachsender Frequenz eine Zunahme des Widerstandes und eine Abnahme der Selbstinduktion. Diese Versuche besitzen möglicherweise besonderes Interesse im Hinblick auf die Verwendung sehr hochfrequenter Ströme in der Mehrfachtelephonie; denn bei den hierbei benutzten Frequenzen ist eine erhebliche Stromverdrängung durch Wirkung des benachbarten Drahtes wohl denkbar.

I. Das unbewehrte Kabel im unbegrenzten Wasser.

Das Verfahren ist dasselbe, das auf Berechnung der Stromverdrängung in einem Draht angewandt wird[8]). Aus dem Kabel denken wir uns ein Stück herausgeschnitten durch zwei senkrecht zur Drahtachse liegende Ebenen. Wir nehmen an, daß die Stromrichtung überall parallel zur Drahtachse ist. Eine solche Strömung können wir auch in einem kurzen Kabelstück herstellen, das wir uns begrenzt denken durch zwei Querebenen unendlich hoher Leitfähigkeit. Denn der Vektor der elektrischen Kraft steht senkrecht auf diesen Ebenen, ist deshalb parallel zur Achse. Also nur die Unterschiede quer zur Drahtachse sollen untersucht werden; wir verzichten von vornherein auf Vorgänge längs der Drahtachse wie Wellenbildung.

Zunächst wird als Rückleiter lediglich das Seewasser angenommen. Wir setzen:

b, c = innerer bezw. äußerer Radius der Isolation.

C = effektive Gesamtstromstärke im Draht.

[1]) Recent researches in electricity and magnetism, Oxford 1893, S. 262—295.
[2]) Ann. d. Ph. 67, S. 234, 1899.
[3]) Phil. Mag. (6) 17, S. 524—552, 1909.
[4]) E. T. Z. 1904, S. 813—816.
[5]) E. T. Z. 1899, S. 842—845.
[6]) C. R. 167, S. 994—996, 1918 und 168, S. 87—88, 1919.
[7]) Proc. Amer. Inst. Electr. Eng. 34, 1749—1814, 1915. Beibl. z. d. Ann. d. Ph. 40, S. 435, 1916.
[8]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln (Leipzig 1909) S. 142ff. An diese Darstellung schließt sich die im folgenden gewählte Bezeichnung an.



ϱ = spezifischer Widerstand.
μ = Permeabilität.
r = Abstand von der Drahtachse.

Index d soll den Draht, Index w das Wasser kennzeichnen.

Im Kabel ebenso wie im Seewasser gelten die Maxwellschen Gleichungen:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r \mathfrak{H}}{\partial r} = 4\pi i \tag{1}$$

$$\varrho \frac{\partial i}{\partial r} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{2}$$

Der Verschiebungsstrom im Seewasser wird vernachlässigt.

Für die einzelnen Variabeln ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r \mathfrak{H}}{\partial r}\right) = \frac{4\pi\mu}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial i}{\partial r}\right) = \frac{4\pi\mu}{\varrho}\frac{\partial i}{\partial t}$$

In der Annahme, daß es sich nur um periodische Vorgänge von der Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ handelt, gelten für $\mathfrak{H}$ und i die komplexen Ansätze

$$\mathfrak{H} = \sqrt{2}\, G(r) e^{i\omega t}; \quad i = \sqrt{2}\, K(r) e^{i\omega t}.$$

Darin sind die effektive magnetische Feldstärke G und die effektive Stromdichte K Funktionen von r allein. Für G und K ergeben sich durch Einsetzen die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) G = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2 K}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dK}{dr} + k^2 K = 0 \tag{4}$$

Darin bedeutet $k^2 = -i\frac{4\pi\mu\omega}{\varrho}$; $k = (1-i)\cdot 2\pi\sqrt{\frac{\mu\nu}{\varrho}}$.

Diese Differentialgleichungen führen auf Besselsche Funktionen. Die innerhalb des Drahtes gültigen Funktionen finden sich bei Jahnke-Emde, S. 143. Beim benutzten Kabel vom Drahtradius b = 0,142 cm und den benutzten Frequenzen 50—800 Perioden pro sec spielt die Stromverdrängung innerhalb des Drahtes keine Rolle. Im folgenden wird deshalb nur die Strömung im umgebenden Wasser untersucht.

Da die Strömung für $r = \infty$ verschwinden muß, kommen als Integral nur Besselsche Funktionen 3. Art (Jahnke-Emde, S. 94) in Frage. Für k ist oben der Wurzelwert mit negativem imaginären Teil gewählt. Deshalb treten die Besselschen Funktionen $H_0^{(2)}(kr)$ und $H_1^{(2)}(kr)$ ein. (Bei der Wahl des entgegengesetzten Wertes von k werden die Endresultate unter Benutzung der Funktionen $H_0^{(1)}$ und $H_1^{(1)}$ ganz dieselben). So ergeben sich als Integrale

$$G(r) = \frac{2C}{c\,H_1^{(2)}(kc)}\cdot H_1^{(2)}(kr) \tag{5}$$

$$K(r) = \frac{k\cdot C}{2\pi c\,H_1^{(2)}(kc)}\cdot H_0^{(2)}(kr) \tag{6}$$

Der Index (2) dieser Besselschen Funktionen kann im folgenden meist fortbleiben. Der Faktor von G ergibt sich aus der Grenzbedingung, daß $G(b) = \frac{2C}{c}$ sein muß. Hieraus folgt mit Hilfe der ersten Maxwellschen Gleichung der Faktor von K.

Zunächst soll festgestellt werden, ob sich im Seewasser der Verschiebungsstrom neben dem Leitungsstrom geltend macht. Die erste Maxwellsche Gleichung hat

nach Einführung des Verschiebungsstromes die Form $\frac{1}{r}\frac{\partial r \mathfrak{H}}{\partial r} = 4\pi\left(i + \frac{\varepsilon\varrho}{4\pi c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right)$, die zweite Gleichung bleibt unverändert. Die Differentialgleichungen (5) und (6) für das Magnetfeld G und die Stromdichte K ändern sich hierdurch nicht; jedoch bekommt k^2 eine veränderte Bedeutung: $k^2 = \frac{4\pi\omega}{\varrho}\left(\frac{\varepsilon\varrho\omega}{4\pi c^2} - i\right)$. Die Zahlenrechnung für die höchste, benutzte Frequenz $\nu = 800$, ferner für $\varrho = 10^{11}\frac{cm^2}{sec}$; $\varepsilon = 81$ ergibt $\frac{\varepsilon\varrho\omega}{4\pi c^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-6}$. Hierdurch wird der Wert von k nicht merklich beeinflußt.

Unsere erste Aufgabe ist die Untersuchung der komplexen Stromdichte

$$i = \frac{\sqrt{2}\,k \cdot C}{2\pi c H_1(kc)} \cdot H_0(kr) \cdot e^{i\omega t} \tag{7}$$

ihrem Effektivwert und ihrer Phase nach. Beides soll bezogen werden auf Wert und Phase des im Draht fließenden Stromes $\sqrt{2}\,C \cdot e^{i\omega t}$.

Für die Stromdichte ergibt sich der Effektivwert

$$\frac{i_{eff}}{C} = \sqrt{\frac{2\mu}{\varrho}\frac{\omega}{2\pi}} \cdot \frac{1}{c \cdot |H_1(kc)|} \cdot |H_0(kr)|. \tag{8}$$

Für die Funktion $H_0^{(1)}(x\sqrt{i})$ findet sich bei Jahnke-Emde eine Tafel (S. 139). Zu dieser ist die von uns gebrauchte Funktion $H_0^{(2)}(kr)$ konjugiert komplex, da das Argument $kr = (1-i) \cdot 2\pi\sqrt{\frac{\nu}{\varrho}} \cdot r$ konjugiert komplex zu $x \cdot \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot x$ ist (s. Jahnke-Emde, S. 95). Die Tafel ist also nach Umkehrung aller Vorzeichen von i ohne weiteres zu benutzen. Da k für Seewasser sehr klein wird, so entsprechen z. B. für $\nu = 50$ den ersten beiden Argumenten der Tafel $x = 0$ und $x = 0{,}2$ die Radien $r = 0$ und $r = 10$ m. Um auch innerhalb dieses Querschnittes die Stromverteilung zu berechnen, sind für die Besselschen Funktionen Annäherungen zu benutzen. Da H_1 (kr) in Gleichung (7) überhaupt nur für die innere Grenze des Wassers, also für einen kleinen Wert des Arguments benutzt wird, genügt hierfür völlig die Annäherung. Diese läßt sich aus der Definition der Besselschen Funktionen 3. Art (Jahnke-Emde S. 95) leicht ableiten:

$$H_1^{(2)}(kr) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\,|k| \cdot r}(-1 + i). \tag{9}$$

Daraus folgt unter Benutzung der Definition für k:

$$\frac{i_{eff}}{C} = 2\pi^2\frac{\nu}{\varrho}|H_0(kr)|, \tag{10}$$

worin für H_0 (kr) bei Argumenten $|k| r < 0{,}2$ die Annäherung

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \ln\frac{2}{\gamma\,|k| \cdot r} \text{ zu setzen ist.} \tag{11}$$

Darin ist $\gamma = 1{,}781$.

Im folgenden wird das elektromagnetische Maßsystem benutzt. Der spezifische Widerstand des Seewassers ist $\varrho = 10^{11}\frac{cm^2}{sec}$. Die Zahlenrechnung für die Stromdichte ist durchgeführt für die kleinste, eine mittlere und die größte der benutzten Frequenzen $\nu = 50$, $\nu = 400$ und $\nu = 800$. Das Ergebnis, die Stromdichte pro Effektivstrom 1 als Funktion des Abstandes vom Draht, ist in Bild 1 aufgetragen. Am Innenrand des Wassers steigt für $\nu = 800$ die Stromdichte auf den Wert $769 \cdot 10^{-9}\frac{1}{cm^2}$ (nicht auf dem Bild).

Betrachten wir einen bestimmten Radius bei Veränderung der Frequenz, so nimmt die Stromdichte dicht am Draht mit wachsender Frequenz stark zu, in großer



Entfernung vom Draht nimmt sie ab. Dadurch wird erreicht, daß die Gesamtstromstärke denselben Betrag C behält; hierzu trägt außerdem bei, daß alle Phasenverschiebungen mit wachsender Frequenz zunehmen, so daß die Einzelströme sich bei der Summation z. T. aufheben. Wenn wir in unserem Zahlenbeispiel die Frequenz von 50 auf 800 steigern, nimmt innerhalb eines Radius von 50,3 m die Stromdichte zu, weiter draußen nimmt sie ab.

Was lehrt uns die Rechnung für die am Anfang genannten Versuche? Die Strömung im Wasser soll dem Schiff in enger Hafeneinfahrt bei Nebel den Kurs zeigen. Hierzu scheint bei gleicher Stromstärke hohe Frequenz zweckmäßig zu sein, weil dabei auf dem Schiff beim Überqueren des Kabels ein viel schärferes Maximum der elektrischen Stromdichte im Wasser nachzuweisen ist als bei niederer Frequenz Nur bei großer Wassertiefe in der Hafeneinfahrt wäre geringere Frequenz zweckmäßig, damit die Stromdichte am Meeresspiegel nicht zu klein wird.

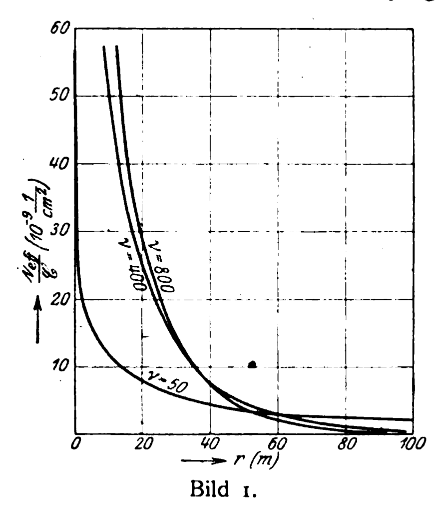


Bild 1.

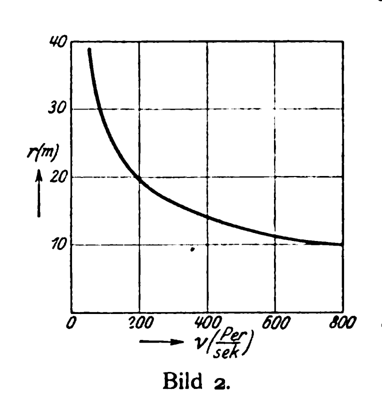


Bild 2.

Die Stromdichte nimmt bei gleicher Frequenz betrachtet stetig mit r ab. Bei weitem den größten Wert hat sie dicht am Kern für r = c. Daraus folgt jedoch nicht, daß die größten Elektrizitätsmengen dicht am Kern fließen, weil hier der durchströmte Querschnitt nur klein ist. Deshalb scheint folgende Frage zweckmäßig: Wir denken uns das Wasser eingeteilt durch Zylinderflächen, die mit dem Draht konzentrisch sind, von 1 cm Abstand. In welchem der hierdurch begrenzten Zylindermäntel fließt die größte Gesamtströmung? Das bedeutet die Frage nach dem Maximum der Funktion $i_{eff} \cdot r$ oder gemäß Gleichung (8) nach dem Maximum der Funktion $|H_0(kr)| \cdot r$. Nun hat die Funktion $|H_0(x\sqrt{-i})| \cdot x$ ein Maximum für $x = 0{,}77$. Das ist leicht graphisch festzustellen. Wenn die Frequenz wächst, so ändert sich nicht die Lage dieses Maximums bezüglich der x-Koordinate, sondern es ändert sich nur der Maßstab, durch den x proportional dem Abstand r ist. Also folgt aus der Maximalbedingung

$$x = |k| \cdot r = 0{,}77 \quad \text{oder} \quad r = 0{,}087 \sqrt{\frac{\varrho}{\mu \nu}}.$$

Dieser von der Strömung bevorzugte Radius rückt also an den Kern heran umgekehrt proportional der Wurzel aus der Frequenz. Für das als Beispiel benutzte Kabel ist dieser bevorzugte Radius für verschiedene Frequenzen in Bild 2 aufgetragen. Wie bei der Stromverdrängung in einem dicken Draht die Stromlinien vom Kern fortgedrängt werden, so werden nach diesem Bild im konzentrischen Kabel die Stromlinien des Wassers an den Kern, in dem ein entgegengesetzter Strom fließt, herangezogen.

Gleichung (7) ergibt auch die Phasenvoreilung δ der Stromdichte $\mathfrak{i}$ vor dem Gesamtstrom im Wasser $(-\sqrt{2}\,C \cdot e^{i\omega t})$. Für δ ergibt sich die Gleichung $\operatorname{tg}\delta = \frac{\mathfrak{Im}\,H_0(kr)}{\mathfrak{Re}\,H_0(kr)}$. In Bild 3 sind für $\nu = 50$, $\nu = 400$ und $\nu = 800$ die zusammengehörigen Werte von δ und r in Vektorform aufgetragen. In gewissen, von der Frequenz abhängigen Abständen r vom Kabel kehren immer dieselben Werte der Strömungsphase wieder. Also neben der Welle, die sich immer längs des Kabels ausbildet, tritt hier eine Welle quer zum Kabel auf.

Sehr viel übersichtlicher wird der Stromvorgang dargestellt, wenn wir in Gleichung (7) für große Radien die Besselsche Funktion durch die Exponentialfunktion annähern (Jahnke-Emde S. 102):

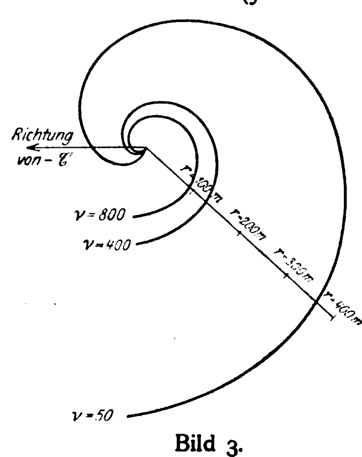


Bild 3.

$$\mathfrak{i} = \text{const} \cdot \frac{e^{-\frac{|k|r}{\sqrt{2}} + i\left(\omega t - \frac{|k|r}{\sqrt{2}}\right)}}{\sqrt{\frac{|k|r}{\sqrt{2}}}}$$

Die Strömung stellt also eine nach außen, d. h. quer zum Kabel, fortschreitende Wellenbewegung dar. Die „Querwellenlänge" beträgt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\varrho}{\mu\nu}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Bewegung ist $\sqrt{\frac{\nu \cdot \varrho}{\mu}}$. Die Welle ist stark räumlich gedämpft, vor allem durch den Faktor $e^{-\frac{|k|r}{\sqrt{2}}} = e^{-\frac{2\pi r}{\lambda}}$; d. h beim Fortschreiten längs des Radius um λ nimmt die Amplitude auf den 480. Teil ab; deshalb ist diese Wellenbewegung der Beobachtung kaum zugänglich. Für technischen Wechselstrom ($\nu = 50$ Perioden pro sec.) wird die Länge dieser Querwelle im Wasser 448 m und ihre Geschwindigkeit 22,4 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$, also eine Zahl, deren Größenordnung der Schallgeschwindigkeit im Wasser viel näher liegt als der Lichtgeschwindigkeit.

Die Vektordiagramme des Bildes 3 zeigen, daß dicht am Draht die Stromdichte um wenige Grad über $\frac{\pi}{2}$ hinter dem im Draht selbst gültigen Stromvektor $+C$ zurückbleibt. Diese Phasenverschiebung zwischen der Strömung dicht am Draht und im Draht selbst beträgt 95^0 für $\nu = 50$, 103^0 für $\nu = 800$. Die Strömung dicht am Draht ist also nahezu in Phase mit der vom Draht her im umgebenden Wasser induzierten E. M. K. Rückströmung und Induktion sind überall die beiden Ursachen der Strömung im Wasser; dicht am Draht überwiegt hiernach die Induktion weitaus.

Es liegt nahe zu fragen, in welchem Abstand vom Draht die Stromdichte gleichgerichtet wird mit der gesamten Stromstärke im Wasser, also mit dem Vektor $-C$. Die Bedingung hierfür ist, daß der imaginäre Teil von $H_0(kr)$ verschwindet. Dies tritt ein für $|k|\,r = 1{,}85$. Daraus folgt allgemein die Bedingung $r = 0{,}206\sqrt{\frac{\varrho}{\mu\nu}}$. Hieraus ergeben sich in Übereinstimmung mit Bild 3 für $\nu = 50$ der Radius 92 m, für $\nu = 800$ der Radius 23 m. Die außerhalb dieser Radien fließende Strömung muß trotz ihrer geringeren Dichte großen Anteil am Gesamtstrom haben.

Da die erwähnten Versuche in den geringen Meerestiefen der Ostsee stattfanden, ergibt sich hier die Notwendigkeit, diese Rechnung durch die Annahme einer nach außen begrenzten Wassermasse zu ergänzen. Das wird weiter unten (S. 298 ff.) geschehen.

Für die Definition des Ohmschen Widerstandes pro Längeneinheit R benutzen wir die pro Sekunde in der Länge 1 des Kabels entwickelte Joulesche Wärme Q.

Es werde gesetzt

$$H_0(kr) = g(|k|r) + i \cdot h(|k|r), \text{ also}$$
$$-\sqrt{-i}\, H_1(kr) = g'(|k|r) + i\, h'(|k|r);$$
$$\text{ferner } |k| \cdot b = q \text{ und } |k| \cdot c = p. \tag{12}$$

$$R = R_d + R_w = \frac{Q}{C^2} = \frac{1}{C^2}\left(\varrho_d \int_0^b i^2_{\text{eff}} \cdot 2\pi r\, dr + \varrho_w \int_c^\infty i^2_{\text{eff}} \cdot 2\pi r\, dr\right). \tag{13}$$

Das erste Integral liefert den Widerstand des Drahtes bei gewöhnlichem Skineffekt. Seine Berechnung mit Hilfe partieller Integration findet sich im Lehrbuch von Orlich[1]). Auf demselben Wege ist das zweite Integral berechnet. So ergibt sich schließlich für R der Ausdruck

$$R = \frac{\varrho_d \cdot q}{2\pi b^2} \cdot \frac{\operatorname{ber}(q) \cdot \operatorname{bei}'(q) - \operatorname{bei}(q) \cdot \operatorname{ber}'(q)}{\operatorname{ber}'^2(q) + \operatorname{bei}'^2 q} + \\ + \frac{\varrho_w \cdot p}{2\pi c^2} \cdot \frac{g'(p) \cdot h(p) - h'(p)\, g(p)}{g'^2(p) + h'^2(p)} \times 10^{-4} \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}. \tag{14}$$

Entsprechend wird der Selbstinduktionskoeffizient pro Längeneinheit L definiert durch die magnetische Energie T:

$$T = \frac{1}{2} L\, C^2 = \frac{1}{8\pi} \int \mu\, \mathfrak{H}^2_{\text{eff}}\, d\tau \tag{15}$$

Hier fällt die Schwierigkeit fort, die bei der Theorie des gewöhnlichen Skineffektes auftritt, daß die magnetische Energie pro Längeneinheit eines geraden Drahtes unendlich wird. Hier braucht sich deshalb die Rechnung nicht auf eine Veränderung von L zu beschränken, sondern L selbst läßt sich angeben. Die magnetische Energie T muß für Draht, Isolator und Seewasser getrennt ausgerechnet werden. Das Ergebnis ist:

$$T_d = \frac{C^2}{q} \frac{\operatorname{ber}(q) \cdot \operatorname{ber}'(q) + \operatorname{bei}(q) \cdot \operatorname{bei}'(q)}{\operatorname{ber}'^2(q) + \operatorname{bei}'^2(q)}\ ^{2)}.$$

Die Integration für den Isolator ist ohne Schwierigkeit durchführbar; ihr Ergebnis ist:

$$T_i = C^2 \cdot \ln \frac{c}{b}.$$

Für das Seewasser ist das Integral nach demselben Verfahren wie für den Draht durch partielle Integration auszurechnen; hier sei nur das Ergebnis mitgeteilt:

$$T_w = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{g(p) \cdot g'(p) + h(p) \cdot h'(p)}{g'^2(p) + h'^2(p)}.$$

Der Selbstinduktionskoeffizient pro Längeneinheit des Kabels ist also

$$L = 2\left\{\frac{1}{q} \cdot \frac{\operatorname{ber}(q) \cdot \operatorname{ber}'(q) + \operatorname{bei}(q) \cdot \operatorname{bei}'(q)}{\operatorname{ber}'^2(q) + \operatorname{bei}'^2(q)} + \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{p} \frac{g(p) \cdot g'(p) + h(p) \cdot h'(p)}{g'^2(p) + h'^2(p)}\right\} \\ \times 10^{-4} \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \tag{16}$$

Die Formeln zeigen, daß für die Berechnung von R und L nicht der Verlauf von i und $\mathfrak{H}$ über den ganzen Querschnitt ausgerechnet zu werden braucht, sondern e) genügen die Werte der Besselschen Funktionen an den Grenzen des Isolators, also für die kleinen Werte des Radius r = b und r = c. Deshalb wird die Genauigkeit der Formeln nicht wesentlich vermindert durch Einführung der ersten Glieder von Reihen. Für den Draht finden sich die Näherungsformeln bei Jahnke-Emde[3]).

[1]) E. Orlich: Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909, S. 138.

[2]) s. Orlich S. 141.

[3]) Funktionentafeln S. 144.

Bei den erwähnten Versuchen beeinflußt die Stromverdrängung innerhalb des Drahtes die Werte von R und L um weniger als 4‰. Deshalb kann für die Zahlenrechnung gleichmäßige Stromverteilung im Draht selbst angenommen werden. Bei den für das Wasser gültigen Formeln tritt nach Reihenentwicklung der spezifische Widerstand ρ_w im Nenner der Glieder auf. Wegen des außerordentlich hohen Wertes von ρ_w geben schon die ersten Glieder der Reihen sehr große Genauigkeit.

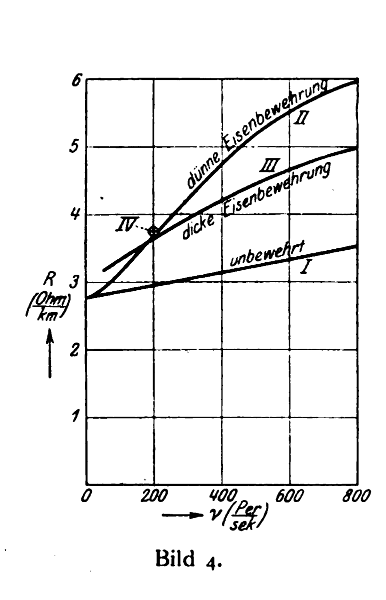


Bild 4.

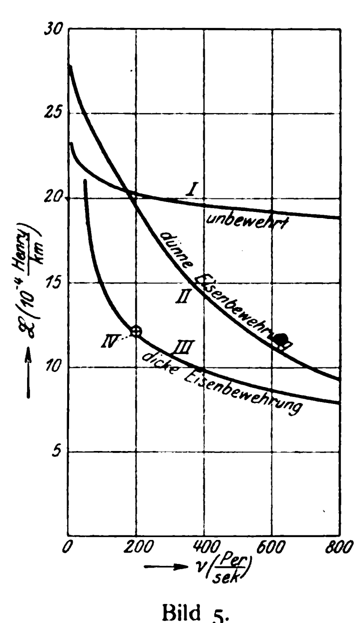


Bild 5.

Die oben benutzte Näherungsformel (11) ergibt:

$$g = \frac{1}{2}; \qquad h = \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\gamma \cdot |k| \, r}\right)$$

$$g' = 0; \qquad h' = -\frac{2}{\pi |k| r}.$$

Einsetzen dieser Größen in die Formel für R ergibt für den Gesamtwiderstand pro Kilometer des Kabels die einfache Annäherung:

$$R = R_d + \pi^2 \nu \times 10^{-4} \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}. \tag{17}$$

Das merkwürdige Ergebnis ist also, daß der Anteil des Seewassers am Widerstand $\pi^2 \nu$ unabhängig ist vom spezifischen Widerstand des Seewassers ρ_w; lediglich durch die Angabe einer Zeit ist der Widerstand pro Längeneinheit vollständig bestimmt. Bei Verkleinerung von ρ_w ziehen sich die Stromlinien gerade so viel enger um den Draht zusammen, daß der Gesamtwiderstand unverändert bleibt.

Die oben durchgeführte Berechnung der Stromdichten zeigt uns die Ursache für die Erhöhung des Widerstandes mit der Frequenz darin, daß sich die Strömung auf einen kleineren Querschnitt zusammendrängt.

Für das benutzte Kabel, Kupferdraht mit b = 0,142 cm, c = 0,69 cm ist R als Funktion der Frequenz für den benutzten Frequenzbereich von $\nu = 50$ bis 800 in Bild 4, Kurve I aufgetragen. Daß die prozentuale Änderung von R nicht stärker ist, liegt daran, daß der Hauptanteil von R auf Rechnung des Drahtes kommt, nämlich $R_d = 2{,}76 \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}$.

Die entsprechende Näherungsformel für L heißt:

$$L = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2\pi^2\gamma^2} \cdot \frac{\varrho}{b^2\nu}\right) \times 10^{-4} \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \qquad (18)$$

L ist als Funktion von ν in Bild 5 Kurve I aufgetragen. Der Anteil von Draht und Isolator an der magnetischen Energie beträgt nur etwa den 8. Teil. Der Hauptteil der magnetischen Energie liegt im Wasser. Obwohl die Strömung im Wasser, wie gezeigt, mit wachsender Frequenz kleinere Abstände vom Draht bevorzugt, ist die hierdurch bedingte Verkleinerung von L nur unerheblich; denn gleichzeitig wächst die Stromdichte wenigstens in der Nachbarschaft des Drahtes stark an.

Wir müssen uns schließlich über einige Abweichungen klar werden, die zwischen unseren Formeln für R und L und den Resultaten bestehen, die J. J. Thomson in seinem grundlegenden Werk[1]) auf ganz anderem Wege erhält. Thomson berechnet für gegebene Stromstärke I den zugehörigen Wert E der Klemmenspannung pro km; dadurch daß er E : I in reellen und imaginären Teil zerlegt, erhält er Widerstand und Selbstinduktion des Kabels. Der Wert von E (Thomson Gleichung 37) ergibt sich leicht auch aus unseren Formeln, dadurch daß das Induktionsgesetz auf einen Elementarzylinder längs der Oberfläche von Draht und Wasser angewandt wird. Widersprüche ergeben sich aber zwischen den folgenden Annäherungen Thomsons (S. 293 f.) und unseren Resultaten.

Die erste Annäherung von Thomson (Artikel 272) enthält den allerdings unwahrscheinlichen Fall, daß Draht und Wasser beide sehr hohen spezifischen Widerstand besitzen. Auch unsere Gleichungen gelten ohne weiteres für diesen speziellen Fall. Thomson vernachlässigt im Gesamtwiderstand Q des Kabels den Außenleiter wegen seines großen Querschnittes (Gleichung 40). Wie kommt es, daß bei Thomson im Ausdruck für den Selbstinduktionskoeffizienten P auch der Energieanteil des Außenleiters herausfällt, obwohl die Strömung sich weit nach außen ausbreitet? Dies rührt daher, daß Thomson die Besselschen Funktionen $K_0 : K_0'$ gegen $J_0 : J_0'$ (Gleichung 37) vernachlässigt. Nun hat aber $K_0 : K_0'$ einen reellen Teil, der zwar neben dem sehr großen, rein imaginären Wert von $J_0 : J'_0$ verschwindet, der aber nachher bei der Trennung in reellen und imaginären Teil neben dem $\ln \frac{b}{a}$ durchaus nicht vernachlässigt werden darf, vielmehr den $\ln \frac{b}{a}$ weitaus übertreffen kann. In Gleichung (40) fehlt deshalb im Ausdruck für die Selbstinduktion das beträchtlichste Glied, das vom Energiebetrag des Außenleiters herrührt.

Auf S. 294 gibt Thomson Annäherungen, die für unseren Fall des Unterseekabels und zwar bei hoher Frequenz (jedoch nicht äußerst hoher Frequenz) zutreffen. Er vernachlässigt hierbei den Ohmschen Widerstand des Drahtes selbst neben dem Ohmschen Widerstand des Wassers sowie den Anteil der im Draht befindlichen Energie neben den Anteilen von Isolator und Wasser. Diese Formeln enthalten aber noch weitere Abweichungen von unseren Gleichungen (17) und (18) für R und L. Im Wert des Widerstandes $= 3\pi^2\nu$ rührt der Faktor 3 daher, daß Thomson im Argument seiner Besselschen Funktion K_0 das Vorzeichen von $\sqrt{i}$ so wählt, daß dies Argument einen negativen reellen Teil bekommt. Hierfür erfüllt aber die Funktion K_0 nicht mehr die wesentliche Forderung, daß sie im unendlichen verschwindet. Sie kann deshalb nicht die elektrische Strömung im Wasser darstellen. Diese Forderung ist hier anscheinend außer Acht gelassen.

Ferner tritt im Wert der Selbstinduktion bei Thomson die Größe γ im Zähler auf, bei uns im Nenner. Dies rührt daher, daß Thomson eine Definition der Besselschen Funktionen $K_0(x)$ aus dem Handbuch von Heine[2]) entnommen

[1]) Recent researches in electricity and magnetism, Oxford 1893. S. 292–294.

[2]) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Berlin, 1878. S. 245, Gleichung (44 f.).

hat, in der die Gaußsche Konstante $\mathfrak{C} = \ln \gamma$ ein falsches Vorzeichen hat[1]). Außerdem verwendet Thomson eine Definition, die nur für reelles Argument brauchbar ist.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Versehen bei Thomson auf den wesentlichen Inhalt seiner Theorie völlig ohne Einfluß sind.

Unsere Rechnung, bei der die Anteile von Draht, Isolator und Wasser gesondert zur Geltung kommen, zeigt, daß die anschließende Überlegung von Thomson (S. 294) nicht genau zutrifft. Das Material des Drahtes hat keinen Einfluß auf den Widerstand nicht etwa aus dem Grunde, weil nur die Oberfläche des Drahtes von der Strömung in Anspruch genommen ist, sondern weil sein Anteil am gesamten Widerstand unerheblich ist; diese Begründung gilt also, selbst wenn die Strömung gleichförmig über den Drahtquerschnitt verteilt ist.

Die Frage liegt nahe: Hat die Stromverteilung über den großen Wasserquerschnitt auch auf die Kapazität des Kabels Einfluß. Um dies zu entscheiden, betrachten wir analog den bisherigen Überlegungen den zeitlichen Mittelwert der elektrischen Energie des Kabels $\frac{1}{2}\int \mathfrak{E}\mathfrak{D}\,d\tau$. Den äußerst geringen Energieanteil des Drahtes vernachlässigen wir. Der Energieanteil des Isolators hat wie beim gewöhnlichen Kabel den Wert $\frac{1}{2} K V^2$, worin K annähernd mit der elektrostatischen Kapazität identisch ist. Der Anteil des Wassers ist $\frac{\varepsilon}{4 c^2}\int_c^\infty \mathfrak{E}_{\text{eff}}^2\, r\,dr = \frac{\varepsilon \varrho_w^2}{4 c^2}\int_c^\infty i_{\text{eff}}^2\, r\,dr$, wenn $\mathfrak{E}_{\text{eff}} = i_{\text{eff}} \cdot \varrho_w$ gesetzt wird. Ganz dasselbe Integral trat schon bei Berechnung des Ohmschen Widerstands R_w (Gleichung 13) auf. Deshalb ist, wenn wieder C den effektiven Gesamtstrom bedeutet $\frac{\varepsilon}{4 c^2}\int_c^\infty \mathfrak{E}^2\, r\,dr = \frac{\varepsilon \varrho R_w}{8 \pi c^2} \cdot C^2$. Zur Abschätzung der Größenordnung setzen wir für Strom und Spannung zusammengehörige Werte ein, die sich bei einer Messung am Kabelanfang ergeben haben; und zwar Werte, für die der Energieanteil des Wassers verhältnismäßig groß wird. $V = 126$ Volt; $C = 1$ Amp.; $\nu = 800 \frac{\text{Per}}{\text{sec}}$. Wir berechnen die Energie pro cm Kabellänge:

Gesamte magnetische Energie pro cm $= \frac{1}{2} L C^2 = 0{,}095 \frac{\text{cm gr}}{\text{sec}^2}$,

Elektrische Energie des Isolators pro cm $= \frac{1}{2} K V^2 = 0{,}07 \frac{\text{cm gr}}{\text{sec}^2}$,

Elektrische Energie des Wassers pro cm $= \frac{\varepsilon \varrho R_w}{4 \pi c^2} C^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm gr}}{\text{sec}^2}$.

Diese Übersicht zeigt, daß der Energieanteil des Wassers völlig neben dem Anteil $\frac{1}{2} K V^2$ des Isolators zu vernachlässigen ist. Deshalb kann für die Kapazität des Seekabels ohne merklichen Fehler der elektrostatische Wert der Kapazität eingesetzt werden. Ob sich dieser Wert durch besondere Eigenschaften des Dielektrikums mit der Frequenz ändern kann, gehört nicht hierher.

II. Das unbewehrte Kabel in begrenzter Wassermasse.

Die nächste Annahme ist: das Wasser sei außen begrenzt durch eine Kreiszylinderfläche vom Radius d. Hierdurch soll wenigstens qualitativ der Einfluß des Meeresspiegels ermittelt werden. Die oben S. 291 für die effektive magnetische

[1]) Auf diesen Vorzeichenfehler bei Heine weist in anderem Zusammenhang Sommerfeld (Ann. d. Ph. 15, S. 677, Anm. 1904) hin.



Feldstärke G (r) und die effektive Stromdichte K (r) abgeleiteten Differentialgleichungen (3) und (4) gelten auch hier. Jetzt versagt aber der Beweis, daß für die Strömung im Wasser Besselsche Funktionen erster Art nicht auftreten können. Denn der Einwand, daß diese Funktionen unendlich werden für $r = \infty$, kommt beim begrenzten Kabel nicht in Betracht. Für das Integral muß deshalb der vollständige Ansatz gemacht werden:

$$G(r) = A \cdot J_1(kr) + B \cdot H_1(kr). \tag{19}$$

Für die Konstanten A und B ergeben die Grenzbedingungen zwei Gleichungen; für $r = c$ muß $\mathfrak{H}_{eff} = \frac{2C}{c}$ sein, für $r = d$ dagegen $\mathfrak{H}_{eff} = 0$. Hieraus erhalten wir

$$A = \frac{2C}{c} \cdot \frac{H_1(kd)}{J_1(kc) \cdot H_1(kd) - J_1(kd) \cdot H_1(kc)}$$

$$B = -\frac{2C}{c} \cdot \frac{J_1(kd)}{J_1(kc) \cdot H_1(kd) - J_1(kd) \cdot H_1(kc)}.$$

Der für A und B gemeinsame Nenner vereinfacht sich mit Rücksicht darauf, daß für sehr kleine Werte des Arguments, also für $k \cdot c$, die Funktion J_1 nahezu verschwindet, dagegen die Funktion H_1 außerordentlich groß wird. Dagegen sind die Werte beider Funktionen J_1 und H_1 für größere Werte des Arguments, also für $k \cdot d$ endlich. Deshalb kann der erste Summand des Nenners ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden. Für den ungünstigen Fall, daß auch $k \cdot d$ sehr klein ist, daß also die äußere Begrenzung der Wassermasse sehr eng ist, können wir für alle im Nenner vorkommenden Besselschen Funktionen die Annäherungen (9) und (11) und die entsprechenden Annäherungen für die Funktionen J_0 und J_1 einführen, nämlich:

$$J_0 = 1; \quad J_1 = \frac{|k| r}{2\sqrt{2}}(1 - i). \tag{20}$$

Dadurch ergibt sich für den Nenner $-i\left(\frac{c}{d} - \frac{d}{c}\right)$; wenn also im ungünstigsten Fall der äußere Radius d des Wassers auch nur 10 mal so groß wäre wie der Kabelradius c, so wäre immer noch das erste Glied des Nenners gegen das zweite zu vernachlässigen, Es ist also:

$$A = -\frac{2C}{c} \cdot \frac{H_1(kd)}{J_1(kd) \cdot H_1(kc)}$$

$$B = \frac{2C}{c} \cdot \frac{J_1(kd)}{J_1(kd) \cdot H_1(kc)}. \tag{21}$$

Damit sind A und B bestimmt durch die Konstanten des Kabels, die Gesamtstromstärke und die Frequenz. Aus Gleichung (19) folgt mit Hilfe der ersten Maxwellschen Gleichung (1) folgende Gleichung für die effektive Stromdichte:

$$K(r) = \frac{Ak}{4\pi} J_0(kr) + \frac{Bk}{4\pi} H_0(kr). \tag{22}$$

Die physikalische Bedeutung der beiden einzelnen Summanden dieser Gleichung ergibt ein Vergleich mit den früheren Ergebnissen. Der zweite Summand

$$\frac{B \cdot k}{4\pi} H_0(kr) = \frac{k \cdot C}{2\pi c \cdot H_1(kc)} \cdot H_0(kr)$$

ist nach Aussage der Gleichung (7) die effektive Stromdichte K (r), die sich beim Fehlen einer äußeren Begrenzung der Wassermasse einstellt. Die Bedeutung des ersten Summanden tritt hervor, wenn wir die Gleichung (21) für A durch die Annahme vereinfachen, daß $k \cdot c$ und $k \cdot d$ beide kleine Werte haben. Dann kann der erste Summand auf die Form gebracht werden:

$$\frac{Ak}{4\pi} \cdot J_0(kr) = \frac{k \cdot C}{2\pi b \cdot J_1(kc)} \cdot J_0(kr).$$

Das ist[1]) die effektive Stromdichte, die sich einstellt, wenn unter sonst gleichen Verhältnissen die Wassermasse vom Wechselstrom durchflossen wird, ohne daß jedoch im Kern der Wassermasse ein stromführendes Kabel vorhanden ist. In Wirklichkeit wird diese letzte Annäherung allerdings meist nicht zulässig sein. Dann unterscheidet sich jedoch der betrachtete erste Summand nur um einen konstanten Faktor von der in der Wassermasse ohne Kabel auftretenden Strömung.

Das Ergebnis ist also, daß der erste Summand von Gleichung (22) die wechselseitige Abstoßung der im Wasser verlaufenden Stromlinien darstellt; dem entspricht, daß $J_0(kr)$ am äußeren Rande des Wassers seinen größten Wert hat. Andererseits stellt der zweite Summand die Anziehung dar, die der im Kabel fließende Strom auf die im umgebenden Wasser verlaufenden Stromlinien ausübt; entsprechend hat $H_0(kr)$ seinen größten Wert am inneren Rande des Wassers dicht am Kabel.

Zur Untersuchung der Stromdichte werde die Formel (22) zunächst dadurch vereinfacht, daß an Stelle der Besselschen Funktionen überall die Annäherungen (9), (11) und (20) eingeführt werden. Dies ist zulässig etwa bis zur Grenze $|k| \cdot d \leq 0{,}4$; das heißt für $\nu = 50$ muß der Radius der Wassermasse $d \leq 20$ m sein, für höhere Frequenzen noch kleiner. Dann gilt für die Stromdichte die Gleichung

$$K(r) = -C \cdot \left[\frac{1}{\pi d^2} + i \frac{4\pi\nu}{\varrho_w} \cdot \ln\left(\frac{2}{\gamma |k| \cdot r}\right) \right]. \tag{23}$$

Die Strömung kann also zerlegt werden in einen mit der Gesamtstromstärke $(-C)$ in Phase fließenden Hauptstrom von der Dichte $-\frac{C}{\pi d^2}$ und einen schwächeren, um 90^0 vor $-C$ voreilenden Zusatzstrom, den der im Draht selbst fließende Strom $+C$ in seiner Umgebung induziert. (Die genauere Rechnung ergibt für den Hauptstrom $-\frac{C}{\pi d^2}$ eine schwache Nacheilung gegen die Gesamtstromstärke $-C$, so daß die Summe aller Einzelströme, wie erforderlich, die Phase von $-C$ annimmt.) Der Zusatzstrom ist in der Nähe der Drahtachse am stärksten. Der Effektivwert der Stromdichte ist annähernd gleichmäßig über den ganzen Querschnitt $\frac{C}{\pi d^2}$.

Der vom Draht her induzierte Zusatzstrom verursacht eine Phasenvoreilung δ der Stromdichte vor dem Gesamtstrom $-C$ vom Betrage

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi^2 \nu d^2}{\varrho_w} \cdot \ln\left(\frac{2}{\gamma |k| \cdot r}\right). \tag{24}$$

Am Innenrand des Wassers ergibt sich der größte Wert von δ. Er ist z. B. für $d = 20$ m und $\nu = 50$ $\delta = 36^0$.

Durch die Einführung einer so engen Begrenzung des Wassers verschwindet bei langsamer Frequenz die Eigentümlichkeit des unbegrenzten Kabels, nämlich die starke Ungleichförmigkeit von Phase und Stromdichte, zum großen Teil. Damit verschwindet auch der Einfluß der Frequenz auf Widerstand und Selbstinduktion.

Es ist jedoch erforderlich, die Strömung nach Gleichung (22) zu untersuchen, auch ohne für die Besselschen Funktionen die einfachen Annäherungen einzuführen, die bei den tatsächlichen Größenverhältnissen der Versuche meist nicht gut anwendbar sind. Zu diesem Zweck soll jetzt ein Zahlenbeispiel untersucht werden. Für die Zylinderfläche, durch die wir uns die Wassermasse nach außen abgegrenzt denken, werde ein Radius von 40 m angenommen; das entspricht einem Mittelwert der bei den Versuchen vorkommenden Meerestiefen. Die Rechnung wurde für die äußersten der benutzten Frequenzen $\nu = 50$ und $\nu = 800$ durchgeführt. Zunächst sind A und B nach Gleichung (21) und hiernach die Stromdichte K(r) nach (22)

[1]) S. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 143, Gleichung (8).

auszurechnen. Die effektive Stromdichte bezogen auf die Gesamtstromstärke 1, also $\frac{i_{eff}}{C} = \frac{|K|}{C}$, ist als Funktion des Abstandes r vom Draht auf Bild 6 aufgetragen. (Für den kleinsten Radius $r = 0{,}69$ cm hat die Stromdichte für $\nu = 800$ auf dem Bild nicht annähernd Platz gefunden; der Wert ist $\frac{i_{eff}}{C} = 770 \cdot 10^{-9} \frac{1}{cm^2}$). Die dazu gehörigen Werte der Phase δ sind als Funktion des Abstandes r in Vektorform auf Bild 7 aufgetragen. Diese beiden Bilder lehren, daß auch bei äußerer Abgrenzung der Wassermasse dicht am Draht eine fast um 90^0 vor $-C$ voreilende, kräftige Strömung fließt, deren Ursache die Induktion vom Draht her ist. Bei niederer Frequenz stellt sich schon in geringer Entfernung vom Draht eine fast genau konstante Stromdichte von $19{,}95 \cdot 10^{-9} \frac{1}{cm^2}$ ein. Das ist nur um $\frac{1}{2}$ Prozent mehr als der für Gleichstrom, also für gleichförmige Stromverteilung gültige Wert

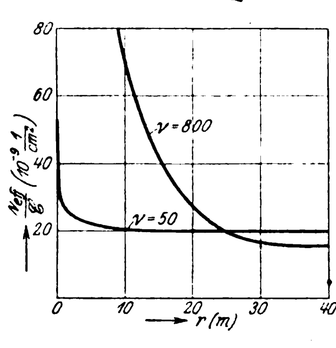


Bild 6.

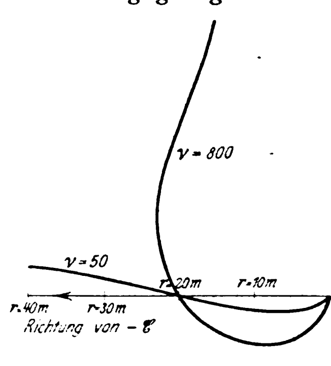


Bild 7.

$$\left(\frac{i}{C}\right)_{gl} = \frac{1}{\pi d^2} = 19{,}85 \cdot 10^{-9} \frac{1}{cm^2}$$

(nahe der Fehlergrenze des Rechenschiebers). Bei Erhöhung der Frequenz wächst die Stromdichte nahe am Draht sehr beträchtlich an, in größerer Entfernung vom Draht nimmt sie etwas ab. Die Phase entfernt sich dicht am Draht erheblich (für $\nu = 50$ um 68^0, für $\nu = 800$ sogar um $84{,}5^0$) von der Phase der Gesamtstromstärke $-C$ (Bild 7). Auffallend sind die Wendepunkte in den Vektorkurven des Bildes 7[1].

Für hohe Frequenz $\nu = 800$ sind alle Abweichungen der Phase erheblicher. Die Querwellenlänge (s. oben S. 294) kann sich nicht frei ausbilden, da mitten im Wasser die Phase $\delta = 0$ vorkommen muß. Erst bei sehr viel höheren Frequenzen oder größeren Radien der äußeren Begrenzung können mehrere Querwellenlängen sich ungestört ausbilden.

Für den Widerstand pro Längeneinheit des konzentrischen Kabels mit begrenztem Außenleiter sind allgemein gültige, außerordentlich verwickelte Ausdrücke von Russell[2]) ausgerechnet. Wir gelangen für unser Zahlenbeispiel sehr viel leichter zum Resultat, wenn wir wieder den Widerstand mit Hilfe der pro Sekunde entwickelten Jouleschen Wärme definieren:

1) Zur Erklärung der Wendepunkte dient folgende Überlegung: Im Wasser ist am äußeren Rande $\mathfrak{H} = 0$, also auch $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$; folglich nach der 2. Maxwellschen Gleichung (2) $\frac{\partial i}{\partial r} = 0$; d. h., daß am Außenrande des Wassers die Stromdichte i nach Amplitude und Phase längs r konstant wird. Daraus folgt für den Rand, daß die Amplitudenkurven (Bild 6) horizontal werden, daß ferner die Phasenkurven (Bild 7) in radiale Richtung einbiegen.

2) Phil. Mag. (6) 17. S. 543. 1919.

$$R_w = \frac{\varrho_w}{C^2} \int_c^d i^2_{eff} \cdot 2\pi r\, d r$$

Aus der Kurve $\frac{i_{eff}}{C}$ wird die Kurve $\left(\frac{i_{eff}}{C}\right)^2 \cdot r$ als Funktion von r ausgerechnet und zwischen den Grenzen c und d planimetriert. So entstehen die Werte, die in der 2. Spalte der folgenden Tabelle eingetragen sind.

ν	$R_w(d = 40\ m)$	$R_w(d = \infty)$
0	0,199	0
50	0,205	0,050
800	0,82	0,79

Die Tabelle (2. Spalte) lehrt, daß für geringe Frequenz $\nu = 50$ der Widerstand R_w nur wenig größer ist als bei Gleichstrom (erste Zeile $\nu = 0$), da Stromdichte und Phase nach Bild 6 und 7 nur wenig durch die Frequenz beeinflußt sind. Dieser Einfluß wird bei hoher Frequenz $\nu = 800$ sehr viel stärker; deshalb wird R_w hier erheblich größer. Ein Vergleich des Kabels bei begrenzter und bei unbegrenzter Wassermasse (2. und 3. Spalte) zeigt, daß durch die Begrenzung zwar bei $\nu = 50$ eine starke Erhöhung des Widerstandes eintritt, daß jedoch diese Wirkung der Begrenzung bei $\nu = 800$ ganz gering geworden ist. Die Ursache hiervon ist, daß, wie oben bewiesen, bei hoher Frequenz die Strömung sich in der Hauptsache dicht um das Kabel zusammenzieht, so daß ein Abschneiden des Außenraums verhältnismäßig viel weniger ausmacht als bei geringer Frequenz.

Die umständliche Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten ist für das begrenzte Kabel fortgelassen, da ja auch für das unbegrenzte Kabel der Einfluß der Frequenz auf L nur sehr gering ist (s. Kurve I, Bild 5) und hier jedenfalls noch geringer wird.

Für das Seekabel ist der Außenleiter nach oben durch den Meeresspiegel begrenzt, gewiß auch nach unten durch das Aufhören der feuchten Erdschichten, nach der Seite dagegen ist er unbegrenzt. Welchen Einfluß wird diese Begrenzung ausüben? Wir werden nicht erwarten dürfen, Einzelheiten der hier ausgerechneten Stromverteilung genau so unter dem Meeresspiegel wieder zu finden, da in der Rechnung die Rotationssymmetrie eine große Rolle spielt. Deshalb müssen wir uns wohl auf folgenden Schluß beschränken: Für große Radien und hohe Frequenzen, für die der Einfluß der zylinderförmigen Begrenzung auf R_w zu vernachlässigen ist, wird erst recht der Einfluß des Meeresspiegels verschwinden, und das auch schon bei wesentlich geringeren Werten von Meerestiefe und Frequenz. Also im Versuch wird schon bei einer Meerestiefe von 40 m jedenfalls für $\nu = 800$, wohl auch für kleineres ν, derselbe Widerstandswert erreicht wie im tiefen Ozean. Bei geringerer Leitfähigkeit des Seewassers, z. B. in der Ostsee, verschiebt sich dieser Grenzwert zu etwas höheren Werten von Meerestiefe und Frequenz. Das Ergebnis der letzten Überlegungen besteht also vor allem darin, daß wir eine Abschätzung dafür gewinnen, welche Meerestiefe wir bei unseren Versuchen an der Küste aufsuchen müssen, um aus den Versuchen Schlüsse zu ziehen auf das Verhalten des Kabels im tiefen Ozean. Insbesondere erfahren wir aus dieser Rechnung, daß es aussichtslos ist, durch einen Laboratoriumsversuch ohne völlige Umrechnung der Größenverhältnisse ein Bild von der Stromverteilung im Seewasser zu gewinnen, weil die weite Ausbreitung der Strömung eine wesentliche Rolle spielt.



Abgesehen hiervon liefert die Rechnung einen Beitrag zur Kenntnis des konzentrischen Kabels, da die allgemeinen Formeln (19) bis (24) auch für jeden anderen Außenleiter als Seewasser gelten.

H. Lichte[1]) hat das magnetische Feld über dem Meeresspiegel gemessen, unter dem in geringer Tiefe ein vom Wechselstrom durchflossenes Kabel lag. Er fand für die Frequenzen 500 und 1000 ein quer zum Kabel periodisches Verhalten des Feldes. Diese Periode mag wohl mit unserer Querwellenlänge in Beziehung stehen. Sollte später die von Lichte erwähnte Verwendung des Kabels, um in enger Hafeneinfahrt die Schiffahrtslinie kenntlich zu machen, praktische Bedeutung gewinnen, und sollte deshalb eine eingehendere, theoretische Untersuchung wünschenswert erscheinen, so wäre wohl auf den Außenleiter, das Wasser, die Methode zu übertragen, mit der Lampa[2]) die Stromverteilung in einem Draht von elliptischem Querschnitt untersucht hat. Die kleine Halbachse wäre gleich der Meerestiefe zu wählen, für die große Halbachse muß der Grenzfall unendlicher Länge untersucht werden. Jedoch soll darauf jetzt nicht näher eingegangen werden.

III. Das eisenbewehrte Kabel.

1. Vorbereitende Überlegungen.

Die Versuche hatten zu dem Ergebnis geführt, daß der Einfluß der Frequenz auf Widerstand und Selbstinduktion des Kabels wesentlich stärker ist, als es die im vorstehenden dargestellte Theorie des unbewehrten Kabels erwarten läßt. Diese Erfahrung legt die Vermutung nahe, daß die Eisenbewehrung den Einfluß der Frequenz wesentlich erhöht. Deshalb sollen im folgenden die Stromverteilung und die daraus sich ergebenden Werte von Widerstand und Selbstinduktion für das eisenbewehrte Kabel untersucht werden. Das umgebende Seewasser wird wieder als unbegrenzt angenommen. Auch ohne diesen technischen Gesichtspunkt hat es an und für sich Interesse, das für diese Anordnung gültige Integral der Maxwellschen Gleichungen aufzusuchen.

Das Eisen ist vom Drahtkern durch eine Schicht Guttapercha zuverlässig isoliert. Dagegen liegt zwischen Eisen und Seewasser nur eine dünne Jutehülle, die das Eisen vor dem Verrosten schützen soll. Sie wird nicht hindern können, daß an zahlreichen Punkten leitende Verbindung zwischen Eisen und Seewasser zustande kommt. Es hat auf die Stromverteilung keinen Einfluß, wenn diese Verbindung nicht über die ganze Oberfläche des Eisens besteht. Denn wenn nur an einigen Stellen Eisen und Seewasser dauernd auf gleichem Potential gehalten werden, so trennt auf den übrigen Teilen der Oberfläche die Jutehülle nur Punkte gleichen Potentials von einander. Deshalb ist die Annahme zulässig, daß Eisen und Wasser durchweg leitend miteinander verbunden sind[3]). Nunmehr verteilt sich die gesamte effektive Stromstärke C auf Eisen und Seewasser. Da zum Wasser ein metallischer Leiter parallel geschaltet liegt, ist auf den ersten Blick zu vermuten, daß der gesamte Widerstand des Außenleiters hierdurch stark verkleinert wird. Ob jedoch diese Wirkung durch den Energieverbrauch der im Eisen induzierten Ströme aufgehoben wird, muß sich im folgenden herausstellen.

Zur Vereinfachung denken wir uns die einzelnen Eisendrähte ersetzt durch einen homogenen, eisernen Hohlzylinder. Diese Annahme ist erforderlich, weil die vereinfachten Maxwellschen Gleichungen (1) und (2) nur für volle Rotationssymmetrie gelten. Ein solcher Zylinder wird sich allerdings in einer Hinsicht gänzlich

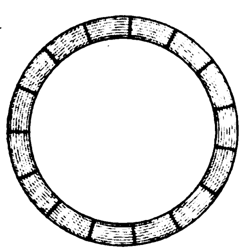
---

[1]) E.T.Z. **41**, S. 88–90. 1920

[2]) Wien. Ber. (IIa) **123**, S. 2313–2320. 1914.

[3]) Deshalb kann an den Kabelenden an Stelle der Erdleitung eine Verbindung mit der Eisenbewehrung hergestellt werden. Roscher, ETZ. 1912. S. 743.

anders verhalten als die Reihe nebeneinander liegender Drähte. Die magnetischen Kraftlinien umschließen das Kabel in der Form konzentrischer Kreise. Der magnetische Widerstand wird für die im Eisen verlaufenden Induktionslinien ein gänzlich anderer sein einerseits in dem von uns angenommenen, homogenen Eisenzylinder, andererseits in dem tatsächlichen Kabel, in dem die Induktionslinien jedesmal zwischen zwei Eisendrähten den hohen magnetischen Widerstand eines Luftspalts überwinden müssen[1]. Um unser Kabelmodell der Wirklichkeit anzupassen, legen wir seinem homogenen Eisenzylinder eine so geringe „wirksame Permeabilität" bei, daß die magnetischen Induktionslinien dieselbe Stärke annehmen, daß sie also auf ihrem kreisförmigen Wege denselben magnetischen Gesamtwiderstand antreffen wie im tatsächlichen Kabel. Wir führen die Rechnung aus für eine Eisenbewehrung aus Flacheisendrähten von einer in der Technik üblichen Form[2]. Die einzelnen Drähte seien 0,48 cm breit, zwischen ihnen mögen Luftspalte von 0,02 cm liegen (s. Bild 8); die geringe Streuung der Kraftlinien an den Rändern der Luftspalte sei vernachlässigt; die tatsächliche Permeabilität des Eisens sei 600. Eine einfache Rechnung ergibt die wirksame Permeabilität zu $\mu = 24$. Dieser Wert hängt fast nur von Breite und Zahl der Luftspalte ab, wird also für runde Eisendrähte erheblich kleiner werden.


Bild 8.

Können wir mit der hier definierten wirksamen Permeabilität auch die magnetische Energie des Eisens ermitteln, die wir später zur Berechnung der Selbstinduktion brauchen? Zur Entscheidung dieser Frage vergleichen wir für irgend eine Induktion $\mathfrak{B}$ die Werte der magnetischen Energie einerseits für das Eisen mit Luftspalten und $\mu = 600$, andererseits für homogenes Eisen mit $\mu = 24$. Das Ergebnis der einfachen Rechnung, die hier übergangen werden kann, ist, daß sich in der Tat in beiden Fällen derselbe Energiebetrag ergibt.

Worin weicht dies Kabelmodell jetzt noch von der Wirklichkeit ab? Die Annahme konstanter Permeabilität ist zulässig, da Sättigung des Eisens nicht in Frage kommt. Denn z. B. bei einer Stromstärke im Draht von 5 Ampère erreicht im Eisen unseres Kabels die magnetische Feldstärke nur den maximalen Wert von ca. $\mathfrak{H} = 2$ Gauß. Wesentlicher ist wohl eine andere Vernachlässigung. In jedem einzelnen Eisendraht der Bewehrung fließt ein Wechselstrom; also innerhalb des einzelnen Eisendrahtes drängt sich die Strömung an die Oberfläche. Und diese Stromverdrängung im Einzeldraht, die wir wohl unterscheiden müssen von der bisher besprochenen Stromverdrängung in der Gesamtheit der Drähte, wird einen erheblichen Wert annehmen; denn innerhalb des einzelnen Eisendrahtes, aber auch nur für dieses Kraftfeld, macht sich die hohe Permeabilität ungestört geltend. Zwar wird dieser Effekt etwas gemildert durch die Induktion von den unmittelbar benachbarten Eisendrähten her; jedoch wirkt diese letztere Induktion über einen Luftspalt hinweg, also viel geringer. Deshalb ist z. B. bei einer Reihe benachbarter Kupferdrähte die Annäherung durch eine homogene, stromführende Schicht[3] ohne weiteres zulässig, weil dabei nicht das Kraftfeld innerhalb des einzelnen Drahtes durch eine besonders hohe Permeabilität ausgezeichnet ist. Diese Stromverdrängung im Einzeldraht wird auch auf die Strömung im umgebenden Wasser von Einfluß sein, da die elektrische Kraft $\mathfrak{E} = \mathfrak{i} \cdot \varrho$, die in unserem Fall parallel zur Achse, also

[1]) Beim Krarup-Kabel wird dementsprechend der Drahtkern mit Eisendraht umwickelt, gerade zu dem Zweck, um für die kreisförmigen Induktionslinien einen möglichst geringen magnetischen Widerstand herzustellen (Krarup, ETZ. 1902 S. 344).

[2]) Vgl. H. Thurn: Die Seekabel, Leipzig 1909, S. 62—65, Abb. 44—47.

[3]) Vgl. z. B. Sommerfeld, Ann. d. Ph. 15, S. 674, 1904. Sommerfeld untersucht die Stromverdrängung in einem Metallzylinder, in dem die Stromlinien Kreise bilden, die magnetischen Kraftlinien dagegen parallel zur Achse verlaufen, gerade umgekehrt wie in unserem Problem.

tangential zu den Oberflächen verläuft, stetig durch die Grenze geht. Da wir im folgenden einen homogenen Eisenzylinder betrachten, berücksichtigen wir lediglich die Stromverdrängung in der Gesamtheit der Drähte vernachlässigen dagegen die Stromverdrängung innerhalb des einzelnen Eisendrahts. Wie weit diese Vernachlässigung auf die Werte von Widerstand und Selbstinduktion einwirkt, läßt sich schwer übersehen. Es scheint kaum möglich zu sein, diesen Vorgang in einfacher Weise vollständig mit in Rechnung zu ziehen.

2. Das Integral der Maxwellschen Gleichungen.

Der eiserne Hohlzylinder habe den äußeren Radius a, den inneren c. Im folgenden möge der Index e das Eisen kennzeichnen, der Index w das Wasser. Im übrigen bleiben die alten Bezeichnungen (siehe S. 290f.) bestehen. Innerhalb des Eisens und ebenso innerhalb des Wassers gelten unverändert die Differentialgleichungen (3) und (4) für das Magnetfeld G(r) bzw. die Stromdichte K(r); hierbei hat jedoch die Größe k im Eisen einen ganz anderen Wert als im Wasser.

Jede dieser Differentialgleichungen 2. Ordnung hat die Summe von zwei Besselschen Funktionen zum allgemeinen Integral (siehe Jahnke-Emde, S. 166). Für die magnetische Kraft im Eisen $G_e(r)$ machen wir also (entsprechend der Gleichung (19)) den Ansatz

$$G_e(r) = P \cdot J_1(k_e r) + Q \cdot H_1^{(2)}(k_e r). \qquad (25)$$

Hieraus folgt mit Hilfe der ersten Maxwellschen Gleichung für die Stromdichte im Eisen $K_e(r)$ (entsprechend der Gleichung (22)) der Ausdruck

$$K_e(r) = \frac{P k_e}{4\pi} \cdot J_0(k_e r) + \frac{Q k_e}{4\pi} \cdot H_0^{(2)}(k_e r). \qquad (26)$$

In den entsprechenden Ansätzen für das Wasser können die Besselschen Funktionen J_0 und J_1 nicht auftreten, da sie mit wachsendem Radius unbegrenzt wachsen, während $G_w(r)$ und $K_w(r)$ verschwinden müssen. Diese Ansätze nehmen also die Form an:

$$G_w(r) = S \cdot H_1^{(2)}(k_w r). \qquad (27)$$

$$K_w(r) = \frac{S \cdot k_w}{4\pi} \cdot H_0^{(2)}(k_w r). \qquad (28)$$

Die drei bisher unbekannten Integrationskonstanten P, Q und S sind durch die Grenzbedingungen zu bestimmen. Diese nehmen für unseren Apparat die einfache Gestalt an, daß die elektrische Kraft $\mathfrak{E} = K \cdot \varrho$ und die magnetische Kraft G an der Grenze stetig sind, da beide durchweg tangential verlaufen. Das Magnetfeld am Innenrand des Eisens wird bestimmt nur von der Stromstärke C im Draht; es hat den Wert:

$$G_e(c) = P \cdot J_1(k_e c) + Q \cdot H_1^{(2)}(k_e c) = \frac{2C}{c}. \qquad (29)$$

Das Magnetfeld am Außenrand des Eisens liefert die Grenzbedingung

$$P \cdot J_1(k_e a) + Q \cdot H_1^{(2)}(k_e a) = S \cdot H_1^{(2)}(k_w a). \qquad (30)$$

Die letzte Grenzbedingung erhalten wir durch das elektrische Feld am Außenrand des Eisens:

$$\frac{P k_e \varrho_e}{4\pi} \cdot J_0(k_e a) + \frac{Q k_e \varrho_e}{4\pi} \cdot H_0^{(2)}(k_e a) = \frac{S k_w \varrho_w}{4\pi} \cdot H_0^{(2)}(k_w a). \qquad (31)$$

Damit sind für die Berechnung der drei Unbekannten P, Q und S drei lineare Gleichungen aufgestellt. Es lohnt nicht, die Lösungen hier explicite hinzuschreiben. Denn die folgenden Gleichungen werden so kompliziert, daß wir aus ihnen doch nicht unmittelbar ein Bild davon gewinnen können, wie Magnetfeld und Stromdichte von den Kabelkonstanten und der Frequenz des Wechselstroms abhängen. Wir müssen uns deshalb damit begnügen, an einem Zahlenbeispiel uns den Verlauf von

Magnetfeld und Stromdichte klar zu machen und für diesen einzelnen Fall Widerstand und Selbstinduktion zu berechnen. Hier sei nur der Verlauf dieser Rechnung geschildert. Ihre zahlenmäßige Durchführung ist sehr umständlich, da die Koefficienten in den Formeln (25)—(31) durchweg komplexe Zahlen sind.

Wir betrachten ein bestimmtes Kabel bei einer bestimmten Frequenz ν; dadurch sind k_e, k_w, a und c vollständig festgelegt und damit auch die Zahlenwerte aller Besselschen Funktionen, die in den drei Grenzbedingungen (29)—(31) vorkommen. Aus ihnen berechnen wir die Werte von P, Q und S und dann aus den Gleichungen (25)—(28) das Magnetfeld G und die Stromdichte K als Funktion des Radius für Eisen und für Wasser. Gewählt wurde der äußere Radius a des Eisens zu 1,036 cm, also die Eisendicke zu 0,346 cm und die Frequenz $\nu = 212$ Perioden pro sec. (Diese besonderen Werte von a und ν haben den Vorzug, daß sie runde Werte für die Argumente der Besselschen Funktionen herbeiführen und damit die Benutzung der Funktionentafeln erleichtern.) Die Stromverteilung zeigt Bild 9. Aufgetragen ist darin der mit der Stromdichte $i_{eff} = K(r)$ proportionale Wert der effektiven elektrischen Kraft $\mathfrak{E} = i \cdot \varrho$; dadurch erreichen wir, daß wir die für Eisen und Wasser gültigen Werte mit einem gemeinsamen Maßstab messen können. Wir sehen, daß die Stromdichte an der Innenwand dieses Eisenmantels weitaus den größten Wert hat. Die Phasen der Stromdichte an Innenwand und Außenwand des Eisens unterscheiden sich um 88°.

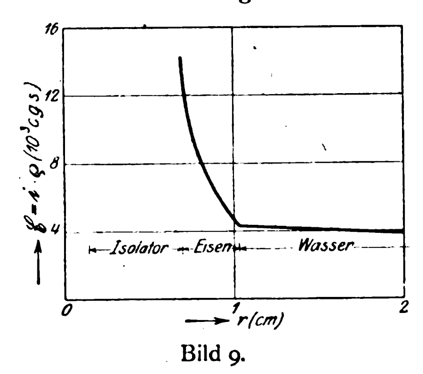


Bild 9.

Inwiefern wird die Strömung im Wasser, die wir oben für das unbewehrte Kabel kennen gelernt haben, durch die Eisenbewehrung verändert? Ihr Effektivwert nimmt zwar mit wachsendem Abstand vom Kabel im selben Verhältnis ab; überall jedoch ist diese Strömung nur der 5. Teil von der Strömung, die beim unbewehrten Kabel bei gleicher Frequenz fließt. Der Wert der Querwellenlänge im Wasser (siehe S. 294) bleibt derselbe.

Schließlich sind für das Zahlenbeispiel die Werte von Widerstand und Selbstinduktion zu berechnen. Den Widerstand definieren wir wieder mit Hilfe der Jouleschen Wärme durch Gleichung (13). Aus der Kurve der Stromdichte (Bild 9) leiten wir die Kurve $\left(\frac{i_{eff}}{C}\right)^2 \cdot r$ als Funktion des Radius ab und ermitteln das Integral, d. i. die von dieser Kurve begrenzte Fläche, mit dem Planimeter. Da die Kurve sich ins Unendliche erstreckt, müssen wir für große Werte des Radius die Besselschen Funktionen durch Exponentialfunktionen ersetzen (siehe Jahnke-Emde, S. 101 f.) und so diesen Anteil des Integrals, der übrigens keine merkliche Rolle spielt, berechnen. Ganz entsprechend verläuft die zahlenmäßige Berechnung der Selbstinduktion, die wir mit Hilfe der magnetischen Energie durch Gleichung (15) definieren. Das Ergebnis ist

$$\underline{R = 3{,}74 \text{ Ohm pro km};}$$
$$\underline{L = 12{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ Henry pro km}}$$

(siehe die Punkte IV der Bilder 4 und 5). Durch Vergleich mit dem unbewehrten Kabel, dessen Widerstand und Selbstinduktion wir den Kurven I der Bilder 4 und 5 entnehmen, erhalten wir für unser Zahlenbeispiel die folgenden, überraschenden Ergebnisse:

Durch das Hinzutreten der Eisenbewehrung wird der Widerstand infolge der induzierten Ströme stark vergrößert; und zwar wächst der Widerstand des Außenleiters für sich genommen fast auf den fünffachen Betrag.

Der Selbstinduktionskoeffizient wird trotz der Anwesenheit von Eisen stark verkleinert, und zwar auf 60% des Wertes, der für das unbewehrte Kabel gilt; dies rührt daher, daß die Strömung sich im wesentlichen in das Eisen hineinzieht, also ihr Magnetfeld keinen so großen Raum mehr in Anspruch nimmt.

Der im II. Teil behandelte Einfluß der Meeresoberfläche auf Widerstand und Selbstinduktion wird beim eisenbewehrten Kabel viel geringer sein als beim unbewehrten, weil das Wasser beim eisenbewehrten Kabel sich viel weniger an der Stromleitung beteiligt, sodaß das Fortschneiden eines Teils der Wassermasse weniger ausmachen wird.

3. Erste Annäherung: Dünne Eisenbewehrung.

Diese strenge Integration der Maxwellschen Gleichungen liefert, wie man sieht, so verwickelte Formeln, daß ihnen eine Übersicht über die Vorgänge kaum zu entnehmen ist, daß vielmehr lediglich die zahlenmäßige Durchführung vereinzelter Beispiele möglich wird. Uns interessiert vor allem die Frage: Ändern sich Widerstand und Selbstinduktion erheblich mit der Frequenz? Denn eine solche Veränderung würde die Verzerrung der durch das Kabel übertragenen Zeichen beeinflussen. Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir uns mit einfacheren Modellen des Kabels begnügen. Wir beschränken die Betrachtung zunächst auf den Fall eines ganz dünnen Eisenmantels, innerhalb dessen wir näherungsweise konstante Stromdichte annehmen. Zwar erinnern wir uns vom gewöhnlichen Skineffekt her, daß im Eisen wegen seiner hohen Permeabilität die Stromverteilung außerordentlich ungleichmäßig ist. Das schadet jedoch für unsere Betrachtung der Eisenbewehrung wenig, weil, wie wir oben (S. 304) sahen, die wirksame Permeabilität der Bewehrung nur einen kleinen Bruchteil des sonst auftretenden Wertes darstellt. Noch besser wird diese Annäherung für den Bleimantel zutreffen, der bei manchen Kabeln zwischen Kupferdraht und Eisenbewehrung liegt. Wir werden wieder zunächst die Stromverteilung untersuchen und sodann R und L berechnen, und zwar diesmal in Abhängigkeit von der Frequenz.

Im Anschluß an die Bezeichnungen von S. 291 schreiben wir für die komplexe Stromdichte im Eisen $\mathfrak{i}_e = \sqrt{2}\, K_e \cdot e^{i\omega t}$, worin K_e = constans, weil wir für diese Annäherung auf die Ungleichförmigkeit der Strömung innerhalb des Eisens verzichten wollen. Daraus folgt leicht die magnetische Kraft im Eisen, wenn man berücksichtigt, welcher Gesamtstrom innerhalb eines jeden Radius fließt:

$$\mathfrak{H}_e = \frac{2\sqrt{2}}{r}\,[C + K_e \pi (r^2 - c^2)] \cdot e^{i\omega t}. \qquad (32)$$

Die entsprechenden Größen für das Wasser bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{i}_w = \sqrt{2}\, K_w(r) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_w = \sqrt{2}\, G_w(r) \cdot e^{i\omega t}.$$

Für das Wasser benutzen wir die Maxwellschen Gleichungen bzw. die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen (3) und (4). Wie früher machen wir den Ansatz:

$$K_w(r) = \frac{D k_w}{4\pi} \cdot H_0(k_w r) \qquad (33)$$

und

$$G_w(r) = D \cdot H_1(k_w r). \qquad (34)$$

Die Besselschen Funktionen J_0 und J_1 sind aus dem Ansatz (33) und (34) fortgelassen, da wieder $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{H}$ für $r = \infty$ verschwinden müssen. Unbekannt sind noch die beiden Konstanten K_e und D. Für diese ergeben sich zwei Gleichungen aus den Grenzbedingungen der Grenze Eisen-Wasser.

Erstens muß $\mathfrak{H}$ in der Grenze stetig sein; also

$$\frac{2}{a}\left[C + K_e \pi (a^2 - c^2)\right] = D \cdot H_1 (k_w a).$$

Zweitens muß $\mathfrak{E} = i \cdot \varrho$ in der Grenze stetig sein, also

$$K_e \cdot \varrho_e = \frac{D\, k_w \varrho_w}{4\pi} \cdot H_0 (k_w a)$$

Elimination der Unbekannten ergibt, wenn der gemeinsame Nenner

$$2\pi a \varrho_e \cdot \frac{H_1 (k_w a)}{k_w} - \pi (a^2 - c^2) \cdot \varrho_w \cdot H_0 (k_w a) = N \tag{35}$$

als Konstante des Apparates und der Frequenz eingeführt wird:

$$\frac{K_e}{C} = \frac{\varrho_w \cdot H_0 (k_w a)}{N} \tag{36}$$

und

$$\frac{D}{C} = \frac{4\pi \varrho_e}{k_w \cdot N}. \tag{37}$$

Hieraus ergibt sich für die Stromdichte im Wasser pro Effektivstrom 1 der Wert

$$\frac{K_w}{C} = \frac{\varrho_e}{N} \cdot H_0 (k_w r). \tag{38}$$

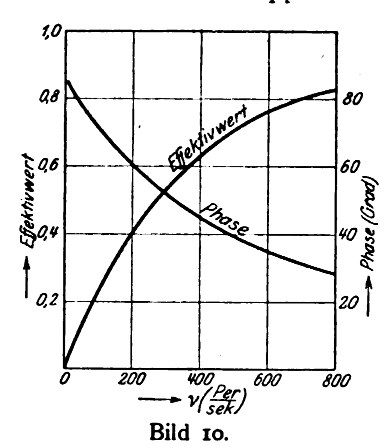


Bild 10.

Diese Ausdrücke gestatten die Untersuchung von Effektivwert und Phase der Stromdichte, Gleichung (36) für das Eisen, Gleichung (38) für das Wasser. Zur Veranschaulichung ist im folgenden ein Zahlenbeispiel ausgeführt. Die Dicke des Eisenmantels ist zu 0,06 cm gewählt. Wieder ist für die wirksame Permeabilität $\mu = 24$ gesetzt (siehe S. 304).

Wie stark ist für verschiedene Frequenzen insgesamt die Stromstärke im Eisen? Ihr Effektivwert $\frac{|K_e|}{C} \pi (a^2 - c^2)$, also ausgedrückt in Bruchteilen der Gesamtstromstärke im Außenleiter C, ist in Bild 10 aufgetragen und daneben ihre Phasenvoreilung gegen den Gesamtstrom im Außenleiter $-\sqrt{2} \cdot C \cdot e^{i \omega t}$. Das Ergebnis ist folgendes: Mit Zunahme der Frequenz steigt der Effektivstrom im Eisen stark an, sein Wert nähert sich dem Betrage C; in der Phase nähert er sich dem Vektor des Gesamtstroms $-\sqrt{2} \cdot C$. Das heißt, daß ein immer größerer Teil des Gesamtstroms seinen Weg durch das Eisen sucht. Auch hierin äußert sich die vorher gefundene Erscheinung, daß mit zunehmender Frequenz die Strömung im Außenleiter an den Drahtkern mehr und mehr herangezogen wird.

Für die Stromdichte im Wasser gelten ähnliche Gesetze wie oben beim unbewehrten Kabel. Wie unterscheidet sich bei gleicher Frequenz das eisenbewehrte Kabel vom unbewehrten? Die Zahlenrechnung ergibt für die Umgebung des eisenbewehrten Kabels durchweg kleinere Stromdichten; bei geringer Frequenz ($\nu = 50$) ist dieser Unterschied nur wenige Promille, bei hoher Frequenz ist die Verkleinerung viel stärker (für $\nu = 800$ etwa auf die halbe Stromdichte).

Für die am Anfang genannten Versuche kam es gerade auf große Stromdichte im Wasser an. Erzielen wir diese für ein gegebenes, eisenbewehrtes Kabel am besten bei hoher oder bei niederer Frequenz? Die Zahlenrechnung zeigt, daß mit Erhöhung der Frequenz zwar in der Nachbarschaft des Kabels die Stromdichte wächst, daß sie dagegen gleichzeitig in größerer Entfernung vom Kabel abnimmt (alles bezogen auf konstant gehaltene Effektivstromstärke C). Dies Verhalten steht in voller Übereinstimmung mit dem eben gefundenen Verhalten der Strömung im Eisen; mit Anwachsen der Frequenz zieht sich die Strömung in das Eisen hinein.

Dadurch wird zwar die Stromdichte im unmittelbar benachbarten Wasser notwendig mit erhöht wegen der Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{E} = \mathfrak{i} \cdot \varrho$ an der Grenze; gleichzeitig aber werden die vom Kabel entfernteren Teile des Wassers entlastet.

Für die Phase der Stromdichte im Wasser lassen sich entsprechende Überlegungen anstellen wie oben beim unbewehrten Kabel. Für die dort definierte „Querwellenlänge" (siehe S. 294) ergibt sich unabhängig von der Eisenbewehrung derselbe Wert.

Für die Definition des Widerstandes wird wieder die in der Zeit 1 entwickelte Wärme benutzt. Im folgenden bezeichne Index a den gesamten Außenleiter, Index e das Eisen allein. Der Widerstand der kupfernen Drahtseele R_d ist bereits im ersten Glied von Gleichung (14) in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Da der Eisenmantel nichts daran ändert, ist im folgenden nur vom Außenleiter die Rede.

$$R_a = \frac{Q}{C^2} = \int_c^\infty \frac{\varrho \cdot i^2_{eff}}{C^2} 2\pi r\, dr = \varrho_e \int_c^a \frac{|K_e|^2}{C^2} 2\pi r\, dr + \varrho_w \int_a^\infty \frac{|K_w|^2}{C^2} 2\pi r\, dr$$

$$= \varrho_e \cdot \frac{|K_e|^2}{C^2} \pi (a^2 - c^2) + \frac{2\pi \varrho_w \cdot \varrho_e^2}{|N|^2} \int_a^\infty |H_0(k r)|^2 r\, dr.$$

Wieder wird H_0 gemäß Gleichung (12) in reellen und imaginären Teil zerlegt. Die Integration läßt sich wie oben durchführen; ihr Ergebnis ist, wenn $|k_w| \cdot a = s$ gesetzt wird

$$R_a = \frac{\varrho_e \cdot |K_e|^2}{C^2} \pi (a^2 - c^2) + \frac{2\pi \varrho_w \cdot \varrho_e^2 \cdot a^2}{|N|^2 \cdot s} [g'(s) \cdot h(s) - g(s) \cdot h'(s)].$$

Da das Argument s der Besselschen Funktionen sehr klein ist, ist wie oben Einführung der Annäherung (11) zulässig. Die hierdurch vereinfachte Formel heißt:

$$\underline{R_a = \frac{\varrho_e |K_e|^2}{C^2} \pi (a^2 - c^2) + \frac{2\varrho_w \varrho_e^2}{|N|^2 |k|^2} \times 10^{-4} \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}.}$$

Hiernach ist Kurve II auf Bild 4 berechnet. Sie zeigt, daß beim eisenbewehrten Kabel der Einfluß der Frequenz auf den Widerstand sehr viel stärker ist als beim unbewehrten (Kurve I). Die Ursache dieser Erscheinung erkennen wir in dem Energieverbrauch der in der Eisenbewehrung induzierten Ströme, die mit der Frequenz an Stärke zunehmen.

Der Selbstinduktionskoeffizient pro Längeneinheit L wird wieder mit Hilfe der magnetischen Energie berechnet:

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\mathfrak{H}^2_{eff}}{C^2} 2\pi r\, dr.$$

Das Integral ist für Draht, Isolator, Eisen und Wasser gesondert auszurechnen. Also $L = L_d + L_i + L_e + L_w$. Darin ist $L_d = \frac{1}{2}$; $L_i = 2 \cdot \ln \frac{c}{b}$. Hierbei ist innerhalb des Drahtes gleichmäßige Stromverteilung angenommen. Jedoch ist wie oben in Gleichung (16) ohne Schwierigkeit Berücksichtigung der Stromverdrängung im Inneren des Drahtes möglich.

$$L_e = \frac{\mu}{2} \int_c^a \frac{\mathfrak{H}^2_{eff}}{C^2} \cdot r\, dr.$$

Darin ist $\mathfrak{H}$ aus Gleichung (32) einzusetzen. Wenn nach Gleichung (36) m und n definiert werden durch $\frac{K_e}{C} = \frac{\varrho_w \cdot H_0(k_w a)}{N} = m + i n$, so ergibt sich nach längerer Rechnung

$$L_e = 2\mu \left\{ \frac{\pi^2}{4}(m^2+n^2)(a^4-c^4) + \pi[m - \pi c^2(m^2+n^2)](a^2-c^2) + [\pi^2 c^4(m^2+n^2) - 2 m\pi c^2 + 1]\cdot \ln\frac{a}{c} \right\}.$$

Der Anteil des Wassers ergibt sich nach ähnlicher Rechnung wie für das unbewehrte Kabel, wenn wieder $|k_w| a = s$ gesetzt wird:

$$L_w = -\frac{8\pi^2 \varrho_e^2 s}{|k_w|^4 |N|^2}\cdot[g(s)\cdot g'(s) + h(s)\cdot h'(s)].$$

Ebenso wie beim Widerstand läßt sich diese Gleichung durch Annäherung (11) vereinfachen mit dem Ergebnis:

$$L_w = \frac{32\cdot\varrho_e^2}{|k_w|^4 |N|^2}\cdot \ln\frac{2}{\gamma s}.$$

Damit lassen sich die vier Teile von L, also auch $L = L_d + L_i + L_e + L_w \times 10^{-4}\ \frac{\text{Henry}}{\text{km}}$ berechnen. Nach diesen Formeln ist für das Kabel mit dünner Eisenbewehrung Kurve II auf Bild 5 berechnet. Wir vergleichen sie mit der für das unbewehrte Kabel geltenden Kurve I. Nur für niedrige Frequenz wird L durch den Einfluß des Eisens erhöht. Mit Anwachsen der Frequenz nimmt L stark ab. Dies rührt daher, daß die Strömung sich in das Eisen hineinzieht, also ein bei weitem kleinerer Raum vom magnetischen Feld erfüllt wird.

Wir gingen aus von der Frage, ob die bei den Versuchen gefundene Zunahme von R und Abnahme von L mit wachsender Frequenz durch die Eisenbewehrung verstärkt wird. Unsere Rechnung zeigt, daß beides in hohem Grade der Fall ist.

4. Zweite Annäherung: Starke Eisenbewehrung.

Im Gegensatz zu dem eben behandelten Fall der dünnen Eisenbewehrung betrachten wir nunmehr kurz den Fall der sehr starken Bewehrung, wie sie vor allem beim Küstenkabel gewählt wird, um Schutz zu gewähren vor dem Zerreißen durch schleppende Schiffsanker. Für diesen Fall gelangen wir zu besonders einfachen Annäherungen. Es wird für die Stromverteilung keine wesentliche Rolle spielen, ob die Bewehrung aus mehreren getrennten, einander umschließenden Eisenmänteln besteht, wie es in der technischen Ausführung des Küstenkabels der Fall ist. Denn von einer radialen Komponente der Strömung haben wir von vornherein abgesehen; und die axiale Strömung wird durch diese Trennungsfläche, die ihrem Lauf parallel liegt, nicht gehemmt.

Die Formeln für diese Annäherung entnehmen wir ohne weitere Rechnung dem am Anfang (S. 290ff.) behandelten Fall des unbewehrten Kabels in unbegrenzter Wassermasse. Wir nehmen nur an Stelle des Wassers eine homogene, zunächst nach außen unbegrenzte Eisenmasse als Außenleiter an. Im Eisen wird die Stromdichte nach außen schnell abnehmen, so daß wir für einen bestimmten Radius, an dem die Strömung unmerklich geworden ist, die äußere Masse des Eisens durch eine Zylinderfläche abgeschnitten und durch das Seewasser ersetzt denken können. Nachträglich müssen wir dann durch Untersuchung der Stromdichte die Frage beantworten: Wie groß ist dieser Radius? d. h. wie dick muß mindestens die Bewehrung sein, damit unsere Rechnung auf sie zutrifft? Wir werden für diesen Radius wenigstens bei hohen Frequenzen annehmbare Beträge feststellen. Über die Verteilung der Strömung auf Eisen und Wasser erfahren wir naturgemäß aus dieser Annäherung nichts, da wir die Strömung im Wasser ganz vernachlässigen.

Innerhalb des Eisens selbst bekommen wir, wie oben (S. 294) innerhalb des Wassers, für die elektrische Strömung das Bild einer radial nach außen fort-



schreitenden, stark räumlich gedämpften Wellenbewegung; für $\nu = 50$ wird die Querwellenlänge 3,16 cm und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur 1,58 $\frac{m}{sec}$.

Nehmen wir ein Kabel in einem homogenen, eisernen Schutzrohr an, so kommt nicht unsere „wirksame Permeabilität", sondern die gewöhnliche Permeabilität, etwa $\mu = 600$, zur Geltung. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser elektrischen Stromwellen quer zum Kabel wird dann, wenn wir wieder $\nu = 50$ annehmen, nur 0,316 $\frac{m}{sec}$. Eine entsprechende Wellenbewegung schreitet beim gewöhnlichen Skineffekt in einem dicken Eisendraht radial von außen nach innen fort.

Widerstand und Selbstinduktion des Außenleiters, also des Eisens, berechnen wir nach den Gleichungen (14) und (16). Die Annäherungsformeln, die oben für das Seewasser abgeleitet sind, treffen für Eisen nicht mehr zu. Für die Besselschen Funktionen sind deshalb die genauen Werte aus den Tabellen zu entnehmen. Für großes Argument, also für hohe Frequenz (etwa $\nu > 400$), sind die Besselschen Funktionen durch Exponentialfunktionen anzunähern (Jahnke-Emde, S. 102); so ergeben sich für dicke Eisenbewehrung bei hoher Frequenz die einfachen Formeln:

$$R = R_d + \frac{\sqrt{\mu \nu \varrho_e}}{c} \times 10^{-4} \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}.$$

$$L = \frac{1}{2} + 2 \cdot \ln \frac{c}{b} + \frac{1}{2 \pi c} \sqrt{\frac{\mu \varrho_e}{\nu}} \times 10^{-4} \frac{\text{Henry}}{\text{km}}.$$

Hierin bedeutet μ wieder wie auf S. 304 die wirksame Permeabilität des unterteilten Eisens. Mit Funktionentafeln und diesen Formeln sind die Kurven III der Bilder 4 und 5 berechnet, die R und L als Funktion der Frequenz ν darstellen. Auch für diesen Fall wird die Zunahme des Widerstandes und die Abnahme der Selbstinduktion mit steigender Frequenz beim eisenbewehrten Kabel wesentlich stärker als beim unbewehrten.

Ein paradoxes Ergebnis bemerken wir, wenn wir die Widerstandskurven I und III des Bildes 4 vergleichen. Wenn wir das Seewasser als Außenleiter (Kurve I) ersetzt denken durch eine massive Eisenmasse (Kurve III), so bekommen wir für alle betrachteten Frequenzen eine wesentliche Vergrößerung des Widerstandes, obwohl der spezifische Widerstand des Eisens noch nicht den zehnmillionten Teil vom spezifischen Widerstand des Seewassers beträgt; gewiß ein Beweis dafür, wie eng sich die Strömung im Eisen zusammenschnürt und wie stark ihr Energieverbrauch ist.

Nachträglich müssen wir jetzt fragen: wie dick muß mindestens der Eisenmantel sein, damit diese Annäherung zutrifft? Sie wird bei hoher Frequenz günstiger sein, d. h. auch schon für einen dünnen Eisenmantel gute Werte liefern. Für $\nu = 212$ und eine Eisendicke von 0,346 cm kennen wir von S. 306 her die genauen, nach den Maxwellschen Gleichungen für Eisen und Wasser berechneten Werte von R und L (siehe die Punkte IV der Bilder 4 und 5). Diese stimmen überraschend genau mit dieser einfachen Annäherung (den entsprechenden Punkten der Kurven III) überein. Für niedrigere Frequenzen müssen wir einen dickeren Eisenmantel annehmen, um die gleiche Genauigkeit für die Annäherung aufrecht zu erhalten. Wir wollen uns damit begnügen, die Genauigkeit des Widerstandswertes für noch eine andere Frequenz und zwar $\nu = 800$ abzuschätzen. Der Wert von L läßt sich dann ganz nach derselben Methode beurteilen. Wir definierten R_e durch die Gleichung

$$R_e = \varrho_e \int_c^\infty \left(\frac{i_{eff}}{C}\right)^2 2 \pi r \, dr.$$



Weil die Stromdichte nach außen schnell abklingt, brauchen wir praktisch die Integration nicht bis $r = \infty$ auszudehnen. Bis zu welchem Radius müssen wir sie mindestens ausdehnen, um das Integral bis auf 5% genau zu berechnen? oder physikalisch gesprochen: innerhalb eines wie großen Radius werden 95% der gesamten Jouleschen Wärme erzeugt? Wir beantworten diese Frage leicht graphisch durch planimetrieren der Kurve $\left(\frac{i_{eff}}{C}\right)^2 \cdot r$. Das Ergebnis ist eine Dicke des Eisenmantels von 0,20 cm. Für einen stärkeren Mantel trifft die Annäherung noch viel genauer zu. Da beim technischen Seekabel die Eisendicke immer mehrere mm beträgt, ist also diese Annäherung für $\nu = 800$ recht gut brauchbar.

Für Eisendrähte von kreisförmigem Querschnitt wird diese Annäherung weniger gut zutreffen, weil dort die „wirksame Permeabilität" (siehe S. 304) kleiner ist und deshalb der Abfall der Stromdichte nach außen geringer.

Schluß: Vergleich mit den Versuchen. Folgerungen für die Theorie der Zeichenübertragung.

Ein Vergleich mit den am Anfang erwähnten Versuchen läßt erkennen, daß die dargestellte Theorie des eisenbewehrten Kabels den Einfluß der Frequenz auf Widerstand und Selbstinduktion der Größenordnung nach in guter Übereinstimmung mit den Messungen wiedergibt. Eine genaue, zahlenmäßige Übereinstimmung ist von vornherein nicht zu erwarten, da für die Durchführung der Theorie wesentliche Idealisierungen erforderlich sind. Herr Professor Reich beabsichtigt, eine Mitteilung über diese Versuche demnächst zu veröffentlichen.

Was folgt aus der oben bewiesenen Veränderlichkeit von Widerstand und Selbstinduktion für die Zeichenübertragung durch das Seekabel? Jeder Theorie der Zeichenübertragung liegt die Telegraphengleichung zu Grunde. Daß diese Gleichung auch für Leiter mit ungleichförmiger Stromverteilung Gültigkeit behält, weist Breisig[1]) nach; erforderlich ist hierfür, daß die Kabelkonstanten R, L und K auf Grund von Energieüberlegungen definiert werden, wie dies bei uns geschehen ist. Für eine gute Zeichenübertragung ist wünschenswert zunächst eine möglichst geringe räumliche Dämpfung der längs des Kabels fortschreitenden Stromwellen; diese wird, wenn die anderen Kabelkonstanten gegeben sind, durch einen großen Wert der Selbstinduktion erreicht (Pupinkabel). Sodann ist wünschenswert eine möglichst geringe Verzerrung der Stromkurven; diese wird bei einem kleinen Wert des Produktes $K \cdot R$ erreicht[2]). Unsere Bilder 4 und 5 zeigen, daß diese beiden Forderungen um so schlechter erfüllt sind, je höher die Frequenz ansteigt. Jedoch ist diese Verschlechterung für Ozeankabel nicht von praktischer Bedeutung. Denn infolge der großen Kapazität des einadrigen Seekabels dürfen in langen Kabeln die Stromstöße der Morsezeichen nur langsam aufeinander folgen. Wenn wir 5 Stromstöße pro sec annehmen und zur Darstellung ihrer Kurvenform entsprechend der von Breisig[3]) angewandten Methode bis zur 41. Oberschwingung, also etwa bis $\nu = 200$ hinaufgehen, so bleiben wir für die wesentlichen Oberschwingungen doch in einem Frequenzbereich, in dem nach Aussage der Bilder 4 und 5 R und L annähernd als konstant angesehen werden können. Viel größer ist jedoch die Telegraphiergeschwindigkeit auf kurzen Kabeln[4]). Bei 12 Stromstößen pro sec gelangen wir mit der 41. Oberschwingung etwa bis $\nu = 500$, bewegen uns also in einem Frequenzbereich, in dem R und L sich stark verändern. Hierfür wäre also die Untersuchung der Verzerrung eines Stromstoßes neu durchzuführen und darin für

[1]) Breisig, Theoretische Telegraphie, Braunschweig 1910, S. 310.
[2]) Breisig, l. c. S. 320 und 373.
[3]) Breisig, ETZ. 1900, S. 1046. Vgl. auch K. W. Wagner, ETZ. 1910, S. 163ff.
[4]) Roscher, ETZ. 1912, S. 717.



R und L die oben berechneten, veränderlichen Werte einzusetzen. Jedoch soll darauf nicht näher eingegangen werden.

Weil die Telegraphiergeschwindigkeit durch die Kapazität des Kabels praktisch beschränkt ist, lohnt es auch zunächst nicht, ein Kabel zu konstruieren, das frei von dem beschriebenen, schädlichen Einfluß der Frequenz ist. Erst wenn noch höhere Geschwindigkeiten möglich sein sollten, vielleicht 25 Stromstöße pro sec, wäre dies eine lohnende Aufgabe.

Zusammenfassung.

Der Inhalt der Arbeit ist eine Untersuchung von Stromdichte, Widerstand und Selbstinduktion des einadrigen Seekabels auf Grund der Maxwellschen Gleichungen. Die Ergebnisse sind folgende:

1. Für das unbewehrte Kabel im unbegrenzten Wasser wird die komplexe Stromdichte im Wasser durch Gleichung (7), ihr Effektivwert durch das Bild 1, ihre Phase durch Bild 3 dargestellt. Mit wachsender Frequenz konzentriert sich die Strömung im Wasser mehr und mehr in der Nachbarschaft des Kabels. Diese Strömung bildet eine radial nach außen fortschreitende Wellenbewegung, deren Wellenlänge, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und räumliche Dämpfung aus den Kabelkonstanten und der Frequenz einfach zu berechnen sind.

Für Widerstand und Selbstinduktion ergeben sich die genauen Formeln (14) und (16), sowie die einfachen Annäherungen (17) und (18); mit wachsender Frequenz steigt R an, L nimmt dagegen ab (Kurven I der Bilder 4 und 5); jedoch sind diese Veränderungen nicht groß. Einige abweichende Resultate von J. J. Thomson werden erklärt. Die Kapazität des Kabels ist von der Frequenz unabhängig.

2. Für das unbewehrte Kabel im begrenzten Wasser wird die Stromdichte (Gleichung (22)) untersucht und für ein Zahlenbeispiel bei verschiedenen Frequenzen gezeichnet (Bilder 6 und 7). Der Widerstand wird für das Zahlenbeispiel berechnet. Diese Theorie liefert eine Abschätzung für den Einfluß der Meerestiefe auf die Versuche.

3. Für das eisenbewehrte Kabel wird als Annäherung ein homogener Eisenmantel mit sehr geringer „wirksamer Permeabilität" eingeführt. Integration der Maxwellschen Gleichungen liefert verwickelte Formeln, die an einem Zahlenbeispiel untersucht werden; hierfür wird die Stromdichte (Bild 9), sowie R und L berechnet; durch die Eisenbewehrung wird R stark vergrößert, L dagegen stark verkleinert.

Um einen Überblick über den Einfluß der Frequenz zu gewinnen, werden Annäherungen eingeführt. Zunächst wird die Rechnung für einen dünnen Eisenmantel durchgeführt, in dem gleichförmige Stromdichte angenommen wird. Mit wachsender Frequenz zieht sich die Strömung zum größten Teil in das Eisen hinein (Bild 10). Die Folge davon ist, daß R viel stärker zunimmt, L viel stärker abnimmt, als dies beim unbewehrten Kabel der Fall ist (Kurven II der Bilder 4 und 5).

Für einen starken Eisenmantel wird die Strömung im Wasser ganz vernachlässigt. Innerhalb des Eisens bildet wieder die Strömung eine radial nach außen fortschreitende Wellenbewegung von sehr geringer Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wieder werden R und L in Abhängigkeit von der Frequenz berechnet (Kurven III der Bilder 4 und 5). Eine Abschätzung der Genauigkeit ergibt, daß die so erhaltenen Zahlenwerte von R und L vor allem für hohe Frequenz gut brauchbar sind.

Mit Versuchen an einem Kabel in der Ostsee stimmen die Ergebnisse der Theorie in der Größenordnung gut überein. Zum Schluß sind die Folgerungen für die Zeichenübertragung durch ein Seekabel kurz erörtert.

Göttingen, Institut für angewandte Elektrizität.

April 1920.



Die Magnetisierbarkeit von Eisen-Vanadium-Legierungen.

Von

Dr. R. Dieterle, Charlottenburg.

I. Versuchsanordnung.

Bis jetzt gilt als wissenschaftlich beste Methode zur Untersuchung ferromagnetischen Materials die magnetometrische. Ihr Hauptnachteil liegt darin, daß sie keine Störungen des Erdfeldes duldet. Von F. Kohlrausch und L. Holborn[1]) wurden für die Physikalisch-Technische Reichsanstalt zwei störungsfreie Torsionsmagnetometer gebaut, die sich sehr gut bewährt haben. Sie besitzen zwei starke astasierte Magnete mit 1—2 Meter Abstand, auf deren einen das Feld des Probekörpers wirkt und eine mit Spiegel und Skala zu messende Ablenkung hervorruft. Durch Verwendung sehr kleiner Magnetsysteme aus Uhrfederstahl und eines ganz leichten Gehänges aus Glas gelang es mir, zur Aufhängung einen Quarzfaden benutzen zu können, wodurch die Empfindlichkeit ganz wesentlich gesteigert werden konnte. Ferner besitzt das Instrument Luftdämpfung, ist bequem transportabel und verursacht nur geringe Herstellungskosten.

Die Erzielung einer vollständigen Entmagnetisierung, auf deren Notwendigkeit E. Gumlich und W. Rogowski[2]) hingewiesen haben, gelang mir durch Schwächung des Erregerstromes der Wechselstrommaschine und durch Einschaltung von vier selbstgebauten, geeignet abgestuften Flüssigkeitswiderständen von zusammen über 300000 Ohm. Alle Messungen wurden aus theoretischen Gründen an möglichst genau hergestellten Rotationsellipsoiden von 22 cm großer und 0,4 cm kleiner Achse ausgeführt. Weitere Einzelheiten der Versuchsanordnung sind aus meiner früheren Veröffentlichung ersichtlich[3]).

II. Stufenversuche.

Die Größe der Induktion $\mathfrak{B}$ für eine bestimmte Feldstärke $\mathfrak{H}$ hängt bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen bekanntlich auch noch von der Zahl der Stufen bis zu dieser Feldstärke ab. Bei hierüber angestellten Versuchen wurde stets die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in gesetzmäßiger Weise geändert. Da aber die Permeabilität μ die einem Material eigentümliche Größe ist, sollte dies meiner Ansicht nach mit ihr oder doch wenigstens mit der Induktion $\mathfrak{B}$ geschehen, weshalb ich meine Messungen dementsprechend vornahm. Die hierzu gehörigen theoretischen Überlegungen finden sich a. a. O. Seite 366 ff., die Ergebnisse der Messungen sind: Bei stufenweiser Magnetisierung ist für kleine Feldstärken die Größe der Stufen von Einfluß auf die Größe der erreichten Induktionswerte, die letzteren werden um so höher, je größer die Stufen sind. Für mittlere Felder ist der Einfluß geringer und für große verschwindet er ganz. Daher sollte die Stufenfolge bei vergleichenden Messungen an verschiedenem Untersuchungsmaterial für kleine Feldstärken ähnlich gewählt werden.

E. Gumlich und E. Schmidt[4]) stellten fest, daß die Koerzitivkraft $\mathfrak{H}_c$ mit der Größe der Induktionssprünge abnimmt, F. Rücker[5]) fand das Gegenteil. Meine diesbezüglichen Versuche entschieden zu gunsten der ersteren, denn es ergab sich: $\mathfrak{H}_c$ wird größer mit kleiner werdenden Stufen, dabei ist die prozentuale Zunahme um so größer, je kleiner $\mathfrak{H}_c$ ist.

[1]) F. Kohlrausch und L. Holborn, Ann. d. Phys. 10. S. 287. 1903 und 13. S. 1054. 1904.
[2]) E. Gumlich und W. Rogowski, Ann. d. Phys. 34. S. 235. 1911.
[3]) R. Dieterle, Ann. d. Phys. 59. S. 343—392. 1919.
[4]) E. Gumlich und E. Schmidt, ETZ. 21. S. 233. 1900; sowie E. Gumlich, ETZ. 27. S. 988. 1906.
[5]) F. Rücker, Inaug.-Diss. Halle. 1905.



III. Messungen an Eisen-Vanadium-Legierungen.

Infolge der Stellung des Vanadiums im Periodischen System der Elemente besitzt der Einfluß von Vanadium auf die Magnetisierbarkeit von Eisen wissenschaftliches und technisches Interesse. Die Firma Friedr. Krupp, Essen, stellte mir 3 Vanadiumlegierungen von folgender Zusammensetzung zur Verfügung.

Tabelle 1. Chemische Zusammensetzung der Vanadium-Legierungen.

Gewählte Bezeichnung	V	C	Mn	Si	Fe
I	0,64	0,22	0,23	0,07	98,84
II	1,75	0,28	0,29	0,08	97,60
III	3,60	0,36	0,20	0,20	95,64

Auch übernahm die Firma die von mir gewünschte Wärmebehandlung derselben. Bis jetzt liegt nur eine diesbezügliche Messung vor, die J. J. Lonsdale[1]) an einer als Stahl bezeichneten Legierung mit den Zusätzen 3,5 % V, 0,6 % C, 0,2 % Mn und einer Spur von Si vornahm. Hier erscheint sofort der hohe C-Gehalt bedenklich, im übrigen kommt sie meiner Legierung III am nächsten. Zur Abkürzung sei sie mit L bezeichnet.

Die Vorbehandlung der 3 Legierungen bestand in zweistündigem Ausglühen bei 850°, langsamer Abkühlung und Abdrehen zu Ellipsoiden (Zustand A). Darauf wurden die Nullkurven (jungfräuliche Kurven) und die Hysteresisschleifen für ca. 30 und ca. 80 Gauß maximaler Feldstärke aufgenommen. Dann wurden die Legierungen nochmals 1 Stunde lang bei 900° im Stickstoffstrom geglüht und langsam abgekühlt (Zustand B), um sie von der durch das Abdrehen hervorgerufenen Härtung zu befreien. Nach derselben magnetischen Untersuchung wurde eine Härtung der Legierungen durch Erhitzen bis 900° und Abschrecken in Wasser versucht (Zustand C). Zum Schluß wurden die Proben nochmals 1 Stunde lang bei 900° geglüht und langsam abgekühlt, um festzustellen, inwieweit die Wirkung des Abschreckens wieder rückgängig gemacht werden konnte. Schon die Vorversuche ergaben fast dieselben Werte wie im Zustand B, sodaß ich die ausführliche Untersuchung unterlassen konnte. Die Legierung L wurde von J. J. Lonsdale ähnlich behandelt, sodaß jeweils Vergleiche möglich sind.

Die Hauptwerte der Messungen sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle 2. Messungsergebnisse der Nullkurven.

Material	Zustand	$\mathfrak{H}_{max}$	$\mathfrak{B}_{max}$	μ_{max}	bei $\mathfrak{B}$	und $\mathfrak{H}$
I	A	81,0	15 960	1 010	8 400	8,4
	B	79,6	16 780	1 210	8 500	7,1
	C	81,2	15 460	310	9 600	30,8
II	A	78,8	16 890	955	10 200	10,8
	B	79,4	16 850	1 230	10 300	8,4
	C	80,1	16 600	630	7 500	12,0
III	A	80,5	16 220	830	8 500	10,2
	B	80,7	15 800	1 085	9 500	8,8
	C	82,0	15 690	595	7 500	12,5
L	A	80,0	14 200	425	8 700	20,5
	B	80,0	13 300	310	8 400	27
	C	80,0	9 500	122	8 500	70

[1]) J. J. Lonsdale, Phys. Zeitschr. 14. p. 581. 1913.

Tabelle 3 Messungsergebnisse der Hysteresisschleifen.

Material	Zustand	$\mathfrak{H}_{max}$	$\mathfrak{B}_{max}$	$\mathfrak{B}_{rem}$	$\mathfrak{H}_{c}$	E
I	A	30,9	14 310	11 440	4,85	12 200
	B	31,55	14 920	11 330	4,00	10 970
	C	32,7	10 430	7 230	14,4	20 040
	A	80,3	16 140	11 720	4,91	17 100
	B	82,3	16 750	11 600	4,01	16 000
	C	80,6	15 440	10 520	21,4	41 180
II	A	30,8	14 970	12 920	6,09	16 050
	B	30,65	15 330	14 080	5,50	14 570
	C	29,1	13 360	9 360	6,05	14 220
	A	83,0	16 870	13 540	6,41	22 800
	B	81,6	16 850	14 530	5,55	20 100
	C	77,7	16 570	9 900	6,08	19 330
III	A	31,6	14 180	11 530	6,04	15 070
	B	31,55	14 420	13 000	5,49	13 880
	C	29,8	12 800	8 650	6,10	13 190
	A	80,2	16 150	12 460	6,18	22 100
	B	80,4	15 920	13 610	5,60	19 800
	C	79,8	15 700	9 620	6,12	18 130
L	A	29,5	11 400	9 500	11,6	40 930
	B	29,5	8 970	6 800	14,5	35 160
	C	29,5	1 600	315	6,5	1 464
	A	80,0	13 800	11 000	12,8	56 500
	B	80,0	13 300	9 150	17,6	64 000
	C	80,0	9 300	6 700	42,0	95 000

Dabei sind die Werte für 80 Gauß bei L durch Interpolieren erhalten worden.

Für alle Legierungen und Zustände habe ich die gemessenen Werte in Kurvenform dargestellt. Am interessantesten ist der Vergleich der Hysteresiskurven in den Zuständen B und C, weshalb sie hier wiedergegeben werden.

Tabelle 4. Hysteresiskurven nach dem Ausglühen (B). (Figur 1.)

I				II				III			
$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$
31,55	14 920	82,3	16 750	30,65	15 330	81,6	16 850	31,55	14 420	80,4	15 920
14,93	14 260	38,4	15 810	14,0	14 825	37,1	16 010	15,0	13 880	37,4	15 130
7,30	13 640	14,25	14 815	6,02	14 520	13,25	15 320	7,00	13 530	13,7	14 440
1,11	12 050	1,18	12 330	− 1,33	13 910	− 1,66	14 335	− 0,26	12 975	− 1,00	13 460
− 2,24	8 605	− 2,25	8 690	− 4,65	10 070	− 4,89	10 160	− 4,71	10 425	− 4,85	10 490
− 3,20	6 010	− 3,20	6 020	− 5,01	7 610	− 4,98	7 460	− 4,97	7 310	− 5,07	7 410
− 3,56	2 940	− 3,57	2 930	− 5,24	4 310	− 5,23	4 270	− 5,19	4 235	− 5,27	4 300
3,97	116	4,02	124	− 5,43	1 145	− 5,49	1 035	− 5,37	1 090	− 5,52	1 230
4,66	2 890	4,68	2 920	5,62	2 055	5,67	2 180	5,70	1 960	5,75	1 830
5,57	5 480	5,60	5 470	5,82	5 130	6,02	5 240	6,07	4 930	6,16	4 770
6,55	7 605	6,71	7 615	6,41	7 720	6,76	7 665	6,60	7 385	6,83	7 130
7,85	9 210	8,62	9 660	7,19	9 550	8,17	9 960	7,70	9 080	8,55	9 310
9,42	10 515	13,45	12 280	8,39	11 080	12,7	12 775	9,15	10 480	13,7	12 070
11,6	11 730	19,4	13 660	10,4	12 420	18,7	14 160	11,3	11 670	18,9	13 240
16,1	13 140	33,0	15 035	15,0	13 825	32,3	15 340	16,0	12 920	32,2	14 425
26,25	14 540	51,25	15 910	25,3	15 030	51,0	16 080	26,3	14 075	50,05	15 175
$\mathfrak{B}_{rem}$ =	11 330		11 600		14 080		14 530		13 000		13 610
$\mathfrak{H}_{c}$ =	4,00		4,01		5,50		5,55		5,49		5,60

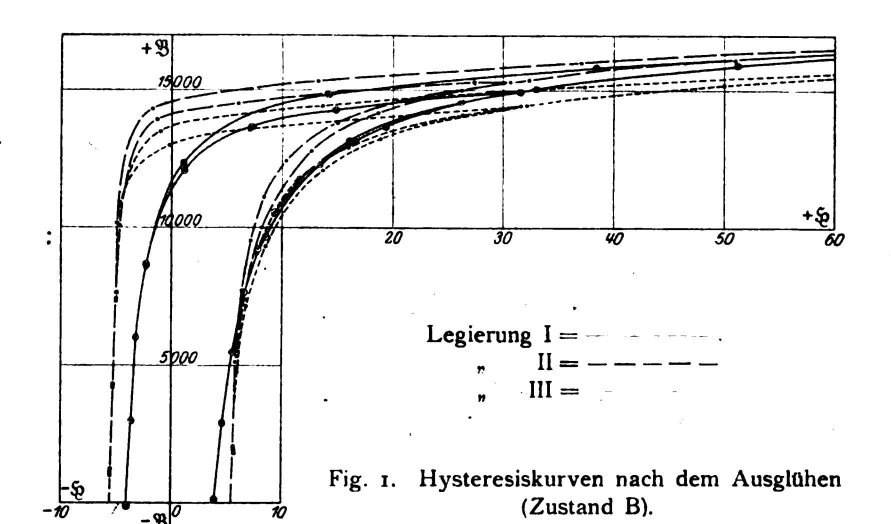


Fig. 1. Hysteresiskurven nach dem Ausglühen (Zustand B).

Tabelle 5. Hysteresiskurven nach dem Abschrecken (C). (Fig. 2.)

I				II				III			
$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$
32,7	10 430	80,6	15 440	29,1	13 360	77,7	16 570	29,8	12 800	79,8	15 700
18,85	9 630	39,0	14 080	14,9	12 710	36,8	15 630	15,65	12 100	37,95	14 780
6,79	8 460	15,9	12 780	5,80	11 240	14,45	13 860	4,40	10 330	15,25	13 200
1,77	7 765	1,54	10 940	1,57	10 020	1,54	10 540	0,29	8 770	1,65	10 270
— 2,20	6 520	— 3,93	9 250	— 1,54	8 620	— 3,08	8 150	— 3,08	6 710	— 2,79	7 960
— 5,76	4 810	— 9,28	6 805	— 4,24	6 040	— 4,93	4 030	— 4,80	3 910	— 5,03	4 105
— 8,63	3 170	— 13,4	4 720	— 4,92	4 020	6,18	520	— 5,66	1 200	6,30	463
— 12,0	1 330	— 16,75	2 785	— 5,42	1 925	8,53	3 980	7,10	2 420	8,55	3 870
15,95	911	— 19,8	991	6,58	1 550	10,9	6 420	10,05	5 760	10,95	6 280
19,0	2 835	23,4	1 655	8,29	3 750	14,4	9 010	12,8	7 880	14,85	8 710
21,4	4 630	26,2	4 565	10,1	5 645	18,4	10 800	15,6	9 315	18,9	10 435
23,3	5 990	28,2	6 945	12,7	8 030	22,1	12 010	18,1	10 220	22,4	11 450
25,6	7 700	31,55	9 660	15,3	9 550	27,0	13 100	21,3	11 160	27,8	12 540
27,8	8 810	36,05	11 460	20,8	11 540	33,05	14 070	24,1	11 790	33,45	13 360
30,15	9 680	45,7	13 130	25,0	12 620	43,05	15 080	26,85	12 300	44,0	14 330
—	—	61,55	14 565	—	—	59,65	15 900	—	—	60,3	15 175
$\mathfrak{B}_{rem}$ =	7 230		10 520		9 360		9 900		8 650		9 620
$\mathfrak{H}_c$ =	14,4		21,4		6,05		6,0		6,10		6,12

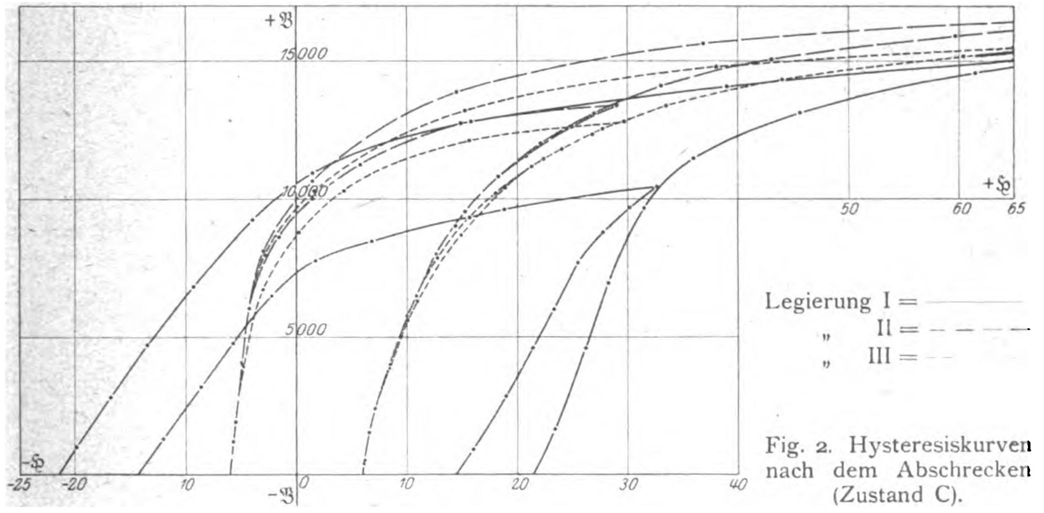


Fig. 2. Hysteresiskurven nach dem Abschrecken (Zustand C).

Aus den Tabellen und Kurven ließ sich folgendes erkennen: Im Zustand A ist Material I magnetisch am weichsten, II zeigt die höchste maximale und remanente Induktion, III hält sich im wesentlichen zwischen I und II. Die niedrigen Werte von L zeigen, daß J. J. Lonsdales Material von Anfang an magnetisch geringwertig war, nach meinen Messungen kann aber der Vanadiumgehalt nicht die Ursache hiervon sein.

Das Ausglühen (B) hat alle 3 Legierungen etwas verbessert, insbesondere die Permeabilität. I ist wiederum die weichste, II besitzt aber die höchsten Werte von μ_{max}, $\mathfrak{B}_{max}$, $\mathfrak{B}_{rem}$, III hat sich am wenigsten geändert und ist daher an die letzte Stelle gerückt. L dagegen wurde noch härter, was nach meinen Messungen ebenfalls nicht durch einen Vanadiumgehalt bedingt sein kann.

Durch das Abschrecken (C) ist nur das Material I wesentlich gehärtet worden, bei II und III ist teilweise nicht einmal mehr der Einfluß des Ausglühens rückgängig gemacht worden, magnetische Härte ist also nicht vorhanden. Diese Feststellung ist gar nicht vereinbar mit J. J. Lonsdales Messungen, denn er beobachtet ganz beträchtliche Härtung, so z. B. für $\mathfrak{H}_c$ den siebenfachen Wert wie bei III, sodaß nach seinen Angaben Vanadium zur Herstellung von permanenten Magneten in Frage käme. Von der Firma Krupp hierüber angestellte Versuche verliefen erfolglos, weil keine Härtung erzielt werden konnte.

Die bis jetzt mitgeteilten Ergebnisse folgen lediglich aus meinen magnetischen Messungen. Ich hielt es aber für zweckmäßig, die V-Legierungen auch metallographisch zu untersuchen und Vergleiche anzustellen. Tatsächlich ergab sich auch volle Übereinstimmung.

Die aufgenommenen Mikrophotogramme zeigen im Zustand A bei Material I Ferrit und etwas Perlit, bei II fast nur Ferrit, bei III grobe Struktur und ziemlich viel ungleich verteilten Perlit. Das Gefügebild IB zeigt Ferrit mit wenigen großen Perlitinseln, IIB zeigt gegen IIA fast keinen Perlit mehr, IIIB zeigt feinere und gleichmäßigere Struktur und weniger Perlit. IC zeigt fast nur Martensit, also einen Gefügebestandteil von gehärtetem Material, IIC unterscheidet sich kaum von IIB, IIIC zeigt wieder gröberes Gefüge, aber ebensowenig eine Härtung wie IIC.

Nach den umfassenden Versuchen, die im letzten Jahrzehnt in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über die magnetischen Eigenschaften der C-, Si-, Al- und Mn-Legierungen[1]) vorgenommen wurden, entsteht die Verbesserung der magnetischen Eigenschaften eines Materials, d. h. die Verminderung der Ummagnetisierungsarbeit, in erster Linie durch die Austreibung der vorhandenen Gase, nämlich C, O, H, N, CO, CO_2, während die mit dem Glühen meist verbundene Vergröberung der Kristallstruktur einen verschlechternden Einfluß haben soll. Nun geht aber das V mit C und O sehr leicht Verbindungen ein und wirkt deshalb vorzüglich desoxydierend und entgasend[2]) und bemächtigt sich, wenn es in größeren Mengen vorhanden ist, des Kohlenstoffs und verhindert damit eine Härtung. So konnten durch das Ausglühen C und O nicht mehr in größeren Mengen beseitigt werden, daher wurde das Material hierdurch nicht wesentlich verbessert. Das Abschrecken bewirkte nur bei geringem V-Gehalt, also bei I, eine Härtung, denn hier konnte sich der magnetisch geringwertige Zementit Fe_3C bilden.

J. J. Lonsdale hat seine Legierung aus Eisen und Ferrovanadium hergestellt, es ist also möglich, daß in diesem Falle V an Fe gebunden und deshalb C von V unbelästigt blieb und seine härtende Wirkung voll entfalten konnte. Hierfür sprechen auch die nur Perlit und Martensit, aber kein Ferrit zeigenden Gefügebilder von L. Auf jeden Fall hat das Vanadium seine eigentlichen metallographischen Eigenschaften bei L nicht gezeigt. Nach meinen Messungen kann von einem Vanadium-„Stahl" in magnetischer Hinsicht kaum gesprochen werden.

Zusammenfassend möchte ich vielmehr sagen: Vanadium wirkt in ähnlicher Weise wie Silizium und Aluminium auf die magnetischen Eigenschaften des Eisens ein, es könnte also bei der Herstellung der sogen. „legierten" Bleche für die Technik in Frage kommen.

[1]) Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt. 4. Heft 3. S. 267—420. 1918.

[2]) G. Mars, Die Spezialstähle, S. 310. 1912.



Instabilitäts- und Hystereseerscheinungen am Wackeltisch.

Von

Josef Weinacht.

Sommerfeld hat in der Phys. Zeitschrift 1901/02 in dem Aufsatz „Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre" S. 266—271 und 286—291 den Einfluß eines gedämpft schwingenden Fundaments („Wackeltisch") auf den Gang eines mit konstanter Spannung betriebenen Nebenschlußelektromotors studiert. Er findet experimentell gewisse „kritische" Punkte, in denen die Tourenzahl bei geringer Steigerung des Vorschaltwiderstandes sich um einen großen Betrag rapid ändert, so daß man also für jede dieser Stellen zwei verschiedene Werte der Tourenzahl erhält. Alle dazwischen liegenden Tourenzahlen sind **instabil,** d. h. sie lassen sich durch keine noch so vorsichtige Änderung des Widerstandes festhalten. Ich habe experimentell und rechnerisch die Erscheinung an einem Nebenschlußmotor, dessen Anker durch einseitige Anbringung eines Stück Eisens asymmetrisch gemacht worden war und dadurch seine Unterlage (einen Tisch) zu gedämpften Schwingungen

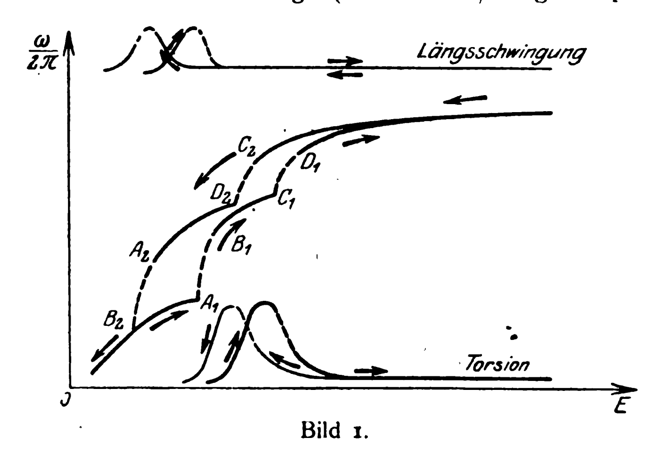


Bild 1.

anregte, weiter verfolgt. Es stellte sich dabei heraus, daß die kritischen Stellen Anlaß zu einer weiteren Erscheinung geben, einer Art **Hysterese,** indem die Tourenzahlen, die bei Verringerung des Vorschaltwiderstandes durchlaufen werden, punktweise durchaus nicht dieselben zu sein brauchen wie diejenigen, die sich bei Vergrößerung des Vorschaltwiderstandes ergeben — analog der Hysterese des Eisens auf magnetischem Gebiete. Trägt man in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem die Tourenzahl $\frac{\omega}{2\pi}$ als Funktion der in den Motor gehenden Energie auf, so ergibt sich für den Wackeltisch, der Längs-, Torsions- und Membranschwingungen (des Tischblatts!) fähig ist, experimentell nebenstehendes Bild (1). Die Pfeile geben den Sinn, in welchem die Kurve durchlaufen ist, an, die punktierten Teile die kritischen Intervalle $A_1 B_1$, $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $A_2 B_2$ an, wobei $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ zur Längs-, die übrigen zur Torsionsschwingung gehören. Oberhalb und unterhalb dieser Kurve sind zum Vergleiche die Amplituden der Längs- und Torsionsschwingungen, die mitgemessen wurden, als Funktion der der Energie E eingezeichnet. Wir wollen nun im folgenden diesen Sachverhalt auch theoretisch darlegen.

1. Das gekoppelte System. Wir legen unsern Betrachtungen einen Motor von konstantem Felde H der Feldmagnete zugrunde, dessen Tourenzahl durch



einen in den Ankerstromkreis eingeschalteten variabeln Widerstand regulierbar sei. Auf der Axe A des Motors sitze ein Exzenter von der Masse m, dessen Schwerpunkt S die Entfernung R von A habe. Die Gerade AS bilde mit der Horizontalen den Winkel φ. Der Motor sei auf einer Unterlage mit der Elastizität ε und der Dämpfung α montiert, von der wir vereinfachend voraussetzen, daß sie nur in der vertikalen Richtung y schwingungsfähig sei. Gesamtmasse des Motors und der Unterlage sei M, Gesamtträgheitsmoment des Ankers und des Exzenters sei T. Bezeichnet ferner w den Widerstand des Ankerstromkreises einschließlich des variabeln Widerstands, i seine Stromstärke, P die Klemmspannung des Leitungsnetzes, so können wir die im Ankerstromkreis infolge der Drehung des Ankers induzierte elektromotorische Kraft gleich $k \cdot \dot{\varphi}$ setzen, wo $k = \text{konst.}$; i wird dann durch die Gleichung bestimmt:

$$i \cdot w = P - k\dot{\varphi} \tag{1}$$

Das auf den Anker wirkende Drehmoment kann bei einfachen Verhältnissen gleich $k \cdot i$ gesetzt werden; das Drehmoment der Lagerreibung $= \beta \cdot \dot{\varphi}$. Es ergeben sich dann für das gekoppelte System folgende beiden Differentialgleichungen:

$$M \cdot \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \varepsilon y + m \cdot R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sin\varphi = 0. \tag{2}$$

$$T \cdot \ddot{\varphi} + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \cdot \dot{\varphi} - \frac{k}{w} \cdot P + m \cdot R\, \ddot{y} \cos\varphi = 0. \tag{3}$$

Die Terme $m \cdot R \frac{d^2}{dt^2} \sin\varphi$ und $m \cdot R \ddot{y} \cos\varphi$ stellen die Koppelungsglieder dar. Sie ergeben sich leicht so: Ein Massenelement dm des Exzenters habe in Bezug auf ein räumlich festes Koordinatensystem mit vertikaler Y-Achse durch die Motorachse A, die Koordinaten (x, Y); in Bezug auf ein System, dessen O-Punkt in A liege und also in vertikaler Richtung mitbewegt ist, die Koordinaten (x, η). Die Entfernung (dm, A) sei r, die Koordinaten der Achse des Motors im festen System (o, y). Dann ist: $Y = y + \eta$ und die Trägheitsrückwirkung des Exzenters auf die elastische Schwingung: $\int \ddot{Y}\, dm = \ddot{y} \cdot m + \frac{d^2}{dt^2} \int \eta\, dm = \ddot{y} \cdot m + m \cdot R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sin\varphi$, da $\frac{1}{m} \int \eta\, dm$ die η-Koordinate des Schwerpunktes des Exzenters ist.

Ferner ist das rückwirkende Drehmoment auf den Exzenter:

$$\int dm\, (x \cdot \ddot{Y} - \eta \ddot{x}) = \ddot{y} \int x \cdot dm + \ddot{\varphi} \int r^2\, dm = m \cdot R\, \ddot{y} \cos\varphi + \ddot{\varphi} \int r^2\, dm.$$

Die Terme $m \cdot \ddot{y}$ und $\ddot{y} \int r^2\, dm$ sind in $M \ddot{y}$ bzw. $T \cdot \ddot{y}$ mitberücksichtigt.

Wir wollen (2) und (3) näherungsweise integrieren. Wir bedienen uns dabei der Methode der sukzessiven Approximation und ersetzen demgemäß das vorliegende System durch das folgende:

$$\left.\begin{aligned} M \ddot{y}_n + \alpha \cdot \dot{y}_n + \varepsilon y_n + m \cdot R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sin\varphi_n &= 0; \quad &(2') \\ T \cdot \ddot{\varphi}_{n+1} + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \cdot \dot{\varphi}_{n+1} - \frac{k}{w} P + m \cdot R \cdot \ddot{y}_n \cos\varphi_n &= 0. \quad &(3') \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ist φ_n als Funktion von t gegeben, so findet man aus (2′) durch Integration nach der Methode der Variation der Konstanten y_n und aus (3′) ebenso φ_{n+1} usf. Die Konstanten sind dabei so zu bestimmen, daß für $t = t_0$, y_n und φ_n dieselben Anfangswerte haben, wie die für die strenge Lösung y und φ vorgeschriebenen. Ist zu irgend einer Zeit $t = t_0 : \varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $y = y_0$, $\dot{y}_0 = \dot{y}$, so hat man zu setzen



$\varphi_1 = \dot{\varphi}_0 (t - t_0) + \varphi_0$; $\lim\limits_{n=\infty} y_n = y$ und $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n = \varphi$ stellt die strenge Lösung dar, falls der Prozeß konvergiert — und er tut dies offenbar —, mit den vorgeschriebenen Werten φ, $\dot{\varphi}$, y, $\dot{y}$ für irgend eine Zeit $t = t_0$.

Die allgemeine Lösung φ_n und y_n setzt sich aus einem zeitlich rasch abklingenden und aus einem stationären Teile zusammen, in welch letzterem $\dot{\varphi}$ um einen Mittelwert ω schwankt, und zwar offenbar um so weniger, je größer das Trägheitsmoment T gewählt wird. Diesem stationären Teile wenden wir unsere Aufmerksamkeit zu. Wir wählen also unsere Anfangszeit t_0 sehr groß, so daß wir auf die Abklingungsglieder verzichten können. Als Anfangsgeschwindigkeit für $t = t_0$, die uns ja nicht bekannt ist, wollen wir den Mittelwert ω nehmen — was zudem eine weitere Annäherung bedingen wird — und setzen demgemäß: $\varphi_1 = \omega t$. Es ergibt sich dann einfach:

$$y_1 = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \tag{4}$$

worin nach (2')

$$a = -\frac{m \cdot R \alpha \cdot \omega^3}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}; \quad b = \frac{m \cdot R \cdot \omega^2 (\varepsilon - M \omega^2)}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}, \tag{5}$$

und weiterhin:

$$\dot{\varphi}_2 = c_1 + d \cos 2 \omega t + e \sin 2 \omega t, \tag{6}$$

worin nach (3'): c_1, d, e sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$\left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \cdot c_1 - \frac{m}{2} \cdot R \omega^2 a - \frac{k}{w} \cdot P = 0. \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{-m^2 R^2 \omega^4}{2(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2) \cdot \left((2\omega T)^2 + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right)^2\right)} \left(2 \omega T (\varepsilon - M \omega^2) + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \omega \alpha\right) \\ e &= \frac{m^2 \cdot R^2 \cdot \omega^4}{2(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2) \cdot \left((2\omega T)^2 + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right)^2\right)} \left(\left(\frac{k^2}{w} + \beta\right)(\varepsilon - M \omega^2) - 2 \omega^2 \alpha \cdot T\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Aus dem Folgenden wird hervorgehen, daß die Näherung (6), wenn T groß ist vollkommen ausreicht, so daß also nach (6) c_1 als unser Mittelwert ω anzusprechen ist. Einsetzen von (5) in (7) ergibt dann für die Abhängigkeit zwischen w und ω die Gleichung:

$$\left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \omega + \frac{m^2 \cdot R^2 \cdot \alpha \cdot \omega^5}{2(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2)} - \frac{k}{w} \cdot P = 0. \tag{9}$$

2. Diskussion der Lösung. Schwingung (4) hat die Amplitude:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{m \cdot R \cdot \omega^2}{\sqrt{(\omega \alpha)^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}}. \tag{10}$$

Da nun

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{m \cdot R \cdot \omega}{\sqrt{(\omega \alpha)^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}^3} (2 \varepsilon^2 - \omega^2 (2 M \varepsilon - \alpha^2))$$

so steigt A von $A = 0$ bei $\omega = 0$, hier die ω-Achse berührend zu einem Maximum für:

$$\omega_m^2 = \frac{2 \varepsilon^2}{2 M \varepsilon - \alpha^2}; \quad A_{max} = \frac{2 m R \varepsilon}{\alpha \sqrt{4 M \varepsilon - \alpha^2}} \tag{11}$$

(welches von dem Maximum der Eigenschwingung $\omega_0^2 = \frac{4 M \varepsilon - \alpha^2}{4 M^2}$ verschieden ist) an, falls $2 M \varepsilon - \alpha^2 > 0$, um sich darauf, ständig abnehmend, asymptotisch dem Werte $\frac{m \cdot R}{M}$ zu nähern. Ist $2 M \varepsilon - \alpha^2 \leq 0$, so wächst A stets von $A = 0$ bis $A = \frac{m \cdot R}{M}$ (s. Bild 2). Wir setzen voraus: $2 M \varepsilon - \alpha^2 > 0$.

Gleichung (9) läßt sich nun auch so schreiben:

$$\frac{k}{w}(P - k\omega) = \beta\omega + \frac{1}{2}\frac{m^2R^2\alpha\omega^5}{\omega^2\alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2} = \beta\omega + \frac{1}{2}\alpha\omega\cdot A^2. \tag{9a}$$

Nach (1) ist nun offenbar stets $P - k\omega > 0$; $P - k\omega$ nimmt also mit wachsendem ω, absolut genommen, ab, die rechte Seite aber bis ω_m sicherlich zu, somit w in dem Intervalle $(0, \omega_m)$ ab. Die Extremwerte für $w\left(\frac{dw}{d\omega} = 0\right)$ ergeben sich aus der Gleichung, die durch Differentiation von 9a nach ω und Elimination von w folgt:

$$\left(5\varepsilon^2 - 3\omega^2(2M\varepsilon - \alpha^2) + M^2\omega^4\right) + \frac{2\cdot k\omega}{P}\left(\omega^2(2M\varepsilon - \alpha^2) - 2\varepsilon^2\right)$$

$$+ \frac{2\beta}{\omega^4 m^2R^2\alpha}\left(\omega^2\alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2\right)^2 = 0, \tag{12}$$

die also für $\omega \leqq \omega_m$ keine positive Wurzel haben kann; soll sie überhaupt solche haben, so muß der erste Klammerausdruck negativ werden können (der zweite und dritte Term ist nämlich notwendig > 0 für $\omega > \omega_m$), d. h.

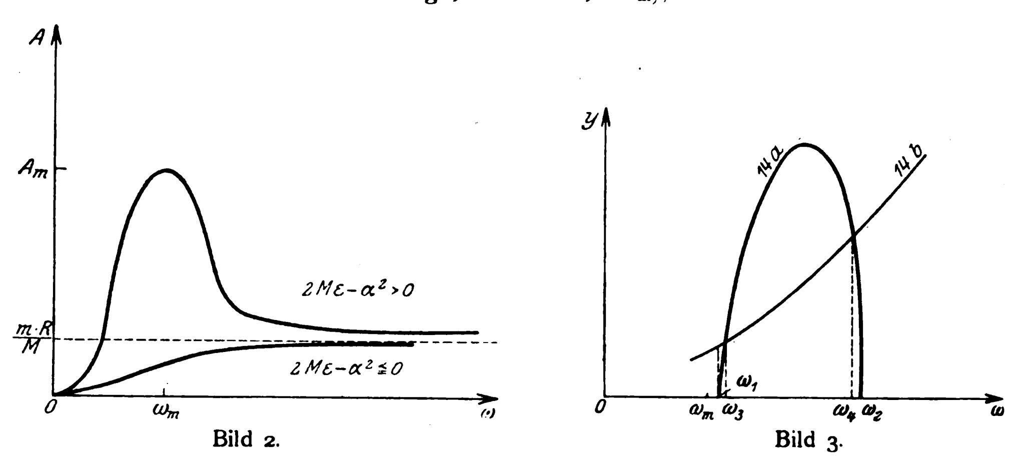


Bild 2. Bild 3.

$$5\varepsilon^2 - 3\omega^2(2M\varepsilon - \alpha^2) + M^2\omega^4 = 0$$

muß reelle, verschiedene Wurzeln ω_1, ω_2 haben:

$$\omega^2_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2}\right)^2 - 5\frac{\varepsilon^2}{M^2}}.$$

Die Wurzeln sind reell, wenn:

$$2(3 - \sqrt{5})M\varepsilon - 3\alpha^2 > 0. \tag{13}$$

ω_1 und ω_2 liegen oberhalb ω_m[1]).

Gleichung (12) ist vom 8. Grade in ω, schreibt man sie nach fallenden Potenzen von ω geordnet, so ersieht man, daß sie vier Vorzeichenwechsel, somit nach einem Satze der Algebra höchstens vier positive Wurzeln hat, oder eine gerade Anzahl

[1]) Denn wäre $\omega_m^2 > \omega_1^2$, so

$$\frac{2\varepsilon^2}{2M\varepsilon - \alpha^2} > \frac{3}{2}\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2}\right)^2 - 5\frac{\varepsilon^2}{M^2}},$$

und da:

$\frac{3}{2}\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2} > \frac{2\varepsilon^2}{2M\varepsilon - \alpha^2}$, da ja $3(2M\varepsilon - \alpha^2)^2 > 4\varepsilon^2M^2$ und: $2(\sqrt{3} - 1)M\varepsilon > \sqrt{3}\alpha^2$ (nach (13)), so müßte auch:

$$\left(\frac{3}{2}\left(\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2}\right) - \frac{2\varepsilon}{2M\varepsilon - \alpha^2}\right)^2 < \left(\left(\frac{3}{2}\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2}\right)^2 - 5\frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)$$

und nach Ausrechnung: $(2M\varepsilon - \alpha^2)^2 > 4\varepsilon^2M^2$, was unmöglich ist.



weniger. Ich behaupte: (12) kann nur 2 positive Wurzeln haben. Wir betrachten zu dem Zwecke die beiden Kurven:

$$-y = 5\varepsilon^2 - 3\omega^2(2M\varepsilon - \alpha^2) + M^2\omega^4 \qquad (14a)$$

$$y = 2\frac{k}{P}\cdot\omega\left((2M\varepsilon - \alpha^2)\omega^2 - 2\varepsilon^2\right) + \frac{2\beta}{m^2R^2\alpha\omega^4}\left(\omega^2\alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2\right)^2 \qquad (14b)$$

im Intervalle $(\omega_1\,\omega_2)$, deren Schnittpunkte offenbar die Wurzeln von (12) ergeben. Die Kurve (14a) steigt von $y = 0$ bei $\omega = \omega_1$ zu einem Maximum für

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\,\frac{2\varepsilon M - \alpha^2}{M^2}, \quad y = \frac{9(2M\varepsilon - \alpha^2)^2 - 20M^2\varepsilon^2}{4M^4} \sim 4\frac{\varepsilon^2}{M^2} \quad (\alpha^2 \ll 2M\varepsilon),$$

um dann rasch gegen 0 herabzusinken für $\omega = \omega_2$. Sie hat innerhalb (ω_1, ω_2) keinen Wendepunkt; der einzig vorhandene liegt bei

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2} < \omega_m^2 = \frac{2\varepsilon^2}{2M\varepsilon - \alpha^2}.$$

Die Kurve wendet also in (ω_1, ω_2) der ω-Axe ihre konkave Seite zu. Siehe Bild 3.

Ähnlich, aber nach der entgegengesetzten Seite verhält sich auch die Kurve (14b). Denn der erste Term von (14b) wächst monoton mit $\omega > \omega_m$; ebenso der zweite Term, der sich bis auf einen konstanten positiven Faktor in der Form $\frac{\omega^4}{A^4}$ schreiben läßt (vgl. (10)), A aber für $\omega > \omega_m$ abnimmt (s. Bild 2). (14b) hat ferner ebensowenig wie (14a) einen Wendepunkt innerhalb (ω_1, ω_2); es ist nämlich:

$$y'' = 12\frac{k}{P}\omega(2M\varepsilon - \alpha^2) + \frac{8\beta}{m^2R^2\alpha}\left(5\frac{\varepsilon^4}{\omega^6} + 3M^4\omega^2 - 3\frac{\varepsilon^2}{\omega^4}(2M\varepsilon - \alpha^2) - M^2(2M\varepsilon - \alpha^2)\right)$$

Der erste Term ist nun positiv; setzen wir aber im zweiten Terme

$$\omega^2 = x\cdot\frac{\varepsilon}{M},$$

so wird dieser bis auf einen positiven Faktor:

$$\frac{M\varepsilon}{x^3}(3x^4 - 2x^3 - 6x + 5) + \alpha^2\left(\frac{3}{x^2} + 1\right) = \frac{M\varepsilon}{x^3}(x-1)^2(3x^2 + 4x + 5) + \alpha^2\left(\frac{3}{x^2} + 1\right)$$

somit also ebenfalls positiv. Wir haben also bei (14b) $y'' > 0$, die Kurve ist konvex und steigt von einem positiven Werte y für $\omega = \omega_1$ an.

Zwei derartige Kurven können sich aber in höchstens 2 Punkten schneiden, deren Abszissen die Wurzeln von (12) sind: ω_3 und ω_4 w·z·b·w. Die wirkliche Existenz der Wurzeln hängt wesentlich vom Kleinheitsgrade von k und β ab. Je kleiner k und β sind, um so flacher wird (14b) und nähert sich mehr und mehr der Geraden $y = 0$. ω_3 und ω_4 rücken dann auseinander, so daß ω_1 und ω_2 als Grenzlagen der Wurzeln erscheinen. Ist β sehr klein und steigt (14b) nicht zu rasch an, so wird ω_3 nahe ω_1 liegen.

Kehren wir nun zum Widerstand w, betrachtet als Funktion von ω, zurück[1]), so nimmt also w mit ω zunächst ab, hat ein Minimum und darauf ein Maximum bei den Punkten B bzw. C', um von nun an mit wachsendem ω weiter abzunehmen, falls Gleichung (12) zwei reelle positive Wurzeln hat (s. Bild 4). Existieren diese Wurzeln nicht, indem z. B. die notwendige Bedingung (13) nicht erfüllt ist, so fällt w mit wachsendem ω monoton ab.

[1]) Wir betrachten hier ω als Funktion von w; ebenso hätten wir auch die Spannung P als unabhängige Variable wählen können, indem wir die Tourenzahl durch Variation der Spannung und nicht des Widerstandes regeln. Das Ergebnis ist rechnerisch das gleiche; denn die Größe k ist dem Felde H der Feldmagnete und somit auch P proportional, so daß in unseren Gleichungen es nur auf die Variation von $\frac{P^2}{w}$ ankommt. Wesentlich für das Folgende ist, daß man als unabhängige Variable eine Größe wählt, deren Wahl man fest in der Hand hat, was von der Stromstärke nicht gilt, da sie nach (1) noch von φ abhängt.

3. Schlußfolgerung auf Instabilität und Hysterese. Denken wir uns nun, von hohem Widerstande ausgehend, diesen allmählich ausgeschaltet, so läuft ω zunächst auf dem Aste A über B' bis B — wir betrachten also den Fall, wo ω_3 und ω_4 vorhanden sind — wird aber hier von B nach C übergehen müssen und dann auf dem zweiten Aste sich von C bis D bewegen. Der Übergang von B nach C geschieht offenbar dadurch, daß die Tourenzahl in B instabil wird und die von uns nicht betrachteten Abklingungsglieder, die ja den Übergang von einem stationären Zustand zum andern vermitteln, ein mit der Zeit rapid anwachsendes Verhalten zeigen. Schalten wir nun aber wieder Widerstand ein, so läuft ω auf dem zweiten Ast von D über C bis C' und „springt" hier nach dem Punkte B' des ersten Astes über, um nach A zurückzukehren. Die Extrema B und C' sind somit die kritischen Punkte, B C und B' C' die kritischen Intervalle. Zugleich sieht man, daß mit der Instabilität eine Hysterese verknüpft ist: auf dem Hinwege wird die Kurve A B' B C D auf dem Rückwege D C C' B' A durchlaufen. Die Hystereseschleife ist B' B C C'. — Diese Hysterese ist von der des Ferromagnetismus insofern verschieden, als sie an ein bestimmtes Intervall für w gebunden ist: $w(\omega_3)$, $w(\omega_4)$. Nach (1) folgt noch, daß an den kritischen Stellen die Stromstärke sinkt bzw. steigt.

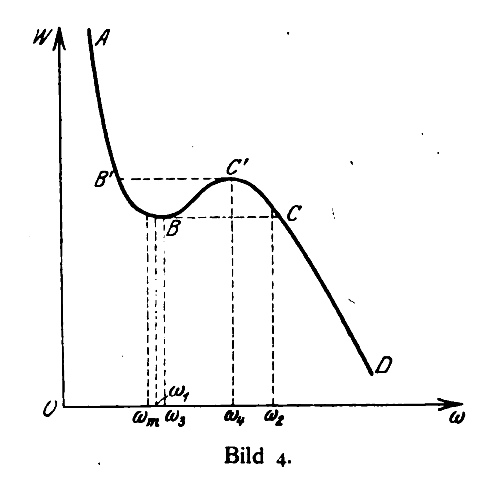


Bild 4.

Daß nun auch die Kurve, die die Abhängigkeit der Tourenzahl von der in Arbeit umgesetzten elektrischen Energie $E = P \cdot i - \iota^2 w$ oder:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m^2 R^2 \alpha \cdot \omega^6}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2} + \beta \omega^2$$

solche kritische Punkte und Intervalle, ferner eine Hysterese zeigen muß, ist klar. Man bekommt leicht eine Vorstellung von der Gestalt dieser Kurve, wenn man bedenkt, daß sie innerhalb der Parabel $y = \beta \omega^2$ verläuft, ferner daß

$$E = \frac{1}{2} \alpha A^2 \omega^2 + \beta \omega^2$$

ist; sie kann unter Umständen auch Maxima und Minima haben. Die Untersuchung ist der obigen ganz analog; wir unterdrücken sie daher.

Hat aber die Gleichung (12) keine positiven verschiedenen Wurzeln, so fallen die Instabilitäts- und damit die Hystereseerscheinungen weg.

Praktisch lagen bei mir nun folgende Daten vor:

$$M = 6{,}76 \cdot 10^4\ g; \quad T = 5 \cdot 10^4\ g\,cm^2; \quad m = 310\ g; \quad R = 4{,}5\ cm; \quad \omega_m = 5{,}6;$$
$$A_m = 0{,}17\ cm; \quad \varepsilon = 2{,}12 \cdot 10^6\ g \cdot sec^{-2}. \quad \alpha^2 = 2{,}11 \cdot 10^9\ (g \cdot sec^{-1})^2.$$

(ε und α^2 wurden aus 11 berechnet.) Aus (8) folgt dann



$$\sqrt{d^2+e^2} = \frac{1}{2}\,\frac{m^2 R^2 \omega^4}{\left(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2\right)^{1/2}\left((2\omega T)^2 + \left(\frac{k^2}{w}+\beta\right)^2\right)^{1/2}} < \frac{A_m}{4}\cdot\frac{m\cdot R}{T}\cdot\omega$$

$$< 0{,}0015\,\omega.$$

Die Schwankung ist also wirklich recht gering. Die Höchsttourenzahlen waren etwa 30 p·sec. Da ferner $P = 110\ \text{Volt} = \frac{110}{300}\ \text{abs}$; $k < \frac{110}{300\cdot\omega} < \frac{110}{300\cdot 30\cdot 2\pi}$; ferner β sicherlich ebenfalls sehr klein und $\frac{\alpha^2}{M\varepsilon} = 1{,}47\cdot 10^{-2}$, so waren alle Bedingungen erfüllt, unter denen Instabilität eintritt. Da überdies die Extreme der Amplituden der Längs- und Torsionsschwingungen weit auseinander lagen, so dürfen wir die oben entwickelten Formeln auf die Umgebung der Maxima anwenden. Wir finden auch in der Tat alles in schönster Übereinstimmung: Kurz nach dem Maximum der erzwungenen Schwingung kam ein kritischer Punkt, bei welchem die Tourenzahl nahe auf das Doppelte stieg; wollte man diese wieder erniedrigen, so mußte man merklich mit dem Widerstande zulegen, bis beim zweiten kritischen Punkte die Tourenzahl wieder zurückging. Was die Hysterese angeht, so ist es klar, daß die Vielheit der Eigenschwingungen die Erscheinung komplizieren muß. Immerhin erkennt man in Bild 1 die Tendenz der Kurve, für den Rückweg nach einem kritischen Intervall sich der Hinwegkurve zu nähern.

Zusammenfassung.

1. Das gekoppelte gedämpfte System (2), (3) läßt sich zwar in geschlossener Form nicht integrieren; aber bei genügend groß gewähltem Trägheitsmoment läßt sich die Lösung ausreichend genau durch (4) und (6) darstellen, wenn man den stationären Teil derselben allein betrachtet.

2. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Motors schwankt im stationären Teil um weniger als $\frac{A_m}{4}\cdot\frac{m\cdot R}{T}\cdot\omega$ um den Mittelwert ω.

3. Zwischen dem Mittelwert ω und dem Widerstand w besteht eine algebraische Beziehung 6. Grades; w als Funktion von ω betrachtet kann unter der notwendigen Bedingung $2\cdot(3-\sqrt{5})M\varepsilon - 3\alpha^2 > 0$ zwei Extrema haben (nämlich dann, wenn Gleichung (12) zwei positive Wurzeln hat), die Punkte der Instabilität darstellen.

4. Diese Instabilitätsstellen bedingen eine Hysterese, die an ein bestimmtes, durch jene festgelegtes Intervall geknüpft ist.

5. Hat Gleichung (12) keine positiven Wurzeln, wofür hinreichend ist, daß $2(3-\sqrt{5})M\varepsilon - 3\alpha^2 \leq 0$, so fallen Instabilitätsstellen und Hysterese weg.

Herrn Geheimrat Sommerfeld bin ich für das lebhafte Interesse, das er am Fortgang der Arbeit nahm, für zahlreiche Winke und Ratschläge zu großem Dank verpflichtet.



Über die mechanischen Wirkungen des plötzlichen Kurzschlußstromes von Synchronmaschinen.

Von

J. Biermanns, AEG-Hochspannungsfabrik.

1. Allgemeines.

Die Theorie des plötzlichen Kurzschlusses von Wechselstromerzeugern ist durch eine Reihe von in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten soweit gefördert worden, daß man sich ein genügend klares Bild von dem Wesen des sich abspielenden magnetischen Ausgleichsvorganges machen kann. Derselbe setzt unter gewaltigen Stromstößen ein und vermittelt den Übergang vom ursprünglichen Betriebszustand der Maschine zu dem des stationären Kurzschlusses. Dabei beschränken sich die Überstromerscheinungen nicht nur auf die Statorwicklung, auch die Erregerwicklung wird vom Überströmen heimgesucht und zwar handelt es sich hier um einen Gleichstrom, der den ursprünglichen Zustand — also das ursprüngliche magnetische Feld aufrechtzuerhalten sucht und den man als den Träger des magnetischen Feldes ansehen kann. Diesem Gleichstrom entspricht infolge der Rotation des Induktors im Stator ein Wechselstrom, das sogenannte Wechselstromglied des plötzlichen Kurzschlußstromes, und es ist nach dem Gesagten einleuchtend, daß dessen Lebensdauer in erster Linie durch die Konstanten der Erregerwicklung bestimmt wird. Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, lagert sich je nach dem Zeitpunkt des Kurzschlusses dem Statorstrom noch ein Gleichstrom, das sogenannte Gleichstromglied des plötzlichen Kurzschlußstromes, und dementsprechend dem Erregerstrom ein Wechselstrom über, und zwar richtet sich die Lebensdauer dieses Strompaares in erster Linie nach den Eigenschaften der Statorwicklung.

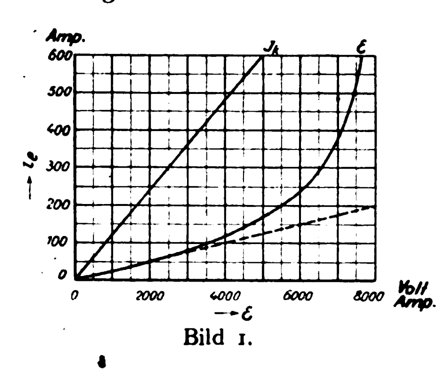


Bild 1.

Über die quantitative Seite des Problems läßt sich folgendes sagen. Das Wechselstromglied des plötzlichen Kurzschlußstromes übertrifft den stationären Kurzschlußstrom im selben Maße, wie die Leerlaufinduktivität der Statorwicklung größer ist als deren Kurzschlußinduktivität. Dabei ist zu beachten, daß die Kurzschlußinduktivität der Statorwicklung die Streuung des Induktors einschließt und daß in den ersten Augenblicken des plötzlichen Kurzschlusses wenigstens bei Langsamläufern infolge des anormalen Verlaufes der magnetischen Kraftlinien sowohl die Stator- als die Induktor-Streureaktanz tiefer liegt als beim stationären Kurzschluß. Aus demselben Grunde kann das Gleichstromglied, das theoretisch höchstens gleich der Amplitude des Wechselstromgliedes werden könnte, wesentlich höhere Werte annehmen. Die Theorie lehrt, daß sowohl Gleich- als Wechselstromglied nach einem einfachen Exponentialgesetz absterben, indes werden auch hier die Verhältnisse durch den im Verlaufe des plötzlichen Kurzschlusses sich ändernden Sättigungszustand der Maschine und durch Wirbelstrombildung im massiven Eisen des Induktors getrübt. Die letztere Erscheinung beeinflußt, wie leicht einzusehen, insbesondere das Gleichstromglied und bewirkt, daß dieses bei Turbogeneratoren etwa 10mal, bei Langsamläufern etwa 20 ÷ 30mal so stark gedämpft ist als das Wechselstromglied des plötzlichen Kurzschlußstromes.

Wir wollen uns diese Verhältnisse an einem Beispiel klar machen und dabei gleichzeitig die Ergebnisse der Theorie mit denen des Experiments in einem Falle

vergleichen. Als Versuchsobjekt stand mir ein 12poliger Drehstromgenerator von 11000 kVA, 6600 Volt, 50 Perioden zur Verfügung, von dem das Bild 1 eine Leerlauf- und Kurzschlußcharakteristik zeigt. Nach den üblichen Methoden berechnete sich ferner eine auf den stationären Kurzschlußstrom und ungesättigten Zustand bezogene Statorstreuung von 7,6%, die, auf normale Sättigung bezogen, sich auf 14% erhöht. Die Polstreuung bei Leerlauf berechnet sich ferner zu 18%, mithin ist der totale Blondelsche Streufaktor der Maschine:

$$\tau = 1 - \frac{1}{(1 + \tau_s) \cdot (1 + \tau_i)} = 1 - \frac{1}{1{,}14 \cdot 1{,}18} = 0{,}26$$

und damit berechnet sich die Amplitude des Wechselstromgliedes des plötzlichen Kurzschlußstroms zu:

$$J_w = \frac{J_K}{\tau} = \frac{2600}{0{,}26} = 10000 \text{ Amp}_{eff}.$$

Aus der Beziehung

$$L_i = \frac{z_i \cdot \Phi_i}{i_e} \cdot 10^{-8}$$

(z_i = Windungszahl, Φ = totaler Kraftlinienfluß, i_e = Erregerstrom) ergibt sich die

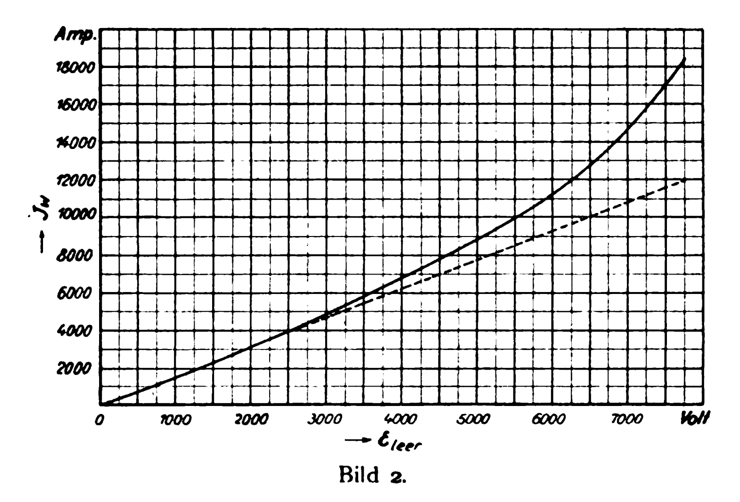


Bild 2.

Leerlaufinduktivität eines Poles des Induktors bei normaler Sättigung zu 0,114 Henry und da der auf einen Pol umgerechnete Ohmsche Widerstand des gesamten Erregerkreises 0,022 Ohm beträgt, errechnete sich die Zeitkonstante $\frac{L_i}{r_i}$ des Erregerkreises zu 5,2. Die Zeitkonstante der Statorwicklung ergibt sich auf demselben Wege zu $\frac{L_s}{r_s} = 1{,}2$ beide Werte gelten für normale Sättigung. Die Theorie (wir denken uns die Wirbelströme im massiven Eisen des Induktors in ihrer Wirkung durch eine Dämpfungswicklung vom gleichen Kupfergewichte wie die Erregerwicklung ersetzt) ergibt nun folgende Gleichung für den Verlauf des plötzlichen Kurzschlußstromes

$$i = J_w \cdot (e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t} \cdot (J_w - J_K) \cdot \cos \omega \cdot t) - J_K \cdot \cos \omega \cdot t,$$

wo

$$\alpha = \frac{r_i}{L_i \cdot \tau} \text{ und } \beta = \frac{r_s}{L_s \cdot \tau}.$$

Sehen wir zunächst vom Gleichstromglied ab und führen wir Effektivwerte ein, so müßte also in unserm Beispiel der plötzliche Kurzschlußstrom folgendes Gesetz befolgen:



$$i = 7400 \cdot e^{-\alpha \cdot t} + 2600,$$

wo α infolge der allmählich abnehmenden Sättigung von anfänglich 1,3 allmählich auf 0,74 sinkt.

Hören wir, wie das tatsächliche Verhalten unserer Maschine mit der Theorie in Einklang steht. Bild 2 zeigt die aus einer Reihe von Oszillogrammen ermittelten Effektivwerte des Wechselstromgliedes in Abhängigkeit von der Klemmenspannung, bei welcher der plötzliche Kurzschluß erfolgte. Nach der Theorie wäre eigentlich eine gerade Linie zu erwarten, die tatsächlich erhaltene Kurve biegt jedoch mit wachsender Sättigung nach oben ab und es liegt dies eben daran, daß die Streureaktanzen mit wachsender Sättigung abnehmen, ohne daß man jedoch imstande wäre, hier den näheren Zusammenhang zahlenmäßig vorauszusagen. Man kann nur soviel sagen, daß Langsamläufer, bei denen die Nuten- und Zahnstreuung erheblicher ins Gewicht fällt, stärker zu dieser Erscheinung neigen als Schnelläufer. In Bild 2 ist eine gerade Linie eingezeichnet, welche der anfänglichen Neigung der ausgezogenen Kurve folgt, und diese schneidet bei 6600 Volt die Ordinatenachse bei einer Stromstärke bei 10000 Amp. genau wie es die Theorie verlangt. Der tatsächliche Kurzschlußstrom beträgt 13000 Amp., die Streureaktanzen sinken infolge der Sättigungserscheinungen also um 22%, und es ist infolgedessen auch der anfängliche Wert der Dämpfungsfunktion α um 30% auf 1,7 zu erhöhen.

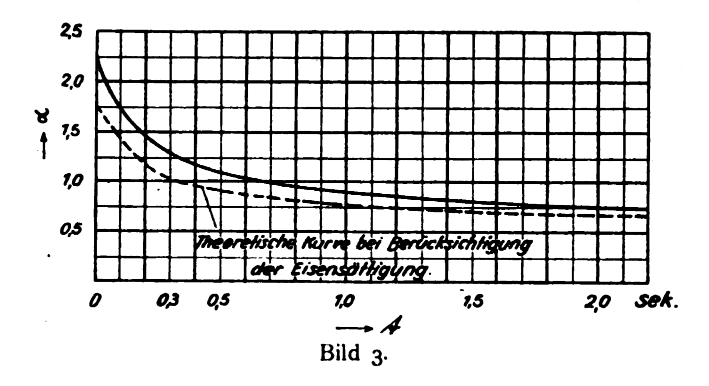


Bild 3.

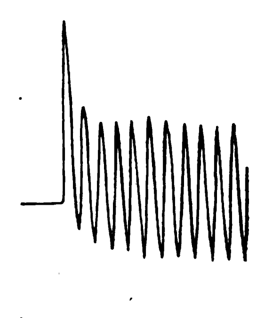

Bild 4.

Bild 3 zeigt den an der betrachteten Maschine festgestellten zeitlichen Verlauf der Dämpfungsfunktion α, sie stimmt, wie man sieht, recht gut mit dem vorausberechneten Werte überein und ist nur im Anfang etwas höher, was auf die Wirbelstrombildung im Induktor zurückzuführen ist. Bei einer Maschine ohne Sättigung und ohne Wirbelströme würde α einen konstanten Wert, und zwar im vorliegenden Falle 0,74 besitzen, welchem Wert sich die tatsächliche Dämpfungsfunktion ja auch asymptotisch nähert.

Für das Gleichstromglied verlangt die Theorie im vorliegenden Fall eine Höhe von $\sqrt{2} \cdot 1300 = 18500$ Amp. und eine Dämpfungskonstante $\beta = 7{,}3$. Die angegebene Stromstärke wird von unserer Maschine bei der normalen Sättigung nur wenig überschritten, dagegen besitzt die Dämpfungsfunktion β den außerordentlich hohen konstanten Wert 30; diese Überschreitung des theoretischen Wertes erklärt sich indes zwanglos durch die starke Wirbelstrombildung im massiven Eisen des Induktors. Daß bei höheren Sättigungen das Gleichstromglied während der ersten Periode extrem hohe Werte annehmen kann, zeigt das Oszillogramm Bild 4, das von unserer Maschine bei einer Erregung auf 7600 Volt aufgenommen wurde; man sieht indes auch hier, daß das Gleichstromglied bereits nach wenigen Perioden vollständig verschwunden ist.

Nachdem wir uns nun Klarheit über die qualitativen und quantitativen Verhältnisse beim plötzlichen Kurzschluß von Synchronmaschinen verschafft haben,



wollen wir zum eigentliche Thema unserer Arbeit, nämlich zu den vom plötzlichen Kurzschlußstrom ausgelösten mechanischen Kraftwirkungen übergehen. Dabei wird uns in erster Linie die Frage beschäftigen, ob hier das Gleichstromglied trotz seiner gegenüber dem Wechselstromglied starken Dämpfung von wesentlichem Einfluß ist, oder ob seine Wirkung infolge seiner kurzen Lebensdauer zu vernachlässigen ist. Hier scheinen Zweifel um so mehr gerechtfertigt, als mit wachsenden Widerständen im äußeren Stromkreis, also mit wachsender Entfernung der Kurzschlußstelle von der Maschine die Dämpfung des Gleichstromgliedes weiterhin zunimmt, während die des Wechselstromgliedes nicht unbeträchtlich abnimmt, so daß die im vorhergehenden angegebenen Erfahrungswerte für das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ noch beträchtlich überschritten werden können. Daß die Stromwärmewirkungen des Gleichstromgliedes sehr unbedeutend sind, soll vorher noch kurz gezeigt werden.

2. Die Stromwärme des Gleichstromgliedes.

Wir gehen aus von der Gleichung des plötzlichen Kurzschlußstromes, die sich auch schreiben läßt:

$$i = -J_K \cdot \left(\frac{1-\tau}{\tau} \cdot e^{-\alpha \cdot t} + 1\right) \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{J_K}{\tau} \cdot e^{-\beta \cdot t}. \tag{1}$$

Betrachten wir, wie es die Theorie der ungesättigten Maschine verlangt, α und β als Konstanten und nehmen wir an, was praktisch stets zutrifft, daß α^2 und β^2 klein sind gegenüber ω^2, so läßt sich der Effektivwert des plötzlichen Kurzschlußstromes in einfacher Weise berechnen und die Auswertung des Integrals

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} i^2 \cdot dt = i_{eff}$$

liefert folgenden Ausdruck:

$$i_{eff} = \frac{J_K}{\tau} \sqrt{\left((1-\tau) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \tau\right)^2 + \left(\sqrt{2} \cdot e^{-\beta \cdot t}\right)^2}. \tag{2}$$

Bei der Berechnung der erzeugten Stromwärme wollen wir, um besser vergleichen zu können, annehmen, die Maschine habe keinen stationären Kurzschlußstrom, so daß also der gesamte Kurzschlußstrom auf den Wert null sinkt. Die gesamte, erzeugte Stromwärme ist dann:

$$W = r \cdot \int_0^{\infty} i_{eff}^2 \cdot dt = J_K^2 \cdot \frac{r}{\tau^2} \cdot \int_0^{\infty} (e^{-2\alpha \cdot t} + 2 \cdot e^{-2\beta \cdot t}) \cdot dt,$$

woraus

$$W = J_K^2 \cdot \frac{r}{\tau^2} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \alpha} + \frac{1}{\beta}\right). \tag{3}$$

Da in allen Fällen β groß gegenüber α, lehrt die abgeleitete Gleichung, daß der Beitrag des Gleichstromgliedes zu der insgesamt erzeugten Stromwärme nur geringfügig ist.

3. Die Durchbiegung der von Gleichstrom durchflossenen Schiene.

Zwei parallel geführten Schienen mit rechteckförmigem Querschnitt, die in gewissen Abständen auf Isolatoren befestigt sind, seien von einem Gleichstrom konstanter Stärke durchflossen. Bilden die betrachteten Schienen Hin- und Rückleitung ein und desselben Stromkreises, so üben sie magnetische Abstoßungskräfte aufeinander aus, unter deren Einfluß sie sich in irgend einer Form ausbiegen werden. Diese Ausbiegung erfolgt zweifellos symmetrisch zu den Befestigungsstellen der Schienen; da sie hier auf beiden Seiten eines Stützpunktes in gleicher Richtung er-



folgt, so können wir für die weitere Untersuchung die Schienen als beiderseitig eingespannte Träger mit gleichmäßig verteilter Belastung betrachten. Die Feststellung der Größe dieser gleichmäßigen Belastung sei das nächste Ziel unserer Rechnung, wobei wir von Bild 5 ausgehen, das links einen Längsschnitt und rechts einen Querschnitt durch die betrachteten Schienen von der freien Länge l, der Höhe h und dem Abstande a zeigt. Die Schienen liegen mit der breiten Seite gegeneinander, ihre Dicke sei verhältnismäßig gering, so daß wir sie für die folgenden Rechnungen vernachlässigen können.

Nach Maxwell ist die Selbstinduktion eines Stromkreises, der aus zwei unter sich gleichen, irgendwie geformten Leitern besteht,

$$L = 4 \cdot (n_{12} - n_{11}), \tag{4}$$

wo

$$n_{12} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h dx \int_0^h \ln r \cdot dy \tag{5}$$

der sogenannte logorithmische Abstand zwischen zwischen den beiden Leitern und

$$n_{11} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h dx \int_0^h \ln r \cdot dx' \tag{6}$$

der mittlere logorithmische Abstand eines jeden der beiden Leiter von sich selbst ist. dx bzw. dx' sind hierin Oberflächenelemente ein und desselben Leiters, während dy ein Oberflächenelement des zweiten Leiters ist, r ist ferner die Entfernung zwischen dx und dx' bzw. dx und dy. In unserem Falle ist nun (Bild 5):

$$r^2 = a^2 + (x - y)^2,$$

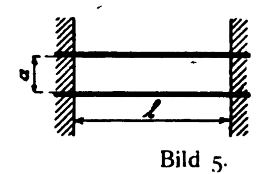




Bild 5.

oder wenn wir $x - y$ gleich einer neuen Variabeln z setzen,

$$r^2 = a^2 + z^2,$$

und damit

$$\ln r = \frac{1}{2} \cdot \ln(a^2 + z^2) \cdot$$

Das Integral 5 läßt sich nun schreiben:

$$n_{12} = -\frac{1}{2 \cdot h^2} \cdot \int_0^h dx \int_x^{x-h} \ln(a^2 + z^2) \cdot dz$$

oder, da

$$\int \ln(a^2 + z^2) \cdot dz = z \cdot \ln(a^2 + z^2) - 2 \cdot z + 2 \cdot a \cdot \operatorname{arctg} \frac{z}{a},$$

$$n_{12} = \frac{1}{2 \cdot h^2} \cdot \Big[\int_0^h x \cdot \ln(a^2 + x^2) \cdot dx - \int_0^h 2x \cdot dx + \int_0^h 2a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \cdot dx -$$
$$- \int_0^h (x - h) \cdot \ln\left(a^2 + (x - h)^2\right) \cdot dx + \int_0^h 2 \cdot (x - h) \cdot dx - \int_0^h 2a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - h}{a} \cdot dx \Big] \cdot$$

Es ist aber

$$\int x \cdot \ln(a^2 + x^2) \cdot dx = \frac{a^2 + x^2}{2} \cdot \ln(a^2 + x^2) - \frac{x^2}{2},$$

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2,$$

somit wird

$$n_{12} = \frac{a^2 + h^2}{2h^2} \cdot \ln(a^2 + h^2) - \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{a}{h} \cdot \operatorname{arctg} \frac{h}{a} - \frac{a^2}{h^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) = \frac{a^2}{2 \cdot h^2} \cdot \ln a^2 \cdot \tag{7}$$

Indem wir a = 0 setzen, folgt hieraus:

$$n_{11} = \frac{1}{2} \cdot \ln h^2 - \frac{3}{2} \tag{8}$$

und wir erhalten folgenden Wert für den Selbstinduktionskoeffizienten:

$$L = 2 \cdot \left[\ln \frac{a^2 + h^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} \cdot \ln \frac{a^2 + h^2}{a^2} + 4 \cdot \frac{a}{h} \cdot \operatorname{arctg} \frac{h}{a}\right]. \tag{9}$$

Die abstoßende Kraft zwischen den beiden Schienen ist pro Längeneinheit

$$P_i = k \cdot i^2, \tag{10}$$

wo i die Stromstärke in absoluten Einheiten und nach einem bekannten Satz

$$k = \frac{dL}{da}, \tag{11a}$$

also gleich der Zunahme der Selbstinduktivität, die eintritt, wenn die Schienen sich in Richtung der Abstoßungskraft um die Längeneinheit auseinander bewegen. Mit Rücksicht auf Gleichung (9) wird nun, wenn wir statt in Dynen die Abstoßungskraft in kg messen und als Einheit der Stromstärke das Ampere wählen:

$$k = \frac{4{,}08 \cdot 10^{-8}}{h} \cdot \left[2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \cdot \ln \frac{a^2 + h^2}{a^2}\right]. \tag{11b}$$

Zur Berechnung der unter dem Einfluß der Abstoßungskraft erfolgenden Durchbiegung der beiden Schienen gehen wir aus von der Differentialgleichung der elastischen Linie, welche für eine der beiden Schienen bekanntlich lautet:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x. \tag{12a}$$

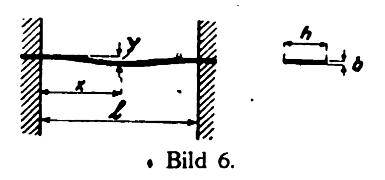


Bild 6.

Hierin ist E der nur vom Material der Schiene abhängende Elastizitätsmodul, J das nur von der Querschnittsform abhängende Trägheitsmoment, wobei im vorliegenden Falle (Bild 6)

$$J = \frac{h \cdot b^3}{12},$$

y die in der Entfernung x vom Auflagepunkt erfolgte Durchbiegung und endlich M_x das in dieser Entfernung wirkende Biegungsmoment, wo

$$M_x = -\int dx \int P_i \cdot dx. \tag{12b}$$

Durch Vereinigung der Gleichung (12) und zweimalige Differentiation nach x folgt, da P_i unabhängig von x, was bei kleinen Durchbiegungen angenähert zutrifft:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot P_i. \tag{13}$$

Die so erhaltene Differentialgleichung läßt sich ohne weiteres integrieren, das Ergebnis lautet

$$y = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot x^2 + A_4 \cdot x^3 + \frac{P_i}{E \cdot J} \cdot x^4, \tag{14}$$

wo die Integrationskonstanten $A_1 \div A_4$ aus den Grenzbedingungen, wonach wegen der Einspannung an beiden Enden

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = l, \tag{15}$$

zu bestimmen sind. Die Ausrechnung liefert

$$y = \frac{E \cdot J}{P_i} \cdot \frac{l^4}{24} \cdot \left[\frac{x^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]. \tag{16}$$

Die in der Schienenmitte erfolgende größte Durchbiegung ergibt sich mit $x = \frac{l}{2}$ zu



$$y_{max} = \frac{P_i}{E \cdot J} \cdot \frac{l^4}{384}, \qquad (17)$$

der Auflagedruck an den Stützpunkten endlich ist, da die Schiene sich nach beiden Seiten fortsetzt,

$$P_a = P_i \cdot l. \qquad (18)$$

4. Die freien Schwingungen der beiderseitig eingespannten Schiene.

Die Betrachtungen des vorigen Abschnittes waren, da sie sich nur auf den Ruhezustand bezogen, von großer Einfachheit. Sie gelten dafür aber auch nur für den allereinfachsten Fall und würden uns beispielsweise bereits im Stich lassen, wenn wir uns fragten, welche mechanischen Vorgänge sich beim plötzlichen Einschalten des Gleichstromes auf der Schiene abspielen würden. Dies rührt daher, daß wir bisher die bei nennenswerten Bewegungen der Schiene auftretenden Massenbeschleunigungskräfte vernachlässigten, die zu den äußeren Kräften zu addieren sind. Lassen wir diese Beschränkung fallen, so ist die Summe der in irgend einem Querschnitt der Schiene angreifenden Kräfte

$$P_x = P_i - \frac{g}{981} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2},$$

wo g das Gewicht der Schiene pro Längeneinheit in kg ist, und an Stelle der Gleichung (13) erhalten wir die folgende lineare partielle Differentialgleichung:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P_i - \frac{g}{981} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad (19)$$

der, so lange wir Längs- und Drehbewegungen ausschließen, jede Bewegung der Schiene gehorcht. Da die Differentialgleichung linear ist, dürfen wir die freien und die erzwungenen Schwingungen gesondert berechnen, und nach bekannter Regel erhalten wir die Differentialgleichung der freien Biegungsschwingungen, indem wir in Gleichung (19) $P_i = 0$ setzen. Dabei wollen wir gleich eine Vernachlässigung gutmachen, die zwar für die erzwungenen Schwingungen belanglos ist, uns jedoch ein falsches Bild von dem Charakter der freien Schwingungen geben würde. Es sind dies die Reibungsverluste, die wir durch Einführung eines Koeffizienten der Reibung R[1]) berücksichtigen werden, und mit dem die Differentialgleichung der freien Schwingungen lautet:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{g}{981} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \qquad (29)$$

Diese Gleichung läßt sich nun durch eine Substitution wesentlich vereinfachen. Führen wir nämlich eine neue Variable Y ein, wo

$$y = Y \cdot e^{-\gamma \cdot t}$$

und

$$\gamma = \frac{981}{2} \cdot \frac{R}{g} \qquad (21a)$$

so folgt aus Gleichung (20):

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + a^4 \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b \cdot Y = 0, \qquad (20a)$$

mit

$$a = \sqrt[4]{\frac{g}{981 \cdot E \cdot J}}$$

und

$$b = -\frac{981}{4} \cdot \frac{R^2}{g \cdot E \cdot J}. \qquad (21b)$$

[1]) Wir machen dabei die ziemlich willkürliche Annahme, daß die hemmende Kraft proportional der Geschwindigkeit sei.

Nun setzen wir versuchsweise

$$Y = X \cdot \sin(n \cdot t + \lambda), \tag{22}$$

und führen diesen Wert in die Differentialgleichung (20a) ein, X ist hierbei eine Funktion des Ortes allein, n und λ sind willkürliche Konstanten. Unser Ansatz (22) war richtig, denn die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{d^4X}{dx^4} - (a^4 \cdot n^2 + b) \cdot X = 0, \tag{23}$$

woraus x leicht zu ermitteln ist. Setzen wir nämlich

$$X = A \cdot e^{m \cdot x},$$

so liefert die Gleichung (23) nach Einsetzen dieses Wertes die charakteristische Gleichung

$$m^4 = a^4 \cdot n^2 + b, \tag{23a}$$

die die folgenden 4 Wurzen besitzt:

$$m_1 = + a \cdot \sqrt[4]{n^2 + \frac{b}{a^4}}, \qquad m_2 = - a \cdot \sqrt[4]{n^2 + \frac{b}{a^4}},$$

$$m_3 = + j \cdot a \cdot \sqrt[4]{n^2 + \frac{b}{a^4}}, \qquad m_4 = - j \cdot a \cdot \sqrt[4]{n^2 + \frac{b}{a^4}}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Die Ortsfunktion X hat somit, wenn wir Hyperbelfunktionen einführen, die folgende Form:

$$X = A_1 \cdot \cos m \cdot x + A_2 \cdot \sin m \cdot x + A_3 \cdot \mathfrak{Cof}\, m \cdot x + A_4 \cdot \mathfrak{Sin}\, m \cdot x, \tag{24}$$

wo

$$m = a \cdot \sqrt[4]{n^2 + \frac{b}{a^4}}. \tag{24a}$$

Mit den Gleichungen (21), (22) und (24) haben wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (20) unseres Problems in Händen, unsere weitere Aufgabe ist es, die noch willkürlichen Integrationskonstanten n, λ und $A_1 \div A_4$ den speziellen Bedingungen des Problems zu unterwerfen Da wir n alle möglichen Zahlenwerte beilegen können, können wir im jetzigen Stadium der Untersuchung nur sagen, daß sich auf der Schiene alle möglichen Schwingungen gleichzeitig ausbilden können, ohne sich gegenseitig zu stören, und daß diese zeitlich nach einer gedämpften harmonischen Funktion, räumlich nach einer Funktion verlaufen, die die Gleichung (24) angibt. Wir werden sehen, daß die Grenzbedingungen nur mit ganz bestimmten Werten von n in Einklang zu bringen sein werden, daß diese also die Eigenschwingungszahlen der Schiene und damit auch die Wellenlängen zu berechnen gestatten, sie legen ferner auch die räumliche Phase der Schwingungen fest. Die zeitliche Phase der Schwingungen und deren Amplitude dagegen hängt nur von dem Anfangszustand ab, mit dem unsere Schiene in den zu untersuchenden Ausgleichsvorgang eintritt.

Führen wir die durch die Gleichung (15) gegebenen Grenzbedingungen in die Gleichung (24) ein, so ergeben sich nacheinander die folgenden Beziehungen:

$$A_1 + A_3 = 0,$$
$$A_2 + A_4 = 0,$$
$$A_1 \cdot \cos ml + A_2 \cdot \sin ml + A_3 \cdot \mathfrak{Cof}\, ml + A_4 \cdot \mathfrak{Sin}\, ml = 0,$$
$$- A_1 \cdot \sin ml + A_2 \cdot \cos ml + A_3 \cdot \mathfrak{Sin}\, ml + A_4 \cdot \mathfrak{Cof}\, ml = 0,$$

mit deren Hilfe weiterhin folgt:

$$X = A \cdot \left[\mathfrak{Cof}\, m \cdot x - \cos m \cdot x - \frac{\mathfrak{Cof}\, ml - \cos ml}{\mathfrak{Sin}\, ml - \sin ml} \cdot (\mathfrak{Sin}\, m \cdot x - \sin m \cdot x) \right] \tag{25}$$

und

$$\frac{\mathfrak{Cof}\, ml - \cos ml}{\mathfrak{Sin}\, ml + \sin ml} = \frac{\mathfrak{Sin}\, ml - \sin ml}{\mathfrak{Cof}\, ml - \cos ml}.$$

oder

$$\mathfrak{Cos}\, ml \cdot \cos ml = 1. \tag{26}$$

Dies ist eine transzendente Gleichung zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen unserer Schiene, sie hat unendlich viele Wurzeln, die man mit mit der Ordnungszahl wachsender Genauigkeit durch die Beziehung darstellen kann

$$m_\mu \cdot l = \frac{2\mu + 1}{2} \cdot \pi, \qquad \mu = 1, 2, 3 \text{ — — — — }, \tag{26a}$$

wobei für $\mu = 1$ der Fehler bereits kleiner als $\frac{1}{2}$% ist¹).

Wir haben also eine Reihe von unendlich vielen Eigenschwingungen der Schiene, in die sich jeder Bewegungsvorgang derselben im allgemeinen auflösen wird. Umgekehrt können wir somit jeden auf der Schiene sich abspielenden Vorgang aus einer unendlichen Reihe von Eigenschwingungen zusammensetzen, denselben also mathematisch in einen Ausdruck von folgender Form kleiden:

$$y = e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} X_\mu \cdot \sin(n_\mu \cdot t + \lambda_\mu), \tag{27}$$

in dem bis auf eine Integrationskonstante die Ortsfunktion X_μ durch die Gleichung (25) und (26a) vollständig bestimmt ist, während sich das Spektrum der Eigenfrequenzen aus den Gleichungen (23a) und (26a) ergibt. Noch unbestimmt sind die Integrationskonstanten A_μ und λ_μ, die die Amplitude und zeitliche Phase der einzelnen Teilschwingungen festlegen und die erst die Anpassung des Ausdruckes (27) an irgend ein spezielles Problem ermöglichen.

Soweit die strengere Theorie. Praktisch können wir uns in den hier interessierenden Fällen unsere Aufgabe wesentlich erleichtern, und um dies zu zeigen, wollen wir noch etwas näher auf die physikalische Bedeutung der Gleichung (27) eingehen, und wir erinnern uns zu dem Zwecke an die im vorigen Abschnitt betrachtete, von Gleichstrom durchflossene Schiene. Sie sei zunächst stromlos, besitze also ihre ursprüngliche gestreckte Form, und nun werde der Stromkreis plötzlich geschlossen, so daß sich in der Schiene momentan ein Strom bestimmter Stärke einstellt. Die Schiene wird dann unter dem Einfluß der magnetischen Abstoßungskräfte nach einiger Zeit eine Form annehmen, die durch die Gleichung (16) dargestellt wird; es ist jedoch klar, daß sie diese Form nicht plötzlich annehmen kann, da dies infolge der Massenträgheit unendlich große Beschleunigungskräfte erfordern würde. Die einzelnen Teile der Schiene werden sich vielmehr ganz allmählich in Bewegung setzen, haben sie jedoch andererseits die durch die Gleichung (16) geforderte Lage erreicht, so können sie infolge der in ihnen aufgespeicherten kinetischen Energie nicht plötzlich zur Ruhe kommen, sie schießen vielmehr über die Ruhelage hinaus und erreichen diese erst nach Ausführung einer Reihe absterbender Schwingungen. Wir nennen diese Schwingungen die freien Schwingungen der Schiene, und sie sind es, die durch die Gleichung (27) dargestellt werden. Wir denken sie uns dabei dem durch die Gleichung (16) gegebenen Endzustand so übergelagert, daß sie zur Zeit $t = 0$ den Anfangszustand der Schiene ergeben; die Schiene besitzt also zu Beginn des Ausgleichsvorganges ihre gestreckte Form, dann setzen durch den Schaltvorgang angeregt die freien Schwingungen ein, die nach ihrem Absterben den geforderten Endzustand hinterlassen und so einen stetigen Anschluß des Anfangszustandes an den Endzustand ermöglichen.

Mathematisch kommt unsere Aufgabe also darauf hinaus, die Konstanten A_μ und λ_μ der Gleichung (27) so zu bestimmen, daß sie für $t = 0$ eine Funktion gleich der Differenz zwischen Anfangs- und Endzustand ergibt, in unserem Falle also gleich der negativ genommenen durch die Gleichung (16) dargestellten Funktion. Nun denken

¹) Die genauen Werte der drei ersten Wurzeln sind 4,7300; 7,8532; 10,9956.

wir uns, diese Forderung erfülle bereits die Grundwelle der durch die Gleichung (27) dargestellten unendlichen Reihe, diese besitze in dem betrachteten Beispiele also gerade die Form der den Endzustand darstellenden Funktion. Die sämtlichen Oberschwingungen sind dann offenbar überflüssig, diese treten gar nicht erst auf und wir sind imstande, den sich abspielenden Ausgleichsvorgang mit Hilfe der Grundwelle allein zu beschreiben, wodurch sich die zu lösende Aufgabe außerordentlich vereinfacht. Wir werden auch noch in dieser Weise vorgehen können, wenn Grundwelle und Endzustand nur angenähert, also nur ihrem Charakter nach übereinstimmen, denn in diesem Falle können die Oberschwingungen infolge ihrer geringen Amplitude den Ausgleichsvorgang nur wenig beeinflussen, und dann ist noch zu bedenken, daß, da das Schienenmaterial[1]) nicht so vollkommen elastisch ist, wie bei Herleitung der Differentialgleichungen angenommen wurde, die Oberschwingungen sehr schnell absterben werden.

Nun stellen die Gleichungen (16) und (25) zwar nicht ein- und dieselbe Funktion dar, man kann sich aber durch numerische Ausrechnung davon überzeugen, daß die durch beide Gleichungen definierten Funktionen nicht allzusehr voneinander abweichen und wenigstens ihrem allgemeinen Charakter nach übereinstimmen. So

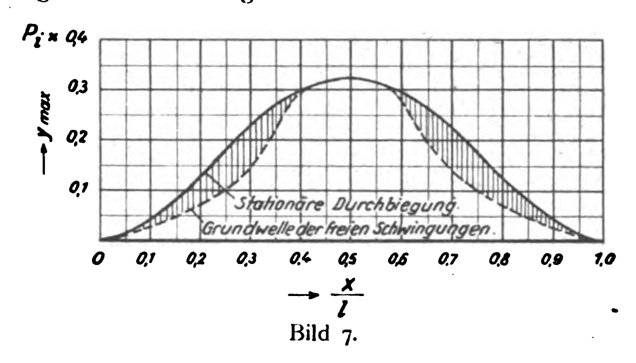


Bild 7.

zeigt Bild 7 stationäre Durchbiegung und Grundwelle der freien Schwingungen einer Kupferschiene mit $h = 10$ cm, $b = 1$ cm, $l = 100$ cm, $s = 8{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³, $R = 0$ und $E = 1{,}15 \cdot 10^6$ kg/cm². Wie man sieht, sind die durch die schraffierte Fläche dargestellten Abweichungen nicht derart, daß eine Vernachlässigung der ohnedies sehr schnell verschwindenden Oberschwingungen mit Rücksicht auf die dadurch erzielte außerordentliche Einfachheit und Übersichtlichkeit der Rechnung nicht gestattet wäre, besonders wenn wir noch bedenken, daß uns weniger die genaue Formänderung der Schiene als vielmehr die für die Beanspruchung der Schiene selbst und der Stützpunkte maßgebende größte Durchbiegung interessiert.

Für diese größte Durchbiegung können wir somit nach Vorhergehendem für den Fall des plötzlich eingeschalteten Gleichstromes schreiben:

$$y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{P_i}{E \cdot J} \cdot \frac{l^4}{384} \cdot \left(1 - e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos n_0 \cdot t\right), \qquad (28)$$

wobei die auftretende Formänderung der Schiene mit genügender Annäherung durch die Gleichung (16) wiedergegeben wird.

5. Erzwungene Schwingungen der beiderseitig eingespannten Schiene.

Wir schreiben die Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen unserer Schiene

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P_i - \frac{g}{981} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (19)$$

[1]) Es wird sich in den uns interessierenden Fällen meist um weiches Kupfer oder Aluminium handeln.



nochmals an, und es sei zunächst P_i eine rein periodische Kraft, die das Zeitgesetz befolgt

$$P_i = P \cdot \sin \omega t. \tag{29}$$

In diesem Falle wird die Schiene zeitlich ganz analog verlaufende Schwingungen ausführen, wir können also ebenfalls setzen

$$y = X \cdot \sin \omega \cdot t \tag{30}$$

und durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Differentialgleichung folgt dann auch

$$\frac{d^4 X}{d x^4} - c^4 \cdot X - d = 0, \tag{31}$$

mit

$$c = \sqrt[4]{\frac{g \cdot \omega^2}{981 \cdot E \cdot J}}$$

und

$$d = \frac{P}{E \cdot J}. \tag{31 a}$$

Wir können also für die Ortsfunktion X wiederum setzen

$$X = A \cdot e^{m \cdot x},$$

wobei die charakteristische Gleichung

$$m^4 = c^4$$

die vier Wurzeln

$$m_1 = + c, \qquad m_2 = - c,$$
$$m_3 = + j \cdot c, \qquad m_4 = - j \cdot c$$

ergibt. Außer dem eben mit $d = 0$ gefundenen allgemeinen Integral besitzt die Gleichung (31) noch ein partikuläres Integral

$$X = -\frac{d}{c^4} = -\frac{981 \cdot P}{g \cdot \omega^2}$$

und die vollständige Lösung der Gleichung ergibt sich somit unter Beachtung der zur Bestimmung sämtlicher Integrationskonstanten A ausreichenden Grenzbedingungen (15) zu

$$X = \frac{981 \cdot P}{g \cdot \omega^2} \cdot \left[\mathfrak{Cos}\, m x - 1 - A_1 \cdot (\mathfrak{Cos}\, m x - \cos m x) - A_2 \cdot \mathfrak{Sin}\, m x - \sin m x) \right], \tag{32}$$

mit

$$A_1 = \frac{\mathfrak{Cos}\, ml - \cos ml + \mathfrak{Cos}\, ml \cdot \cos ml - \mathfrak{Sin}\, ml \cdot \sin ml - 1}{2 \cdot (\mathfrak{Cos}\, ml \cdot \cos ml - 1)},$$

$$A_2 = \frac{\mathfrak{Sin}\, ml \cdot (\cos ml - 1) + \sin ml \cdot (\mathfrak{Cos}\, ml - 1)}{2 \cdot (\mathfrak{Cos}\, ml \cdot \cos ml - 1)}$$

und

$$ml = \sqrt[4]{\frac{g \cdot \omega^2 \cdot l^4}{981 \cdot E \cdot J}}. \tag{33 a}$$

Hier fällt zunächst auf, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingung der Schiene unendlich groß werden kann, und zwar dann, wenn die Gleichung (26) erfüllt ist, wenn also die erzwungene Frequenz gerade mit der Eigenfrequenz der Schiene übereinstimmt. Es handelt sich hier also um eine reine Resonanzerscheinung, die wegen der Reibungsverluste und der unvollkommenen Elastizität des Materials natürlich nicht zu unendlich großen aber zu immerhin für die Schiene und deren Stützpunkte gefährlichen Schwingungen führt.

Die dem Bild 7 zugrunde gelegte Schiene ($h = 10$ cm, $b = 1$ cm, $l = 100$ cm, $s = 8,9 \cdot 10^{-3}$, $E = 1,15 \cdot 10^6$ und $R = 0$) werde mit einer Kreisfrequenz von 314 angestoßen. Die Amplitude der von den einzelnen Punkten der Schiene ausgeführten



erzwungenen Schwingungen ist ebenfalls in das Bild 7 eingetragen, und zwar sind die berechneten Punkte durch Kreise bezeichnet. Sie liegen, wie man sieht, sehr nach an der die stationäre Durchbiegung bezeichnenden Kurve, trotzdem im vorliegenden Falle die Eigenfrequenz der Grundwelle der Schiene mit $n_0 = 231$ schon recht nahe an der aufgedrückten Frequenz $\omega = 314$ liegt. Je weiter Eigenfrequenz und erzwungene Frequenz auseinanderrücken, um so mehr gehen die die räumliche Verteilung der erzwungenen Schwingung bezeichnende Kurve und die der stationären Durchbiegung ineinander über.

Die Differentialgleichung (19) läßt sich auch noch für erzwungene Schwingungen von der Form

$$P_i = P \cdot e^{-\beta \cdot t} \tag{33}$$

integrieren. Mit

$$y = X \cdot e^{-\beta \cdot t} \tag{34}$$

liefert die Differentialgleichung in diesem Falle

$$\frac{d^4 X}{d x^4} + c^4 \cdot X - d = o, \tag{35}$$

wo

$$c = \sqrt[4]{\frac{g \cdot \beta^2}{981 \cdot E \cdot J}}$$

und

$$d = \frac{P}{E \cdot J}. \tag{35a}$$

Die charakteristische Gleichung

$$m^4 = -c^4$$

hat diesmal die 4 Wurzeln

$$m_1 = (1 + j)\,a, \qquad m_2 = (1 - j)\,a,$$
$$m_3 = (-1 - j)\,a, \quad m_4 = (-1 + j)\,a,$$

und die zuletzt angeschriebene Differentialgleichung liefert somit das allgemeine Integral

$$X_1 = (A_1 \cdot \cos m x + A_2 \cdot \sin m x) \cdot e^{m x} + (A_3 \cdot \cos m x + A_4 \cdot \sin m x) \cdot e^{-m x}, \tag{36a}$$

wozu noch das partikuläre Integral

$$X_2 = \frac{981 \cdot P}{g \cdot \beta^2} \tag{36b}$$

zu addieren ist. Die willkürlichen Integrationskonstanten A wären wieder mit Hilfe der Grenzbedingungen (15) zu bestimmen, doch soll die nichts Neues bietende Rechnung hier nicht vorgeführt werden. Sie würde uns mit Hilfe von Zahlenbeispielen lediglich zeigen, daß die durch die Gleichung (36) definierte Funktion in ihrem Verlauf mit der Funktion (16) ebenso übereinstimmt, wie dies bei der Funktion (32) der Fall war. Damit erschöpft sich aber unser Interesse an dieser Rechnung.

6. Die mechanische Wirkung des plötzlichen Kurzschlußstromes von Synchronmaschinen.

Wir haben im vorhergehenden die Differentialgleichung der beiderseitig eingespannten Schiene sowohl für die freien Schwingungen als auch für zwei elementare erzwungene Schwingungsformen gelöst und kamen dabei zu folgendem Ergebnis. Für die bei der stromdurchflossenen Schiene allein in Betracht kommende gleichmäßig über die Länge verteilte äußere Kraft stimmen sowohl die Grundwelle der freien Schwingungen als auch die bei den betrachteten erzwungenen Schwingungen auftretenden Deformierungen ihrem räumlichen Verlauf nach so weit mit der bei einer statischen Belastung auftretenden Durchbiegung überein, daß wir sie für unsere Zwecke mit dieser identifizieren können. Eine aus dieser Festsetzung sich von selbst ergebende Folge ist das Verschwinden sämtlicher Oberschwingungen der Schiene, so daß wir nur noch mit der Grundwelle der freien Schwingungen zu rechnen haben. Im Besitze dieser Erkenntnis können wir nun das uns interessierende Problem für

die weitere Behandlung ganz wesentlich vereinfachen. Wir spalten nämlich die zu bestimmende Funktion in zwei Teile

$$y = X \cdot T, \tag{37}$$

wo der eine Teil eine durch die Beziehung

$$X = 16 \cdot \left[\frac{x^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right] \tag{38}$$

gegebene reine Ortsfunktion ist, die uns nicht weiter mehr interessiert, während der andere Teil eine reine Funktion der Zeit ist, die der für jedes schwingungsfähige mechanische System gültigen gewöhnlichen linearen Differentialgleichung

$$\Theta \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + K \cdot T = \varphi(t) \tag{39}$$

gehorcht. In dieser Gleichung ist Θ das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, K die Direktionskraft und $\varphi(t)$ eine zeitlich veränderliche äußere Kraft, die irgendwie aus Exponential- und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt sein möge; die Reibung wurde zunächst vernachlässigt. Für Gleichstrom, also

$$\varphi(t) = P_i = \text{const}$$

ergibt Gleichung (39) das partikuläre Integral

$$T = \frac{P_i}{K},$$

das für $x = \frac{l}{2}$, also $X = 1$ offenbar die in der Schienenmitte erfolgende größte Durchbiegung darstellt. Für diese Durchbiegung haben wir dagegen in Gleichung (17) bereits einen Wert gefunden, und durch Vergleichung der beiden Ausdrücke folgt

$$K = \frac{384 \cdot E \cdot J}{l^4}. \tag{40a}$$

Weiterhin ist bekanntlich

$$\frac{K}{\Theta} = n_0^2, \tag{40b}$$

wo n_0 die durch die Gleichung (23a) ($R = 0$) und (26a) festgelegte Grundschwingung unserer Schiene bedeutet, die letztere Beziehung ergibt endlich

$$\Theta = \frac{384 \cdot E \cdot J}{n_0^2 \cdot l^4}. \tag{40c}$$

Die Differentialgleichung (39) läßt sich somit auch schreiben

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + n_0^2 \cdot T = \frac{n_0^2 \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} \cdot \varphi(t), \tag{39a}$$

und wir haben damit eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Schwingungen unserer Schiene gewonnen, die zwar nur unter den eingangs dieses Abschnittes angegebenen Einschränkungen gilt, dafür aber den Vorteil besitzt, daß sie sich in einfacher Weise für beliebige Funktionen $\varphi(t)$ integrieren läßt. Ihr vollständiges Integral lautet:

$$T = \frac{n_0^2 \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot n_0} \cdot \left[e^{j \cdot n_0 \cdot t} \cdot \int e^{-j \cdot n_0 \cdot t} \cdot \varphi(t) \cdot dt - e^{-j \cdot n_0 \cdot t} \cdot \int e^{j \cdot n_0 \cdot t} \cdot \varphi(t) \cdot dt \right] + \\ + e^{-\gamma \cdot t} \cdot A \cdot \sin(n_0 \cdot A + \lambda); \tag{41}$$

hierbei wurde der freien Schwingung der durch die Gleichung (21a) gegebene Dämpfungsfaktor wieder beigefügt, da das allmähliche Verlöschen dieser Schwingung den hauptsächlichsten Einfluß der Reibungsverluste darstellt, während ihre Berücksichtigung bei der Bestimmung des partikulären Integrals dieses nur unnötig komplizieren würde.

Uns interessiert hauptsächlich die kurz nach Eintritt des plötzlichen Kurzschlusses auftretende höchste Beanspruchung und wir können aus diesem Grunde wegen der geringen Dämpfung des Wechselstromgliedes in der Gleichung des plötzlichen Kurzschlußstromes die Dämpfungskonstante $\alpha = 0$ setzen. Wir haben dann die einfachere Beziehung



$$i = \frac{J_K}{\tau} \cdot \left(e^{-\beta \cdot t} - \cos \omega \cdot t\right) \cdot \tag{42}$$

und

$$\varphi(t) = k \cdot \left(\frac{J_K}{\tau}\right)^2 \cdot \left(e^{-2\beta \cdot t} - 2 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \cos 2\,\omega \cdot t + \frac{1}{2}\right),$$

und die Gleichung (41) ergibt mit diesem Wert der Funktion $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} T = \frac{k \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{J_K}{\tau}\right)^2 \cdot \Bigg[\frac{1}{2} + A_1 \cdot e^{-2\beta \cdot t} + A_2 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \left(\cos \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \beta^2}{\omega^2 - \beta^2 - n_0^2} \cdot \sin \cdot \omega \cdot t\right) - \\ - A_3 \cdot \cos 2 \cdot \omega \cdot t + A_4 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos n_0 \cdot t + A_5 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin n_0 \cdot t\Bigg], \end{aligned} \tag{43}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{\beta^2}{n_0^2}}, \\ A_2 &= \frac{\frac{\omega^2}{n_0^2} - \frac{\beta^2}{n_0^2} - 1}{\frac{\omega^4}{n_0^4} + 2 \cdot \frac{\omega^2}{n_0^2} \cdot \left(\frac{\beta^2}{n_0^2} - 1\right) + \left(\frac{\beta^2}{n_0^2} + 1\right)^2}, \\ A_3 &= \frac{1}{2 \cdot \left(4 \cdot \frac{\omega^2}{n_0^2} - 1\right)}, \\ A_4 &= A_3 - A_2 - A_1 - \frac{1}{2}, \\ A_5 &= 2 \cdot \frac{\beta}{n_0} \cdot A_1 + \left(\frac{\beta}{n_0} - \frac{\omega}{n_0} \cdot \frac{2 \cdot \beta^2}{\omega^2 - \beta^2 - n_0^2}\right) A_2 \cdot \end{aligned}\right\} \tag{43a}$$

Die Integrationskonstante A_4 und A_5 ergaben sich dabei aus den Anfangsbedingungen, wonach sowohl

$$T = 0 \text{ für } t = 0,$$

als auch wegen der Massenträgheit

$$\frac{dT}{dt} = 0 \text{ für } t = 0.$$

Bild 8 zeigt die Schwingungen, die unsere schon des öfteren betrachtete Schiene unter dem Einfluß des sie durchfließenden plötzlichen Kurzschlußstromes ausführt, die Dämpfungskonstante des Gleichstromgliedes wurde zu $\beta = 30$ angenommen, und das Beispiel trifft damit die Verhältnisse eines Langsamläufers von dem eingangs dieser Arbeit betrachteten Typus. Der zeitliche Verlauf der Durchbiegung der Schiene bei fehlendem Gleichstromglied wurde ebenfalls in das Bild eingezeichnet. Es fällt nun vor allem auf, daß trotz der starken Dämpfung des Gleichstromgliedes sein Einfluß auf die mechanische Beanspruchung der Schiene sehr groß ist, die Schiene biegt sich etwa 8 mal stärker durch, als es bei fehlendem Gleichstromglied der Fall wäre. Die Dämpfung der Eigenschwingungen der Schiene wurde allerdings als gering angenommen, was praktisch ja wohl auch in vielen Fällen zutreffen wird; wäre die Dämpfung der Eigenschwingungen der Schiene unendlich groß, so würde die Beanspruchung der Schiene durch das Gleichstromglied auf den dreifachen Wert sinken.

Bild 9 endlich zeigt die Größe der Durchbiegung elastischer Leiter verschiedener Eigenschwingungszahl in Abhängigkeit von der Dämpfung des Gleichstromgliedes, auch hier wurde die Dämpfung der Eigenschwingungen als gering angenommen. Wie nach dem Vorhergehenden nicht anders zu erwarten, zeigt sich, daß die mechanische Beanspruchung der Leiter mit wachsender Dämpfung des Gleichstromgliedes nur sehr langsam abnimmt, selbst eine nennenswerte natürliche Dämpfung

der Eigenschwingungen vermöchte am Charakter dieser Kurven nichts zu ändern. Eine Ausnahme bilden lediglich solche Leiter, deren Eigenschwingungszahl in der Nähe der elektrischen Frequenz des hindurchfließenden Wechselstromes liegt; derartige Leiter erleiden einerseit extrem hohe Beanspruchungen, andererseits ist hier der Einfluß der Dämpfung des Gleichstromgliedes weit stärker. Eine Eigenschwingungszahl stromdurchflossener Leiter, die ebenfalls zu vermeiden ist, ist, wie die mittlere der Gleichungen (43 a) erkennen läßt, die doppelte elektrische Frequenz des hindurchfließenden Wechselstromes.

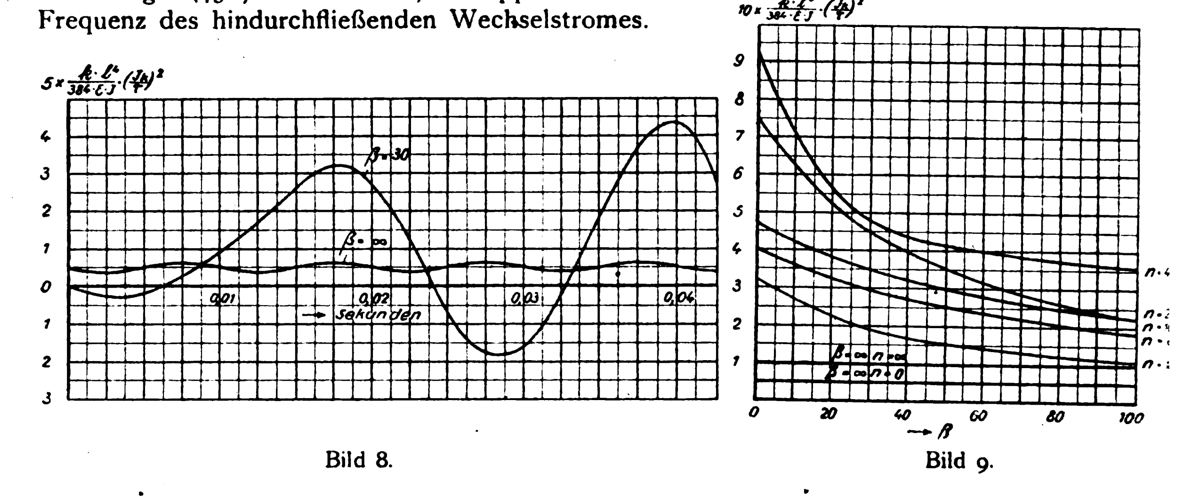


Bild 8. Bild 9.

7. Ergebnis der Untersuchung.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich in der Hauptsache mit der Frage, wie groß der Einfluß des Gleichstromgliedes gegenüber dem des Wechselstromgliedes auf die mechanischen Kraftwirkungen des plötzlichen Kurzschlußstromes von Synchronmaschinen ist. Dabei kommen wir zu dem Ergebnis, daß der Einfluß des Gleichstromgliedes weit größer ist, als man gemeinhin annehmen möchte; der innere Grund ist der, daß das Gleichstromglied Anfangsbedingungen ergibt, die den stromdurchflossenen Leiter zu kräftigen Eigenschwingungen anregen. Weiterhin kann das Gleichstromglied für den Fall, daß die mechanische Eigenschwingungszahl des stromdurchflossenen Leiters mit der elektrischen Frequenz des Kurzschlußstromes übereinstimmt, zu unangenehmen Resonanzerscheinungen Veranlassung geben. Ein wichtiges Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen ist ferner, daß selbst eine recht starke Dämpfung des Gleichstromgliedes die mechanische Wirkung des Kurzschlußstromes nur wenig zu beeinflussen vermag.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden an einer beiderseitig eingespannten stromdurchflossenen Schiene vorgenommen, und zwar gelten die Ergebnisse nur solange, als durch die mechanischen Beanspruchungen die Elastizitätsgrenze des Leitermaterials nicht überschritten wird. Dies ist aber eine Grenze, die im Maschinenbau und somit auch im Elektromaschinen- und Leitungsbau niemals überschritten werden soll. Die Ergebnisse der Untersuchung können somit ohne weiteres auf den praktischen Leitungsbau angewendet werden. Wir können indes noch einen Schritt weitergehen.

Die Wickelköpfe von Maschinen und die Spulen von Transformatoren lassen sich als beiderseitig eingespannte Leiter im weiteren Sinne des Wortes auffassen. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit können somit qualitativ ohne weiteres auch auf diese angewandt werden. Um sie auch quantitativ auf Wicklungen anwenden zu können, wären die Werte der Konstanten k, R und n_0 für spezielle Fälle zu berechnen, doch soll hierauf an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Immerhin geben die vorliegenden Untersuchungen die Erklärung für manche Zusammenbrüche von Wicklungen, die ohne Kenntnis der besonderen mechanischen Wirkungen des Gleichstromgliedes des plötzlichen Kurzschlußstromes rätselhaft erscheinen müßten.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 8. u. 9. Heft. 1920.

Die stationären Schwingungen der wechselstromgespeisten Spule.

Von

Otto Böhm, Berlin.

Vorbemerkung.

In einem Teil meiner Arbeit „Rechnerische und experimentelle Untersuchung der Einwirkung von Wanderwellen-Schwingungen auf Transformator-Wicklungen“[1]) versuchte ich zur Aufklärung von Versuchsergebnissen die Vorgänge in einer von Wechselstrom gespeisten Spule rechnerisch zu verfolgen. Das Problem ist seitdem in dieser Zeitschrift mehrfach behandelt worden. Im Anschluß an seine früher erschienenen Arbeiten, die sich mit dieser Frage beschäftigten[2]), prüfte und erweiterte K. W. Wagner meine Rechnung am Bilde des Kettenleiters[3]). Auch Rogowski untersuchte sehr eingehend das Problem der stationär mit Wechselstrom gespeisten Spule, wobei er seine Betrachtungen allerdings auf Spulen mit ganz wenig Windungen beschränkte[4]). Zum Vergleich wurden dabei die Ergebnisse von Untersuchungen herangezogen, die Herr Lenz an anderer Stelle veröffentlicht hat[5]).

Die Resultate dieser Arbeiten sind recht verschieden, genau so wie die vereinfachten Ersatzbilder, die die einzelnen Autoren an Stelle der wahren Spule ihren Betrachtungen zugrunde legten.

Die vorliegende Arbeit stellt nun eine neue Art der Behandlung des Problems zur Diskussion, die es gestattet, die Vorgänge in einer von Wechselstrom gespeisten einschichtigen Spule an einem sehr wahrheitsgetreuen Bild mit den einfachsten mathematischen Mitteln zu untersuchen. Sie beschränkt sich allerdings auf die Behandlung des stationär gewordenen Zustands. Dessen vollständige Erforschung aber dürfte notwendig sein zur Klärung des praktisch wichtigeren Problems, der Ausgleichsvorgänge beim Auftreffen von Wanderwellen auf eine Wicklung.

Verteilung von Strom und Spannung innerhalb einer Spulenwindung.

Denken wir uns eine einschichtig gewickelte Spule mit n-Windungen durch eine Radialebene, in der der Spulenanfang und das Spulenende liegen mögen, aufgeschnitten und in die Zeichenebene aufgerollt, so erhalten wir, wie Bild 1 zeigt, eine Schar paralleler Leitungen, ein Mehrfachleitersystem. Wir bezeichnen die Windungen durch die Zahlen 1 bis n. Ein Punkt P_x der νten Windung sei festgelegt durch seine Entfernung x' vom Windungsanfang. Die Länge einer Windung sei l_w. Ferner bedeute für Punkt P_x:

---

[1]) Arch. f. Elektrot. 5, S. 383 (Teil IIb).

[2]) K. W. Wagner, „Die Theorie des Kettenleiters nebst Anwendungen“. Arch. f. Elektrot. 3, S. 315. — Derselbe, „Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in einer Spule mit Windungskapazität“. Elektrot. Masch. XXXIII, Heft 8 u. 9.

[3]) K. W. Wagner, „Wanderwellen-Schwingungen in Transformatorwicklungen“. Arch. f. Elektrot. 6, S. 301.

[4]) W. Rogowski, „Die Spule bei Wechselstrom“. Arch. f. Elektrot. VII, S. 17. — Derselbe, „Überspannungen und Eigenfrequenzen einer Spule“. Arch. f. Elektrot. VII, S. 240.

[5]) Ann. d. Phys. 43, S. 749.

J_ν den Strom,
V_ν das Potential,
Q_ν die Ladung,
Φ_ν das magnetische Feld.

Diese Bezeichnungen sollen Momentanwerte bedeuten. Die Maximalwerte nach Ort und Zeit nennen wir $\tilde{J}$, $\tilde{V}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{\Phi}$, dagegen werden wir mit $\dot{J}$, $\dot{V}$ zeitliche Maximalwerte an einem bestimmten Wicklungspunkte bezeichnen.

Der Ohmsche Widerstand und die Ableitung der Spule sollen vernachlässigt werden.

Für die νte Windung schreiben wir nun die Grundgleichungen des Mehrfachleitersystems an:

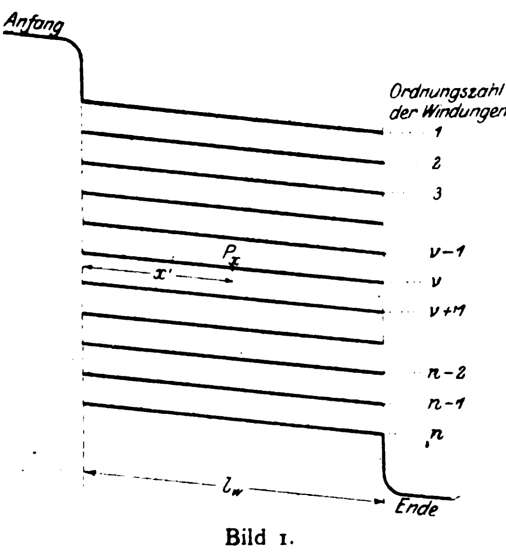


Bild 1.

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial x'} = -\frac{\partial Q_\nu}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial x'} = -\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial t} \tag{2}$$

$$\Phi_\nu = L_{1\nu} J_1 + L_{2\nu} J_2 + \ldots L_{\nu\nu} J_\nu + \ldots L_{n\nu} J_n \tag{3}$$

$$V_\nu = a_{1\nu} Q_1 + a_{2\nu} Q_2 + \ldots a_{\nu\nu} Q_\nu + \ldots a_{n\nu} Q_n. \tag{4}$$

Hierin bedeuten, auf die Längeneinheit bezogen: $L_{\mu\nu}$ und $a_{\mu\nu}$ die Koeffizienten der magnetischen und der elektrischen Gegeninduktion zwischen der μten und der νten Windung, $L_{\nu\nu}$ und $a_{\nu\nu}$ die Koeffizienten der magnetischen und der elektrischen Selbstinduktion der νten Windung.

Zwischen diesen Koeffizienten besteht die Beziehung:

$$\frac{L_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu}} = \frac{L_{\nu\nu}}{a_{\nu\nu}} = \frac{1}{\varepsilon\mu c^2}, \tag{5}$$

worin c die Lichtgeschwindigkeit, μ die Dielektrizitätskonstante, ε die Permeabilität bedeuten. Wir wollen μ und ε der Einfachheit halber gleich 1 setzen, also eine Spule in Luft betrachten.

Setzt man Gleichung (3) und (4) in (2) ein, so ergibt sich:

$$a_{1\nu}\frac{\partial Q_1}{\partial x'} + a_{2\nu}\frac{\partial Q_2}{\partial x'} + \ldots a_{n\nu}\frac{\partial Q_n}{\partial x'} = -\left(L_{1\nu}\frac{\partial J_1}{\partial t} + L_{2\nu}\frac{\partial J_2}{\partial t} + \ldots L_{n\nu}\frac{\partial J_n}{\partial t}\right). \tag{6}$$

Diese Gleichung differenziere man partiell nach t und berücksichtige (1). Man erhält dann:

$$a_{1\nu}\frac{\partial^2 J_1}{\partial x'^2} + a_{2\nu}\frac{\partial^2 J_2}{\partial x'^2} + \ldots a_{n\nu}\frac{\partial^2 J_n}{\partial x'^2} = L_{1\nu}\frac{\partial^2 J_1}{\partial t^2} + L_{2\nu}\frac{\partial^2 J_2}{\partial t^2} + \ldots L_{n\nu}\frac{\partial^2 J_n}{\partial t^2}, \tag{7}$$

wofür man nach (5) schreiben kann:

$$a_{1\nu}\left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 J_1}{\partial t^2}\right) + a_{2\nu}\left(\frac{\partial^2 J_2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 J_2}{\partial t^2}\right) + \ldots a_{n\nu}\left(\frac{\partial^2 J_n}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 J_n}{\partial t^2}\right) = 0. \tag{8}$$

Die Klammerausdrücke in Gleichung (8) fassen wir als Unbekannte auf. Es lassen sich n solcher Gleichungen mit n Unbekannten aufstellen. Da in allen Gleichungen die konstanten Glieder fehlen, werden die Unbekannten durchweg null, und es gilt allgemein:

$$\frac{\partial^2 J_n}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 J_\nu}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Dies ist die Stromgleichung der freien Leitung. Sie sagt, daß sich der Strom über die Windung hin nach einem Sinusgesetz verteilt, wenn seine zeitliche Änderung ein Sinusgesetz befolgt. Es gilt also die Gleichung:

$$J_\nu = \overset{\frown}{J}_\nu \sin(q x' + \psi_\nu) \sin(\omega t + \sigma_\nu). \tag{10a}$$

Hierin ist die Wellenlängenkonstante q gegeben durch den Quotienten $\omega : c$.

Aus den Gleichungen (2) und (3) in Verbindung mit (10a) ergibt sich, daß dasselbe Gesetz auch für die Spannungsverteilung innerhalb einer Windung gilt, so daß wir analog schreiben können:

$$V_\nu = \overset{\frown}{V}_\nu \sin(q x' + \varphi_\nu) \sin(\omega t + \varrho_\nu). \tag{10b}$$

Die noch unbestimmten Konstanten der Gleichungen (10) sind durch die bis jetzt willkürlichen Bedingungen am Anfang und am Ende der Windungen zu bestimmen. Es macht für den Charakter der Verteilung innerhalb der Windung offenbar nichts aus, wenn das Ende einer Windung mit dem Anfang der nächsten verbunden ist. Die Art der Verteilung von Strom und Spannung innerhalb einer Windung unterscheidet sich also durch nichts von der im frei ausgespannten Drahte. Das Verhältnis von ω:q ist genau wie beim freien Drahte unabhängig von der Frequenz und gleich der Lichtgeschwindigkeit c. Eine andere örtliche Verteilung, als die sinusförmige, erscheint nicht möglich.

Das allgemein gültige Gesetz für die Spannungsverteilung in einer Spule.

Wenn sich trotzdem die Spule als Ganzes in der Art der Strom- und Spannungsverteilung anders verhalten soll als ein frei ausgespannter Draht derselben Länge, so kann der Unterschied nur darin bestehen, daß sich die Verteilungskurven der einzelnen Windungen anders aneinanderreihen, als wenn die Windungen entsprechend lange Teile eines freien Drahtes wären. Strom- und Spannungssprünge können allerdings auch an den Übergangspunkten von Windung zu Windung nicht auftreten, dagegen sind Unstetigkeiten der Gradienten von Strom und Spannung wohl denkbar, so wie z. B. auch bei einer freien Leitung, die sich aus Teilen verschiedenen Wellenwiderstandes zusammensetzt, sprunghafte Änderungen der Gradienten an den Übergangspunkten als Folge der Wellenreflexion auftreten. Es soll nun gezeigt werden, daß im wesentlichen die gleiche Erscheinung den Unterschied zwischen Spule und gestreckter Leitung ausmacht.

Wir bezeichnen den Sprung der Spannungsgradienten am Übergangspunkt zwischen der $(\nu - 1)$ten und der νten Windung mit

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)_{\nu/\nu-1} = \frac{\partial V_\nu}{\partial x'}_{(x'=0)} - \frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x'}_{(x'=l_w)}. \tag{11}$$

Der Übergangspunkt hat, auf die $(\nu - 1)$te Windung bezogen, die Abszisse $x' = l_w$, auf die νte Windung bezogen, die Abszisse $x' = 0$.

Da die Koeffizienten $L_{\mu\nu}$ und $a_{\mu\nu}$ nur von der geometrischen Lage der Windungen μ und ν zueinander, nicht aber von ihrer Lage innerhalb der Spule abhängen, kommt es für die Größe von $L_{\mu\nu}$ und $a_{\mu\nu}$ nur auf die Zahl der zwischen den Windungen μ und ν liegenden Zwischenräume an, die gleich der positiv genommenen Differenz der beiden Ordnungsziffern ist. Wir nehmen dabei an, daß die Windungs- und Erdabstände durchweg gleich seien, eine Voraussetzung, die bisher nicht notwendig war, und schreiben für die nächste Betrachtung:

$$L_{\mu-\nu} \text{ für } L_{\mu\nu},\ L_{\mu+1,\nu+1},\ L_{\mu+2,\nu+2} \ldots$$
$$L_0 \text{ für } L_{\nu\nu},\ L_{\nu+1,\nu+1},\ L_{\nu+2,\nu+2} \ldots$$

Das gleiche gilt für die a-Koeffizienten.

Wir führen nun in die Differenz (11) die Gleichungen (2) und (3) ein und bilden zu diesem Zwecke:

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial x'}_{(x'=0)} = -\left(L_{\nu-1}\frac{\partial J_1}{\partial t} + L_{\nu-2}\frac{\partial J_2}{\partial t} + \ldots L_{n-1-\nu}\frac{\partial J_{n-1}}{\partial t} + L_{n-\nu}\frac{\partial J_n}{\partial t}\right)_{(x'=0)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x'}_{(x'=l_w)} = -\left(L_{\nu-2}\frac{\partial J_1}{\partial t} + L_{\nu-3}\frac{\partial J_2}{\partial t} + \ldots L_{n-\nu}\frac{\partial J_{n-1}}{\partial t} + L_{n-\nu+1}\frac{\partial J_n}{\partial t}\right)_{(x'=l_w)}. \quad (13)$$

Da $J_{\nu-1}$ für $x'=l_w$ identisch ist mit J_ν für $x'=0$, kann man für (13) schreiben:

$$\frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x'}_{(x'=l_w)} = -\left(L_{\nu-2}\frac{\partial J_2}{\partial t} + L_{\nu-3}\frac{\partial J_3}{\partial t} + \ldots L_{n-\nu}\frac{\partial J_n}{\partial t}\right)_{(x'=0)} - L_{n-\nu+1}\frac{\partial J_n}{\partial t}_{(x'=l_w)}. \quad (14)$$

Wir subtrahieren (14) von (12) und setzen dabei:

$$J_a = J_{1\,(x'=0)} \qquad J_e = J_{n\,(x'=l_w)}.$$

J_a bedeutet den von der Spule aufgenommenen, den Anfangsstrom, J_e den aus der Spule abfließenden, den Endstrom. Dann ist:

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)_{\nu/\nu-1} = -L_{\nu-1}\frac{\partial J_a}{\partial t} + L_{n-\nu+1}\frac{\partial J_e}{\partial t}. \quad (15)$$

Wirkt am Spulenanfang eine Klemmspannung $E = \dot{E}\sin\omega t$, so werden die Spannungsgleichungen der betrachteten beiden Windungen für den stationär gewordenen Zustand die Form haben:

$$\left.\begin{aligned} V_{\nu-1} &= \tilde{\dot{V}}_{\nu-1}\sin(q\,x' + \varphi_{\nu-1})\sin\omega t \\ V_\nu &= \tilde{\dot{V}}_\nu \sin(q\,x' + \varphi_\nu)\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Die Zeitphase des Potentials ist an allen Stellen der Spule die gleiche, wenn wir — was der Einfachheit halber vorausgesetzt sei — eine Spule betrachten, durch die eine Leistungsübertragung nicht stattfindet. In diesem Falle erfolgen genau wie bei der unbelasteten und verlustlosen freien Leitung die Schwingungen an allen Punkten einer Windung gleichphasig. Da aber die Endspannung einer Windung identisch ist mit der Anfangsspannung der nächsten, gilt dies auch für die ganze Spule. Es wird also nach den Gleichungen (16):

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial x'}_{(x'=0)} = \tilde{\dot{V}}_\nu\, q\cos\varphi_\nu \sin\omega t \quad (17)$$

$$\frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x'}_{(x'=l_w)} = \dot{V}_{\nu-1}\, q\cos(q\,l_w + \varphi_{\nu-1})\sin\omega t.$$

Als Differenz ergibt sich unter Berücksichtigung von (15):

$$\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)_{\nu/\nu-1} = q\left[\tilde{\dot{V}}_\nu\cos\varphi_\nu - \tilde{\dot{V}}_{\nu-1}\cos(q\,l_w + \varphi_{\nu-1})\right]\sin\omega t \quad (18)$$

$$= -L_{\nu-1}\frac{\partial J_a}{\partial t} + L_{n-\nu+1}\frac{\partial J_e}{\partial t}.$$

Da die Spule eine Leistung nicht aufnimmt, ist die Zeitphase von J_a bestimmt durch:

$$J_a = -\dot{J}_a\cos\omega t.$$

Hierin ist $\dot{J}_a$ positiv, wenn die Spule einen induktiven Strom aufnimmt. Für J_e setzen wir dementsprechend:

$$J_e = -\dot{J}_e\cos\omega t.$$

Dann können wir für (18) schreiben:

$$\tilde{\dot{V}}_\nu\cos\varphi_\nu - \tilde{\dot{V}}_{\nu-1}\cos(q\,l_w + \varphi_{\nu-1}) = -c\,L_{\nu-1}\dot{J}_a + c\,L_{n-\nu+1}\dot{J}_e. \quad (19)$$

Da V_ν für $x'=0$ identisch ist mit $V_{\nu-1}$ für $x'=l_w$ besteht ferner die Beziehung:

$$\dot{\bar{V}}_\nu \sin \varphi_\nu - \dot{\bar{V}}_{\nu-1} \sin (q\, l_w + \varphi_{\nu-1}) = 0. \tag{20}$$

Wenn wir nun, von der 2. Windung beginnend, die Gleichungen (19) und (20) für die einzelnen Windungen anschreiben und die errechneten Werte von $V_\mu \cos \varphi_\mu$ und $V_\mu \sin \varphi_\mu$ der μten Windung in die Gleichung der folgenden einsetzen, kommen wir zu folgenden allgemein gültigen Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\bar{V}}_\nu \cos \varphi_\nu = \\
&\dot{\bar{V}}_1 \cos\left[(\nu-1) q\, l_w + \varphi_1\right] - c\, \dot{J}_a \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_\mu \cos\left[(\nu-\mu-1) q\, l_w\right] + c\, \dot{J}_e \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_{n-\mu} \cos\left[(\nu-\mu-1) q\, l_w\right] \\
&\dot{\bar{V}}_\nu \sin \varphi_\nu = \\
&\dot{\bar{V}}_1 \sin\left[(\nu-1) q\, l_w + \varphi_1\right] - c\, \dot{J}_a \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_\mu \sin\left[(\nu-\mu-1) q\, l_w\right] + c\, \dot{J}_e \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_{n-\mu} \sin\left[(\nu-\mu-1) q\, l_w\right]
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Unter Berücksichtigung von (16) können wir wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\nu = \dot{\bar{V}}_1 \sin\left[q\, x' + (\nu-1) q\, l_w + \varphi_1\right] &- c\, \dot{J}_a \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_\mu \sin\left[q\, x' + (\nu-\mu-1) q\, l_w\right] \\
&+ c\, \dot{J}_e \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_{n-\mu} \sin\left[q\, x' + (\nu-\mu-1) q\, l_w\right]'.
\end{aligned} \tag{22}$$

Nun können wir noch die Entfernung x des betrachteten Punktes vom Spulenanfang einführen, indem wir setzen:

$$x = (\nu - 1)\, l_w + x'. \tag{23}$$

Dann geht (22) über in den Ausdruck:

$$\dot{V}_\nu = \dot{\bar{V}}_1 \sin(q\, x + \varphi_1) - c\, \dot{J}_a \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_\mu \sin(q\, x - \mu\, q\, l_w) + c\, \dot{J}_e \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_{n-\mu} \sin(q\, x - \mu\, q\, l_w). \tag{24}$$

In dieser Gleichung sind noch $\dot{\bar{V}}_1$, φ_1, J_a und J_e unbekannt. Die beiden ersten Größen werden sich aus den Grenzbedingungen an den beiden Spulenenden bestimmen lassen. J_a und J_e aber sind noch zu berechnen.

Aus den 4 Grundgleichungen des Mehrphasenleitersystems ergibt sich die Beziehung:

$$a_{\nu-1} \frac{\partial J_1}{\partial x'} + a_{\nu-2} \frac{\partial J_2}{\partial x'} + \ldots\; a_{n-\nu} \frac{\partial J_n}{\partial x'} = - \frac{\partial V_\nu}{\partial t}. \tag{25}$$

Für jede der n Windungen läßt sich eine solche Gleichung aufstellen. Wir haben also n Gleichungen mit n Unbekannten $\frac{\partial J_\mu}{\partial x'}$. Uns interessieren praktisch vor allem die Spannungen in der Spule und daher die zu ihrer Kenntnis notwendigen Ströme J_a und J_e. Die Untersuchung braucht sich also nur auf deren Bestimmung zu erstrecken.

Aus den n Gleichungen ergibt sich für die Ströme in der ersten und in der letzten Windung:

$$\frac{\partial J_1}{\partial x'} = - \left[K_{11} \frac{\partial V_1}{\partial t} + K_{12} \frac{\partial}{\partial t}(V_1 - V_2) + \ldots K_{1n} \frac{d}{\partial t}(V_1 - V_n)\right]. \tag{26a}$$

$$\frac{\partial J_n}{\partial x'} = - \left[K_{11} \frac{\partial V_n}{\partial t} + K_{12} \frac{\partial}{\partial t}(V_n - V_{n-1}) + \ldots K_{1n} \frac{\partial}{\partial t}(V_n - V_1)\right]. \tag{26a}$$

Hierin bedeutet K_{11} die Teilkapazität der ersten Windung gegen Erde; K_{12}, K_{13} .. K_{1n} sind die Teilkapazitäten zwischen der ersten Windung und je einer der übrigen Windungen. Diese Koeffizienten sind wieder auf die Längeneinheit des Drahtes bezogen und gelten sinngemäß auch für die Beziehungen der letzten Windung zu den übrigen.

Die Werte der Koeffizienten K würden sich bei Auflösung der n Gleichungen (25) als Determinanten der Induktionskoeffizienten $a_{\mu\nu}$ darstellen.

Differenziert man die Gleichungen (26) nach x', so kann man unter Berücksichtigung von (9) schreiben:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = -c^2\left[K_{11}\frac{\partial V_1}{\partial x'} + \sum_{\mu=2}^{n} K_{1\mu}\frac{\partial}{\partial x'}(V_1 - V_\mu)\right]. \qquad (27a)$$

$$\frac{\partial J_n}{\partial t} = -c^2\left[K_{11}\frac{\partial V_n}{\partial x'} + \sum_{\mu=2}^{n} K_{1\mu}\frac{\partial}{\partial x'}(V_n - V_{n-\mu+1})\right]. \qquad (27b)$$

Hierin sind die Glieder, welche die Teilkapazitäten als Koeffizienten enthalten, durch das Summenzeichen zusammengefaßt. Setzen wir (27a) für $x' = 0$ und (27b) für $x' = l_w$ an und beachten wir, daß alle Spannungen zeitlich nach dem Gesetze $\sin \omega t$ verlaufen, so können wir für den Anfangsstrom $J_a = -\dot{J}_a \cos \omega t$ und für den Endstrom $J_e = -\dot{J}_e \cos \omega t$ folgende Ausdrücke schreiben:

$$\dot{J}_a = -\frac{c^2}{\omega}\left[K_{11}\frac{\partial \dot{V}_1}{\partial x'} + \sum_{\mu=2}^{n} K_{1\mu}\frac{\partial}{d x'}(\dot{V}_1 - \dot{V}_n)\right]_{(x'=0)}. \qquad (28a)$$

$$\dot{J}_e = -\frac{c^2}{\omega}\left[K_{11}\frac{\partial \dot{V}_n}{\partial x'} + \sum_{\mu=2}^{n} K_{1\mu}\frac{\partial}{\partial x'}(\dot{V}_n - \dot{V}_{n-\mu+1})\right]_{(x'=l_w)}. \qquad (28b)$$

Nach Einsetzung der Grenzbedingungen für die Spulenenden in Gleichung (24), welche zwei Beziehungen liefern, stehen jetzt vier Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten zur Verfügung. Das Problem wäre also gelöst und die gesuchte Spannungsverteilung in der Spule bekannt. Allerdings ist die gegebene Lösung recht unhandlich und wird, falls es auf Zahlenwerte ankommt, nur dann anwendbar sein, wenn es sich um Spulen mit sehr wenig Windungen handelt, bei denen man die Spannungen Windung für Windung verfolgen kann.

Physikalische Deutung der abgeleiteten Gleichung.

Es wird von Nutzen sein, wenn wir uns vor einer Weiterführung der Rechnung die physikalische Bedeutung der Gleichung (24) an Beispielen klar machen. Um die Betrachtung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß wir eine einigermaßen lange Spule vor uns haben, bei der die Windungen in der ersten Spulenhälfte mit den Windungen am Spulenende magnetisch nur noch so schwach verkettet sind, daß wir die gegenseitige Beeinflussung vernachlässigen können. Wir dürfen dann den 3. Summanden in Gleichung (24), der den Einfluß der letzten Windung darstellt, bei einer Betrachtung der Spannungen in der Nähe des Spulenanfangs unbeachtet lassen. Ferner nehmen wir an, daß die Spannungsverteilung in der ersten Windung und der induktive Anfangsstrom bereits bekannt seien, und zur Aufgabe stellen wir uns, auf diesen Grundlagen die Spannungsverteilung in der Spule, in der Nähe ihres Anfangs, herzuleiten.

Die Gleichung (24) sagt nun folgendes: Die gegebene Spannungsverteilung $\dot{V}_1 \sin(q x + \varphi_1)$ der ersten Windung erstreckt sich über die ganze Wicklung. Vom Anfangspunkt der zweiten Windung an, mit einem Knotenpunkt beginnend, super-



poniert sich darüber bis zum Wicklungsende eine zweite stehende Welle, die das Gesetz befolgt $-c\,J_a \sin[q(x-l_w)]$. Eine dritte Welle, $-c\,J_a \sin[q(x-2\,l_w)]$, beginnt mit einem Knotenpunkt am Anfang der 3. Windung, und so superponiert sich weiter nach dem Innern zu Welle auf Welle. Die Amplituden dieser Wellen klingen ab wie die Koeffizienten L_μ der Gegeninduktion, also nach dem Gesetz

$$L_\mu = \ln\left(1 + \frac{4\,h^2}{\mu^2\,d^2}\right), \tag{29}$$

worin h den Abstand einer Windung vom geerdeten Innenzylinder, d den Abstand zweier benachbarter Windungen voneinander bedeuten. Kurve I des Bildes 2 stelle den Verlauf der Größe von L_μ nach dieser Funktion für ein Zahlenbeispiel dar. Wir betrachten nun 4 Fälle, welche durch die Bilder 3—6 dargestellt werden[1]).

Bei Bild 3 beträgt die Halbwellenlänge das Dreifache der Windungslänge. Der obere Teil des Bildes zeigt die Einzelwellen, die dem ersten Summenausdruck

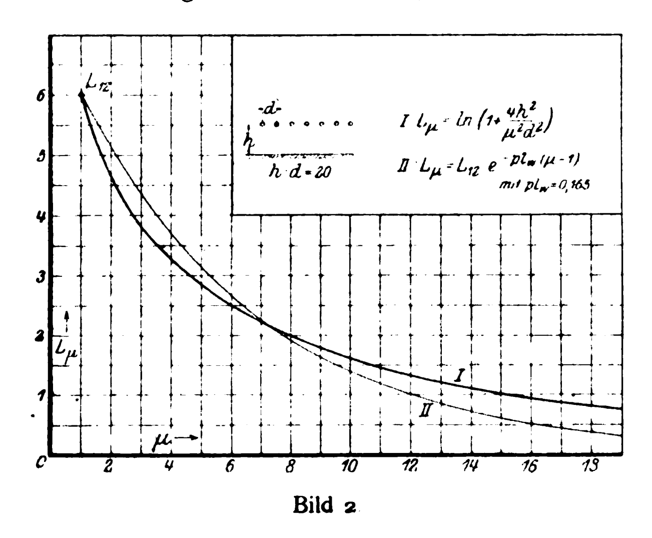


Bild 2

in Gleichung (24) entsprechen, der untere Teil gibt die durch Superposition entstandene Welle. Über diese müssen wir uns in ihrem ganzen Verlauf die Welle der ersten Windung gelagert denken, die aber in diesem und in den folgenden Bildern fortgelassen wurde, um das Bild nicht zu stören. Die resultierende Welle weist an den Übergangspunkten jene Knicke auf, von denen unsere Rechnung ausging; zwischen den ersten Windungen stark erkennbar, verschwinden die Sprünge des Gradienten allmählich nach dem Innern der Wicklung zu. Denken wir uns die geknickte Kurve durch eine sich anschmiegende stetige ersetzt, so erscheint sie uns als eine regelmäßige Sinuswelle, überlagert von einem nach dem Innern zu örtlich aperiodisch abklingenden Glied, ähnlich dem Gleichstromglied bei zeitlichen Ausgleichsvorgängen. Diesen Charakter hat die Kurve stets, wenn die Halbwellenlänge größer als die Windungslänge ist.

Die Bilder 4—6 gelten für Wellen, deren halbe Länge gleich oder kürzer als die Länge einer Windung ist. Hier ist nur die resultierende Kurve gezeichnet, aus den Einzelwellen des Summengliedes errechnet. Wir fassen zunächst Bild 5 ins Auge, das für diese kurzen Wellen charakteristisch ist. Die Schmiegungskurve zeigt hier Schwebungen, die nach dem Wicklungsinnern allmählich abklingen. Als Sonderfälle erscheinen die Bilder 4 und 6. In Bild 6 ist die Wellenlänge gleich der Windungslänge; die Wellen addieren sich zu hohen Werten im Wicklungsinnern.

[1]) Die Kurven zeigen die örtliche Verteilung des Potentials, das zeitlich an allen Punkten das Sinusgesetz befolgt.

Bild 4 ist für den Fall entworfen, daß die Halbwellenlänge gleich der Windungslänge ist. Wir haben hier den Grenzfall zwischen der Erscheinung der Schwebungen und der Überlagerung eines aperiodischen Gliedes.

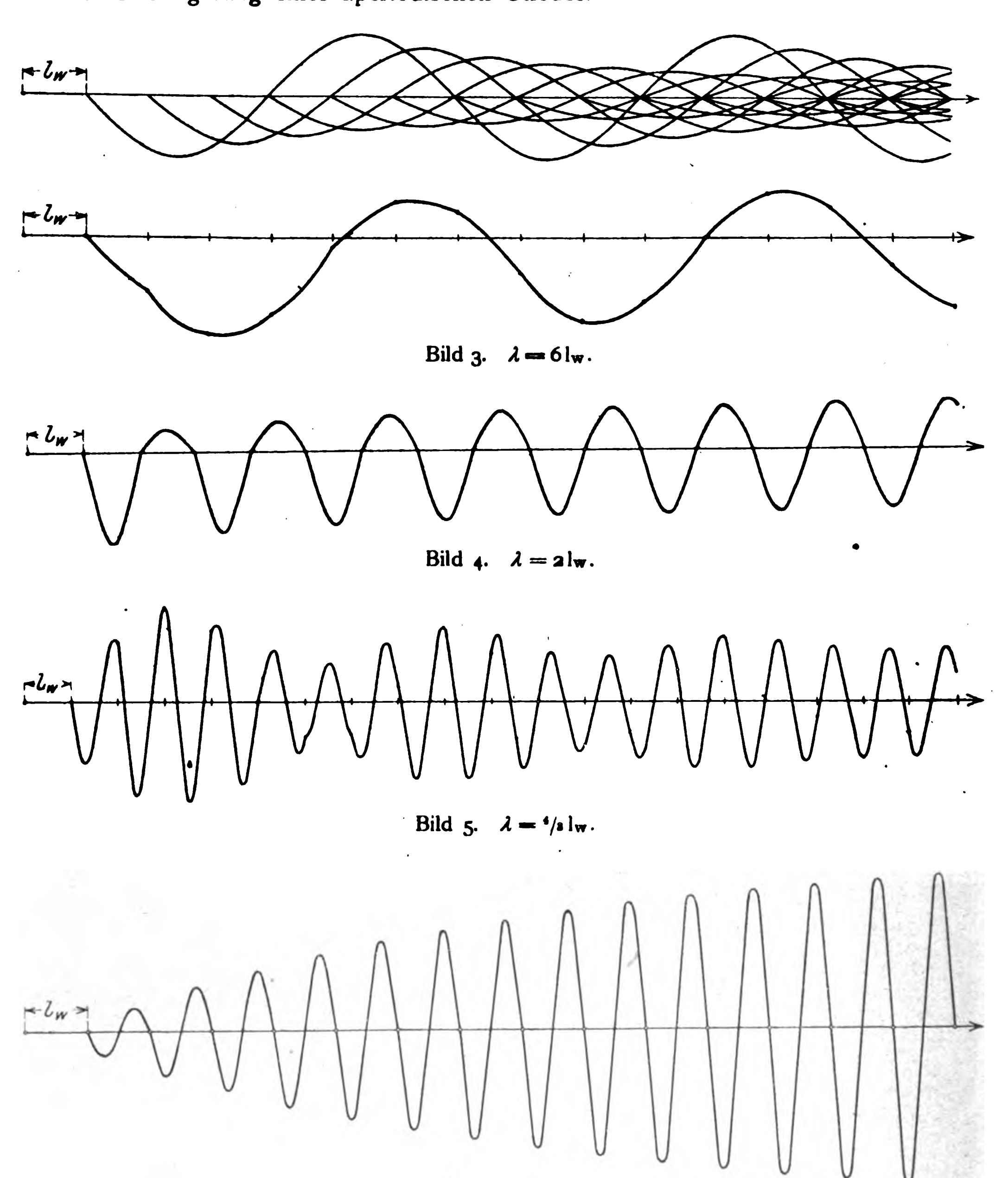


Bild 3. $\lambda = 6\, l_w$.

Bild 4. $\lambda = 2\, l_w$.

Bild 5. $\lambda = {}^4/_3\, l_w$.

Bild 6. $\lambda = l_w$.

In allen diesen Fällen stellt sich im Innern der Wicklung eine stetige Welle ein, zu der sich die Welle der ersten Windung, über die ganze Wicklung fortgeführt, addiert. Ist der aufgenommene Strom induktiv, wird die resultierende Welle im Innern größer, ist er kapazitiv, wird sie kleiner sein als in der ersten Windung.

Wir haben somit folgendes erkannt: Im Innern einer Spule stellt sich als stationärer Zustand in Form von stehenden Wellen eine Span-

nungsverteilung ein, wie wir sie, abgesehen vom Verhältnis zwischen Strom und Spannung, auch beim frei gespannten Drahte finden. Doch entwickelt sich diese Welle, von den beiden Wicklungsenden aus gesehen, erst allmählich. Der physikalische Grund ist leicht einzusehen: Das Verhältnis zwischen Spannung und Strom, der Wellenwiderstand der Wicklung, ist im Innern höher als an den Wicklungsenden. Sein Wert steigt in Sprüngen von Windung zu Windung an. Jeder Übergangspunkt ist daher ein Reflexionspunkt und bewirkt eine Deformation der Welle. Was sich in den ersten Windungen am Anfang und Ende der Wicklung abspielt, ist also nichts anderes als ein Reflexionsvorgang, der sich hier nicht in einem einzigen Punkte konzentriert, sondern über eine ganze Strecke hin ausdehnt. Darin liegt der wesentliche Unterschied zwischen der Spule und dem frei ausgespannten Drahte. Denken wir uns einen Draht hohen Wellenwiderstandes an eine lange Leitung mit niedrigem Wellenwiderstande derart angeschlossen, daß ein Übergang durch mehrere aneinandergereihte kurze Leitungsstücke mit stufenförmig wachsendem Wellenwiderstande gebildet wird, so erhalten wir die im Wesen genau gleichen Erscheinungen.

Der Charakter des örtlichen Ausgleichsvorganges an den Spulenenden ist ein anderer, je nachdem die Halbwelle kürzer oder länger als die Windungslänge ist. Im ersten Fall erfolgt der Übergang in Schwebungen, im zweiten durch Überlagerung mit einem dem Orte nach aperiodisch abklingenden Gliede. Für den weitaus größten Teil aller praktisch vorkommenden Fälle wird dieser letzte Übergang charakteristisch sein.

Die höchsten Spannungen treten bei allen Beispielen, abgesehen vom Falle der Windungsresonanz (Bild 6), in geringer Entfernung vom Wicklungsanfang auf. Für das Wicklungsende gilt offenbar das gleiche.

Angenähertes Gesetz für die Spannungsverteilung in einer Spule (ohne Geltung für extrem hohe Frequenzen).

Nachdem wir die physikalische Bedeutung der Gleichung (24) erkannt haben, gehen wir daran, sie so umzuformen, daß sie praktisch verwertbar wird. Es ist zunächst zweckmäßig nicht die Welle des Wicklungsanfanges, sondern die des Spuleninnern als Hauptwelle darzustellen. Über diese lagern sich dann an den Spulenenden die Übergangswellen. Wir schreiben also an Stelle von (24):

$$\dot{V}_\nu = \dot{\tilde{V}}_i \sin(q\,x + \varphi_i) + c\,\dot{J}_a \sum_{\mu=\nu}^{n-1} L_\mu \sin(q\,x - \mu\,q\,l_w) - c\,\dot{J}_e \sum_{\mu=1}^{\nu-1} L_{n-\mu} \sin(q\,x - \mu\,q\,l_w). \quad (30)$$

Der Ausdruck (30) gibt wie alle bisher abgeleiteten Gleichungen die Vorgänge in der Spule mit mikroskopischer Genauigkeit wieder. Solange es sich um sehr kurze Wellen handelt, ist diese Betrachtungsweise durchaus notwendig. Für Wellen, deren Länge das Acht- bis Zehnfache der Windungslänge übersteigt, können wir aber den exakten Weg verlassen und einige Vereinfachungen vornehmen, die zu einer handlicheren Form der Lösung führen. Wir werden mit dieser vereinfachten Rechnung immerhin den weitaus größten Teil der praktisch vorkommenden Fälle fassen.

Die Beschränkung der Rechnung auf nicht extrem hohe Frequenzen erlaubt uns, in Gleichung (30) an Stelle der Summen Integrale zu setzen. Auch diese aber würden uns große rechnerische Schwierigkeiten bereiten, wenn wir den Koeffizienten der Gegeninduktion in der Form des Ausdruckes (29) einsetzen wollten. Es wird ein wohl zahlenmäßiger, aber kein für den Charakter der Lösung wesentlicher Fehler



entstehen, wenn wir den örtlichen Verlauf der Gegeninduktionen durch eine ähnliche Funktion ersetzen, indem wir schreiben

$$L_\mu = L_{12}\, e^{-p\, l_w (\mu - 1)}. \tag{31}$$

Der Wert von p ist so zu wählen, daß die Funktionen möglichst ähnlich verlaufen. In Bild 2 zeigt Kurve II die Ersatzfunktion.

Für die richtige Einsetzung der Integralgrenzen beachten wir, daß gleichzusetzen ist:

$$L_\mu \sin(q\,x - \mu\, q\, l_w) = \sim \int\limits_{\mu - 1/2}^{\mu + 1/2} L_\mu \cdot \sin(q\,x - \mu\, q\, l_w)\, d\mu. \tag{32}$$

Wir schreiben danach für Gleichung (30):

$$\dot{V}_\nu = \dot{\hat{V}}_i \sin(q\,x + \varphi_i) + c\, L_{12} \Bigg[J_a \int\limits_{\mu = \nu - 1/2}^{n - 1/2} e^{-p\, l_w (n - 1)} \sin(q\,x - \mu\, q\, l_w)\, d\mu$$

$$- J_e \int\limits_{\mu = 1/2}^{\nu - 1/2} e^{-p\, l_w (n - \mu - 1)} \sin(q\,x - \mu\, q\, l_w)\, d\mu \Bigg]. \tag{33}$$

Die Größe x ist bei der Integrierung nach μ als konstant anzusehen.

Wenn wir nach erfolgter Integration die Grenzen des Integrales einsetzen und dabei wieder die Beziehung $(\nu - 1)\, l_w + x' = x$ berücksichtigen, tritt im Resultat die Differenz $(^1/_2\, l_w - x')$ auf. Für den Mittelpunkt der betrachteten Windung verschwindet dieser Wert, so daß wir ihn ohne besonderen Fehler für unsere angenäherte Rechnung über die ganze Windung hin gleich null setzen können. Wenn wir ferner die Stärke der magnetischen Verkettung zwischen erster und letzter Windung bei der hinreichend lang gedachten Spule als null ansetzen, verschwindet die obere Grenze des ersten und die untere des zweiten Integrales. Zur weiteren Vereinfachung setzen wir den im Resultat auftretenden Wert $e^{p\, l_w}$ gleich 1, wodurch bei Spulen mit einigermaßen starker Verkettung, bei denen $p\, l_w$ eine kleine Größe ist, ein unerheblicher, nur ziffernmäßiger Fehler entsteht. Wir erhalten dann als Spannungsgleichung der Wicklung:

$$\dot{V}_x = \dot{\hat{V}}_i \sin(q\,x + \varphi_i) - \frac{\omega\, L_{12}\, l_w}{(p^2 + q^2)\, l_w^2} \left(\dot{J}_a\, e^{-p\,x} - \dot{J}_e\, e^{-p(l - x)} \right). \tag{34}$$

In dieser Gleichung kommt die Windungsordnungszahl nicht mehr vor; das Potential $\dot{V}_x$ ist vielmehr als eine stetige Funktion der Entfernung x vom Spulenanfang ausgedrückt.

Wir haben nun noch $\dot{J}_a$ und $\dot{J}_e$ aus dieser Gleichung fortzuschaffen. Um zu handlichen Resultaten zu kommen, wollen wir die Gleichungen (28) dadurch vereinfachen, daß wir außer der Teilkapazität gegen Erde nur die Teilkapazität dicht nebeneinander liegender Windungen berücksichtigen. Bei Spulen mit starker Windungskapazität wird der Fehler ohne Belang sein. Wir können dann die Gleichung (28a) unter Berücksichtigung von (34) in folgender Form schreiben:

$$\dot{J}_a = -c\, \dot{\hat{V}}_i \frac{\cos\varphi_i [K_{11} + K_{12}(1 - \cos q\, l_w)] + \sin\varphi_i\, K_{12} \sin q\, l_w}{1 + \dfrac{c^2\, L_{12}\, K_{11}}{(p^2 + q^2)\, l_w^2}}. \tag{35}$$

Es steht mit den bisherigen vereinfachenden Annahmen in Einklang, wenn wir mit Geltung für nicht extrem hohe Frequenzen $\cos q\, l_w = 1$ und $\sin q\, l_w = q\, l_w$ setzen, da $q\, l_w$ ein kleiner Winkel ist. Wir führen außerdem die Beziehung ein:

$$c = \frac{1}{\sqrt{K_{11}\, L_{0s}}} \quad \text{mit} \quad L_{0s} = L_{11} + L_{12} + L_{13} + \ldots L_{1n}. \tag{36}$$

L_{0s} und K_{11} bedeuten die Koeffizienten der Selbstinduktion und der Kapazität der ersten Windung für quasistationäre Vorgänge. Ihr Produkt muß also durch die Lichtgeschwindigkeit bestimmt sein. Wir beachten noch, daß uns der Ausdruck (31) durch Integration für eine hinreichend lange Spule die Beziehung liefert:

$$p\, l_w = \frac{L_{12}}{L_{1s}} \text{ mit } L_{1s} = L_{12} + L_{13} + \ldots L_{1n} = L_{0s} - L_{11} \tag{36a}$$

und erhalten so für den Anfangsstrom:

$$\mathfrak{J}_a = -\tilde{V}_i \frac{\sqrt{\frac{K_{11}}{L_{0s}}} \cos \varphi_i + \omega K_{12} l_w \sin \varphi_i}{1 + \frac{p^2}{p^2 + q^2}}. \tag{37}$$

Auf gleiche Weise finden wir für den Endstrom:

$$\mathfrak{J}_e = -\tilde{V}_i \frac{\sqrt{\frac{K_{11}}{L_{0s}}} \cos (q\, l + \varphi_i) - \omega K_{12} l_w \sin (q\, l + \varphi_i)}{1 + \frac{p^2}{p^2 + q^2}}. \tag{38}$$

Die so errechneten Ausdrücke für $\mathfrak{J}_a$ und $\mathfrak{J}_e$ sind in die Spannungsgleichung (34) einzusetzen; wir erhalten dann als Endresultat:

$$\begin{aligned}\dot{V}_x = \tilde{V}_i \Bigg\{ \sin (q\, x + \varphi_i) - \frac{\omega L_{12}}{(2 p^2 + q^2) l_w} \cdot \Bigg[e^{-px} \left(\sqrt{\frac{K_{11}}{L_{0s}}} \cos \varphi_i + \omega K_{12} l_w \sin \varphi_i \right) \\ - e^{-p(l-x)} \left(\sqrt{\frac{K_{11}}{L_{0s}}} \cos (q\, l + \varphi_i) - \omega K_{12} l_w \sin (q\, l + \varphi_i) \right) \Bigg] \Bigg\}\end{aligned} \tag{39}$$

Die Gleichung enthält nur noch die beiden unbekannten Konstanten $\tilde{V}_i$ und φ_i, die für jeden Fall durch die Grenzbedingungen an den Spulenenden zu bestimmen sind.

Die Eigenfrequenzen einer Spule.

Wir betrachten eine Spule, deren beide Enden mit einer Wechselstrom-Spannungsquelle verbunden sind (Bild 7).

Nach Rogowski können wir zweierlei Eigenfrequenzen unterscheiden, Eigenfrequenzen erster und zweiter Art. Bei den Eigenfrequenzen erster Art nimmt die über die Spannungsquelle geschlossene Spule keinen Strom auf; es bilden sich Schwingungen mit Stromknoten an den Spulenklemmen. Bei den Frequenzen der zweiten Art dagegen schwingt die Spule mit Spannungsknoten an den Klemmen.

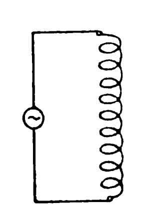


Bild 7.

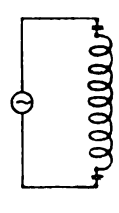


Bild 8.

Diese Erscheinung der Eigenfrequenzen hat mit dem Spulencharakter des Leiters nichts zu tun. Auch beim frei ausgespannten Drahte ist sie im wesentlichen in gleicher Weise zu finden; denn ihre Ursache, die Reflexion der hin- und hereilenden Wellen an den Leiterenden, ist in beiden Fällen vorhanden[1]).

Nur darin unterscheidet sich die Spule vom gestreckten Draht, daß bei gleicher Drahtlänge ihre Eigenfrequenzen etwas anders liegen. Die Ursache für diese rein ziffernmäßige Abweichung, mit der sich Lenz und Rogowski eingehend beschäftigt haben, ist unschwer einzusehen. Wegen der mangelnden Nachbar-

[1]) Auch Rogowski hat darauf hingewiesen, daß Eigenfrequenzen erster und zweiter Art nicht nur bei Spulen, sondern auch bei einer Doppelleitung vorhanden sind.

windungen auf der einen Seite ist die Induktivität L_{0s} an den Spulenenden etwa um die Hälfte kleiner als im Spuleninnern. Nehmen wir an, sie hätte über die ganze Spule hin bis an die Enden den gleichen Wert wie im Innern, so können wir den begangenen Fehler für die Betrachtung der Spannungsverteilung in roher Darstellung dadurch ausgleichen, daß wir den Spulenenden Kapazitäten vorgeschaltet denken, die den Überschuß über die wahre Induktivität des Spulenanfangs kompensieren. Bild 8 stellt ein solches Ersatzbild einer Spule dar.

In der Tat stimmt diese Anschauung mit dem überein, was Gleichung (34) zum Ausdruck bringt. Wir erkennen dies besonders deutlich, wenn wir die Gleichung für Anfang und Ende der Spule ansetzen. Mit $\dot{V}_a$ und $\dot{V}_e$ bezeichnen wir dabei die Potentiale an diesen Stellen:

$$\dot{V}_a = \dot{\tilde{V}}_i \sin \varphi_i - \frac{\omega L_{12}}{(p^2 + q^2) l_w} J_a \tag{40a}$$

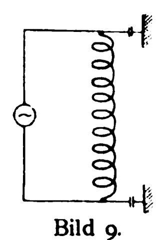
$$\dot{V}_e = \dot{\tilde{V}}_i \sin (q l + \varphi_i) - \frac{\omega L_{12}}{(p^2 + q^2) l_w} J_e . \tag{40b}$$

Die Potential $\dot{V}_a$, das am Spulenanfang wirklich herrscht, ist unser Potential vor dem Kondensator. Es erhöht sich durch den induktiven Strom $\dot{J}_a$ auf den Wert $\dot{\tilde{V}}_i \sin \varphi_i$, der die stehende Welle in der Spule bestimmt und in unserem Bilde dicht hinter dem Kondensator auftritt. Durch diese Anschauung haben wir den örtlichen Ausgleichsvorgang, der in Wirklichkeit über eine längere Strecke hin vor sich geht, in einem Punkte konzentriert dargestellt. So wie die Eigenfrequenzen eines Drahtes sich ändern, wenn wir ihn mit Kondensatoren an den Enden versehen, müssen sich auch die Eigenfrequenzen eines zur Spule gewickelten Leiters von denen des freigespannten gleicher Länge unterscheiden.

Die Kapazität C_s der Ersatzkondensatoren hat keinen konstanten Wert. Sie ist stark von der Frequenz abhängig wie der Ausdruck (41) zeigt:

$$C_s = \frac{(p^2 + q^2) l_w}{\omega^2 L_{12}} = K_{11} l_w + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{K_{11}}{L_{1s}} \cdot \frac{L_{12}}{L_{1s}}} . \tag{41}$$

Je niedriger die Frequenz ist, um so höher ist die Kapazität C_s, und um so weniger unterscheidet sich die Spule vom Drahte.


Bild 9.

Die Eigenfrequenzen erster Art sind in diesem Bilde als Resonanzfrequenzen zwischen den vorgeschalteten Kapazitäten und der Induktivität der ganzen Spule aufzufassen. Ist die Endkapazität wie beim freien Drahte unendlich groß, so ergibt sich Resonanz bei der Drahtinduktivität null, die dann auftritt, wenn der Draht den Strom unendlich aufnimmt. Dadurch sind die Resonanzfrequenzen des freien Drahtes bestimmt. Auch für diesen Grenzfall bleibt unser Bild zulässig.

Genau so wie der freie Draht wirkt die Spule mit wachsender Frequenz abwechselnd als Induktivität und als Kapazität. Auch für den Fall der kapazitiven Stromaufnahme behält das Ersatzbild Geltung. Der vorgeschaltete Kondensator bringt dann einen Abfall der Anfangsspannung hervor.

Die Frequenzen erster Art treten auf, wenn die Stromaufnahme der Spule null ist. Gleichung (37) lehrt uns, daß der aufgenommene Strom aus zwei Teilen besteht, einem Teil, der in die Spule zieht und durch den Wellenwiderstand am Spulenanfang bestimmt wird, und einem zweiten Teil, der eine parallelgeschaltete Kapazität zu durchfließen scheint; diese hat den Wert:

$$C_p = \frac{K_{12} l_w}{1 + \frac{p^2}{p^2 + q^2}} \cdot \sin \varphi_i . \tag{42}$$

Bild 9 zeigt das Ersatzschema. Auch die Kapazität C_p ist von der Frequenz abhängig, außerdem aber — im Gegensatz zu C_s — von dem Phasenwinkel φ_i, also von den inneren Resonanzbedingungen. Ist die Windungskapazität wie beim freien Drahte null, so verschwindet die Parallelkapazität, so daß auch dieses Bild für den Grenzfall gültig bleibt. Die Stromaufnahme null bedeutet demnach Stromresonanz zwischen Spuleninduktivität und Parallelkapazität.

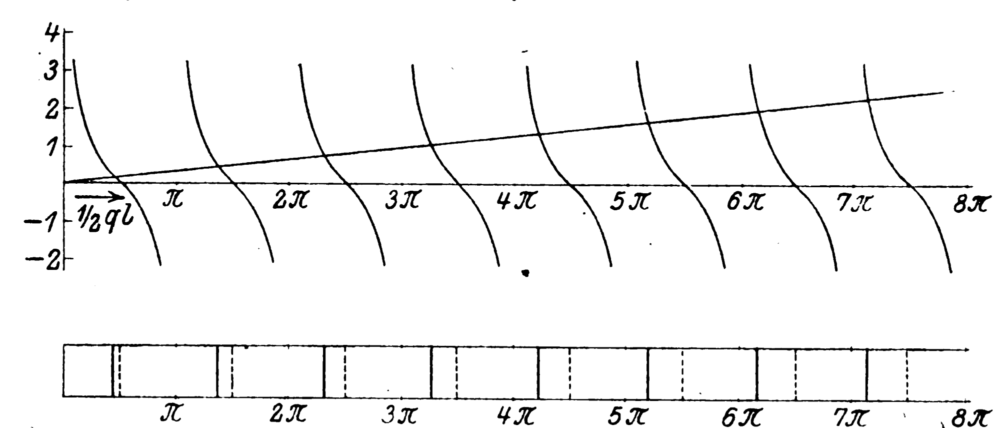
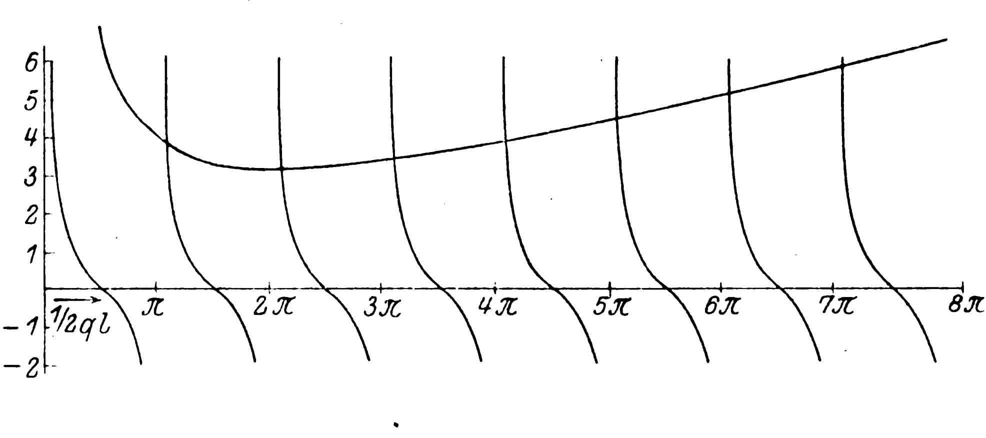


Bild 10. Eigenfrequenzen erster Art.

——— des gestreckten Drahtes einer Spule mit $\frac{K_{12}}{K_{11}} = 10$; $n = 200$.



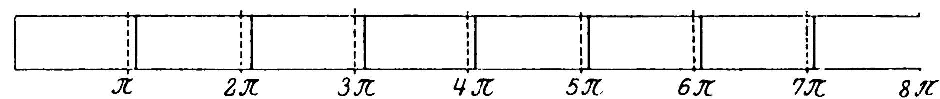


Bild 11. Eigenfrequenzen zweiter Art.

——— des gestreckten Drahtes ········ einer Spule mit $\frac{K_{12}}{K_{11}} = 10$; $\frac{L_{0s}}{L_{12}} = 20$; $n = 200$.

Wir gehen nunmehr zur Berechnung der Eigenfrequenzen über. Aus der Bedingung $\dot{J}_a = \dot{J}_e$ ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (37) und (38) der Phasenwinkel φ_i zu $- \frac{1}{2}\, q\, l$.

Für die Frequenzen erster Art ist die Stromaufnahme null. Nach Gleichung (37) wird dann unter Benutzung der Beziehungen (36) und (36a):

$$\operatorname{ctg}\left(\tfrac{1}{2}\, q\, l\right) = \frac{q\, l}{n} \cdot \frac{K_{12}}{K_{11}}. \tag{43}$$

Für die Frequenzen zweiter Art verschwindet die Differenz $V_a - V_e$. Daraus ergibt sich unter Benutzung der Gleichungen (40a) und (40b) und der gleichen Beziehungen wie oben:

$$\operatorname{ctg}(1/2\, q\, l) = \frac{q\, l}{n}\left(\frac{K_{12}}{K_{11}} + \frac{L_{0s}}{L_{12}}\right) + \frac{n}{q\, l}\left(1 + \frac{L_{0s}}{L_{1s}}\right)\cdot\frac{L_{12}}{L_{1s}}. \tag{44}$$

Die Bilder 10 und 11 zeigen die Lage der kritischen Frequenzen für ein Zahlenbeispiel. Zum Vergleich sind die Eigenfrequenzen eines frei ausgespannten Drahtes gleicher Länge mit angegeben, die bekanntlich durch die Beziehungen (45) berechnet werden:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg}(1/2\, q\, l) = 0 \quad \text{für Frequenzen erster Art.} \\ &\operatorname{ctg}(1/2\, q\, l) = \infty \quad \text{für Frequenzen zweiter Art.} \end{aligned} \tag{45}$$

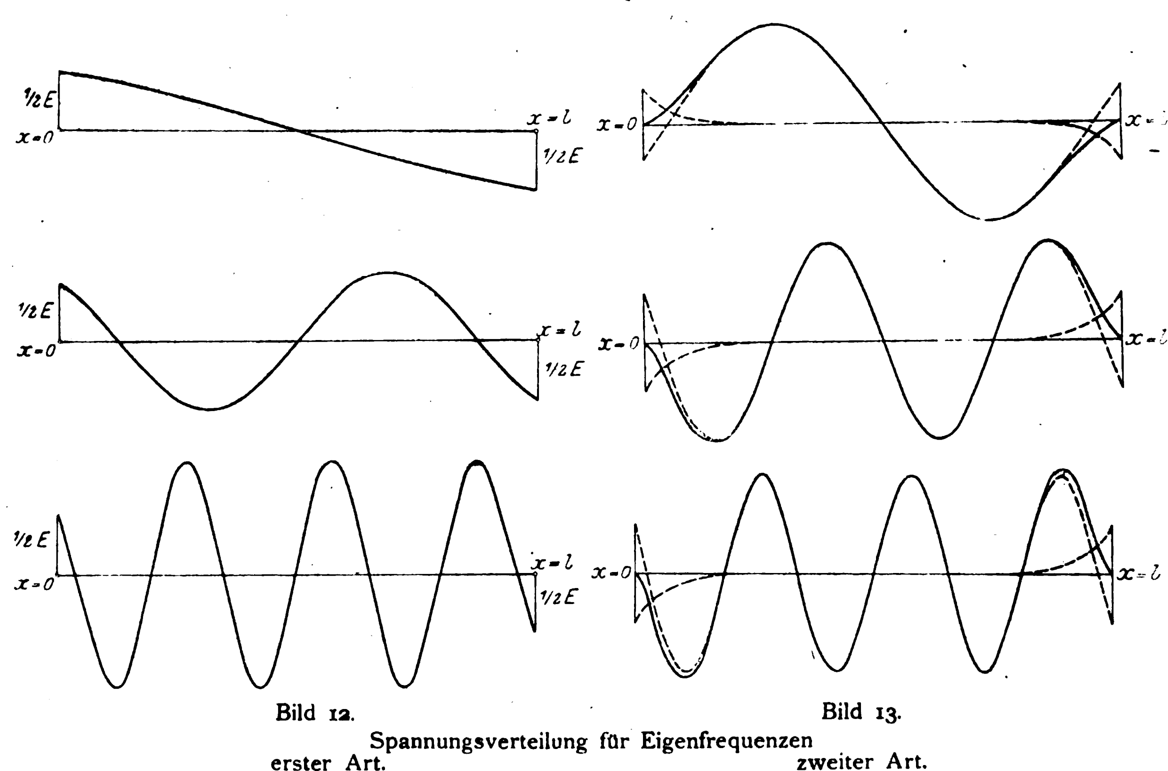


Bild 12. Bild 13.

Spannungsverteilung für Eigenfrequenzen erster Art. zweiter Art.

Die Werte $K_{12} = 0$ und $L_{12} = 0$ kennzeichnen die Verhältnisse der freien Leitung. Mit diesen Werten gehen (43) und (44) in die Beziehungen (45) über.

Es bleibt noch übrig, die Spannungsverteilung in der Spule bei ihren Eigenfrequenzen zu untersuchen.

Für die Frequenzen erster Art (Stromresonanz) berechnen wir die Spannungsgleichung:

$$\dot{V}_x = -\frac{\dot{E}}{2}\sin\left[q\left(x - 1/2\, l\right)\right]\cdot\frac{1}{\sin(1/2\, q\, l)}, \tag{46}$$

wenn $\dot{E}$ die Spannungsdifferenz an den Spulenklemmen bedeutet. Bild 12 zeigt für unser Zahlenbeispiel die Spannungsverteilung für die erste bis dritte Eigenfrequenz dieser Art.

Schwingt die Spule mit der Eigenfrequenz zweiter Art (Spannungsresonanz), so finden wir die Gleichung der Spannungsverteilung:

$$\dot{V}_x = \pm\, \tilde{\dot{V}}_\infty\left[\sin(q\, x - 1/2\, q\, l) + \sin(1/2\, q\, l)\left(e^{-p x} - e^{-p(l-x)}\right)\right]. \tag{47}$$

Der unendlich große Wert $\tilde{V}_\infty$ wird in Wirklichkeit wegen der Dämpfung in der Spule nicht erreicht. In Bild 13 sind die ersten drei Eigenfrequenzen dieser Art mit endlicher Amplitude dargestellt.

Die für die Eigenfrequenzen abgeleiteten Gleichungen gelten wegen der Vereinfachung unserer Rechnung nicht mehr für Schwingungen, deren Halbwellenlänge in der Größenordnung der Windungslänge und darunter liegt. Die Betrachtungen dieser Arbeit lassen aber auch auf dieses Gebiet extrem hoher Eigenfrequenzen wenigstens einen Ausblick zu.

Eine Wicklung bestehe aus n ganzen Windungen. Nehmen wir an, genau wie beim freien Drahte gleicher Länge gebe es eine Eigenfrequenz zweiter Art mit Spannungsknotenpunkten an den Enden, bei der die ganze Wellenlänge gerade eine Windung deckt. Die Spule muß sich vom freien Drahte dadurch unterscheiden, daß sich der Schwingungszustand im Innern durch Zusatzwellen aus dem der ersten und letzten Windung herausbildet. Den Ausgleichsvorgang für diesen Fall der Windungsresonanz haben wir aber bereits besprochen und in Bild 6 dargestellt. Offenbar bringen die Zusatzwellen in diesem Fall nur eine Änderung der Wellenamplitude von Windung zu Windung, nicht aber eine Änderung der örtlichen Phase hervor. Es ergibt sich daraus, daß für die Spule, genau wie für den freien Draht, dieser Schwingungsfall einen Eigenschwingungszustand zweiter Art bedeutet; das gleiche gilt offenbar für Wellen, deren Länge ein ganzzahliger Teil der Windungslänge ist. Wir können dabei sagen: Für eine Spule der Länge l, bestehend aus n Windungen, ist eine Anzahl von Eigenfrequenzen zweiter Art extremer Höhe gegeben durch die Beziehung:

$$q\,l_w = 2\,m\,\pi \quad \text{oder} \quad q\,l = 2\,m\,n\,\pi, \tag{48}$$

worin m jede beliebige ganze Zahl sein kann.

Ist n eine gerade Zahl, so sind, wenn wir vom Spulencharakter des Leiters zunächst absehen, auch diejenigen Frequenzen Eigenfrequenzen zweiter Art, bei denen die Halbwellenlänge eine Windung deckt. Um zu erkennen, daß dies nur für eine gerade Anzahl von Windungen gilt, müssen wir uns vor Augen halten, daß in der doppelpolig gespeisten Drahtschleife nur Schwingungen mit einem Spannungsknoten in der Mitte denkbar sind. Ein Spannungsbauch in der Mitte würde einen Stromknoten an dieser Stelle bedingen, von dem aus sich der Strom nach rechts und links gleich, aber mit entgegengesetztem Richtungssinn verteilen müsste. Dies führte zu entgegengerichteten Strömen an den Spulenenden, die die Spannungsquelle nicht liefern kann. Aus Bild 4 ist zu ersehen, daß die Übergangswellen auch in diesem Fall eine Verschiebung der örtlichen Phase nicht hervorbringen. Auch diese Eigenfrequenzen zweiter Art hat also die Spule mit dem gestreckten Drahte gemeinsam, und wir können daher für die Spule mit gerader Windungszahl schreiben:

$$q\,l_w = m\,\pi \quad \text{oder} \quad q\,l = m\,n\,\pi, \tag{49}$$

worin m wie früher jede ganze Zahl bedeuten kann. Für die Zweiwindungsspule stimmt dieses Resultat mit dem Ergebnis Rogowskis überein. Aber nur für diese werden durch Gleichung (49) alle Eigenfrequenzen zweiter Art gegeben. Eine Spule aus mehr als zwei Windungen hat außerdem noch viele Eigenfrequenzen extremer Höhe, die durch unsere Rechnung nicht gefaßt werden, und zwar um so mehr, je größer ihre Windungszahl ist.

Die einseitig unbegrenzte Spule.

Wir haben die Ergebnisse der Rechnung zunächst dazu benutzt, um die Eigenfrequenzen einer Spule festzustellen. Damit wurde vor allem der Zweck verfolgt, einen Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren zuzulassen, deren Rechnungen auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen hinauslaufen. So wichtig nun die Kenntnis



der Eigenfrequenzen auch sein mag, so gibt sie uns doch nicht mit aller Deutlichkeit das Wesen des Unterschiedes zwischen Spule und freigespanntem Draht.

Wir wissen, daß der Schwingungszustand eines Leiters sich durch die Übereinanderlagerung hin- und hereilender, an den Leiterenden sich brechender Wellen herausbildet. Wenn sich nun ein stationär gewordener Schwingungszustand, z. B. eine Eigenschwingung, des zur Spule gewickelten Drahtes von dem des freigespannten Drahtes in irgend etwas unterscheidet, so muß offenbar schon das erste Eindringen einer Welle anders vor sich gehen, je nachdem der Leiter zur Spule gewickelt oder frei ausgespannt ist. Hier also muß unsere Betrachtung einsetzen, wenn sie das Wesen des Vorgangs zeigen soll.

Wir wollen deshalb eine eindringende Welle auf ihrem ersten Hinlauf betrachten. Dies führt uns zum Bilde der einseitig unbegrenzten Spule. Obgleich eine solche Spule in Wirklichkeit nicht existiert, werden sich eine Reihe von Vorgängen durch dieses Bild besser erklären lassen als durch das Bild der Spule endlicher Länge. Denn es ist aus der Erfahrung und aus Versuchen bekannt, daß sich hochfrequente Wellen meist mit starker Dämpfung in einer Wicklung fortpflanzen und das Spulenende nur noch mit geringer Amplitude erreichen. Zu Eigenschwingungen in der Spule kommt es dann nicht.

Wir nehmen also an, daß eine einseitig begrenzte Spule von einer Wechselstromquelle hoher Frequenz gespeist wird. Die Vorgänge am Kopf der eindringenden Welle sollen hier außer Betracht bleiben. So viel aber ist sicher, daß sich an einem Querschnitt in hinreichender Entfernung vom Spulenanfang und nach hinreichend langer Zeit ein stationärer Zustand einstellen wird, derart, daß durch diesen Querschnitt eine Welle strömt, die die Form hat:

$$V_x = \tilde{\dot{V}}_i \sin(q x - \omega t + \psi). \tag{50}$$

Fassen wir diese Welle als Übereinanderlagerung zweier stehender Wellen auf, so können wir schreiben:

$$V_x = \tilde{\dot{V}}_i \sin q x \cos(\omega t - \psi) - \tilde{\dot{V}}_i \cos q x \sin(\omega t - \psi). \tag{51}$$

Diese Wellen bestehen natürlich nur in dem Teil der Wicklung, in dem der Vorgang schon stationär geworden ist, also in hinreichender Entfernung vom Spulenkopfe.

Für diese beiden im Innern der Wicklung stehenden Wellen gelten nun ohne weiteres die bisher angestellten Betrachtungen, deren Resultat die Gleichung (39) gab, so daß wir unter deren Anwendung mit Geltung vom Wicklungsanfang an schreiben können:

$$V_x = \tilde{\dot{V}}_i \left[\sin q x - A e^{-p x}\right] \cos(\omega t - \psi) - \tilde{\dot{V}}_i \left[\cos q x - B e^{-p x}\right] \sin(\omega t - \psi) \tag{52}$$

mit

$$A = \frac{\omega L_{12}}{(2 p^2 + q^2) l_w} \sqrt{\frac{K_{11}}{L_{1s}}} = \sim \frac{p q}{2 p^2 + q^2} \tag{53}$$

$$B = \frac{\omega^2 L_{12} K_{12}}{2 p^2 + q_2} \qquad = \sim \frac{p q^2}{2 p^2 + q^2} \gamma l_w.$$

Wir haben hierin, um zu einfachen Ausdrücken zu kommen, einen kleinen Fehler begangen, indem wir die in (36) und (36a) definierten Größen L_{0s} und L_{1s} gleich setzten, die Eigeninduktivität L_{11} des isoliert gedachten Drahtes also als klein gegen die Totalinduktivität L_{0s} der ersten Windung innerhalb der Spule annahmen. Bei Spulen mit nicht extrem schwacher Verkettung wird dies nur einen kleinen ziffernmäßigen Fehler hervorrufen; auf genaue Zahlenwerte aber kann es uns nicht ankommen. Mit γ ist das Kapazitätsverhältnis $K_{12} : K_{11}$ bezeichnet. Schreiben wir noch



$$C = 1 - B \tag{53a}$$

und setzen die Grenzbedingung $V_x = \dot{E} \sin(\omega t)$ für $x = 0$ ein, so können wir an Stelle von (52) schreiben:

$$V_x = \dot{E} \left\{ e^{-p x} \left[\sin \omega t - \frac{1}{\sqrt{A^2 + C^2}} \sin(\omega t - \psi) \right] - \frac{1}{\sqrt{A^2 + C^2}} \sin(q x - \omega t + \psi) \right\} \tag{54}$$

$$\text{mit } \cos \psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}} \text{ und } \sin \psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

Es dringt also in die Wicklung eine Sinuswelle ein. Darüber gelagert erscheint ein Wechselpotential, das örtlich nach einem hyperbolischen Gesetz vom Wicklungsanfang nach dem Ende zu abfällt. (Es sei hier wieder daran erinnert, daß wir die Exponentialfunktion nur näherungsweise an die Stelle einer ähnlichen Funktion gesetzt haben, daß also in Wirklichkeit das übergelagerte Spannungsglied das Exponentialgesetz nicht genau befolgen wird.)

Wir können uns mithin die am Anfang aufgedrückte Spannung $\dot{E}$ in 2 Komponenten zerlegt denken, von denen die eine $\dot{E}_q$ eine Sinuswelle zum Einziehen in die Wicklung bringt, während die andere $\dot{E}_p$ die hyperbelähnliche Verteilung hervorruft. Diese beiden Komponenten $\dot{E}_q$ und $\dot{E}_p$ sind gegeneinander phasenverschoben, wie das Diagramm des Bildes 14 zeigt.

Die Werte der beiden Komponenten lassen sich jetzt leicht bestimmen. Es wird:

$$\dot{E}_p = \dot{E} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2 + C^2}}. \tag{55}$$

$$\dot{E}_q = \dot{E} \sqrt{\frac{1}{A^2 + C^2}}.$$

Bild 14.

Wir wollen nun einige Beispiele betrachten, und zwar fassen wir 6 verschiedene Wicklungen ins Auge, wobei folgende Werte zugrunde gelegt werden:

$$p = 100 \ldots . 500 \ldots . 1000 \text{ km}^{-1}$$

$$\gamma l_w = 0{,}005 \ldots . 0{,}05 \text{ km}.$$

Die Bilder 15 und 16 zeigen die Spannungsverteilung in Abhängigkeit von der aufgedrückten Frequenz.

Es gelten die Bilder 15a—c für $\gamma l_w = 0{,}05$ bei den 3 genannten Werten für p. Wir erkennen, daß bei sehr niedrigen Frequenzen merkbar nur die Sinuswelle eindringt, bei sehr hohen Frequenzen aber merkbar nur eine hyperbelähnliche Verteilung besteht. Der Umschwung geht in einem breiten kritischen Gebiete vor sich, wobei sowohl die Amplitude der eindringenden Sinuswelle, als auch der Anfangswert der Hyperbelverteilung den Wert der aufgedrückten Spannung beträchtlich übersteigen.

Zu bedenken ist wieder, daß diese Betrachtung nur bis hinauf zu Frequenzen gilt, deren Wellenlänge noch einige Windungen deckt. Es ist aber wahrscheinlich, daß ein zweiter Umschwung eintritt, wenn sich die Wellenlänge der Windungslänge nähert; denn bei Übereinstimmung von Windungs- und Wellenlänge haben nebeneinanderliegende Teilchen benachbarter Windungen gleiche Strom- und Spannungswerte, so daß dieselben Verhältnisse bestehen wie bei extrem niedrigen Frequenzen. In diesem Falle also wird eine reine Sinuswelle in die Wicklung ziehen. Da das gleiche gilt, wenn die Wellenlänge ein ganzer Teil der Windungslänge ist, schließen wir: In diesem Gebiete extrem hoher Frequenzen wird offenbar ein

periodischer Wechsel zwischen dem Einziehen einer reinen Sinuswelle und einer rein oder nahezu rein hyperbolischen Verteilung bestehen.

Die Maxima der Wellen- und der Hyperbelkomponente liegen in unseren Bildern 15a—c in unmittelbarer Nähe einer kritischen Frequenz, die dadurch gekennzeichnet ist, daß die Größe C = o, also B = 1 wird. Die kritische Frequenz ν_k wird also nach (53) durch die Beziehung bestimmt:

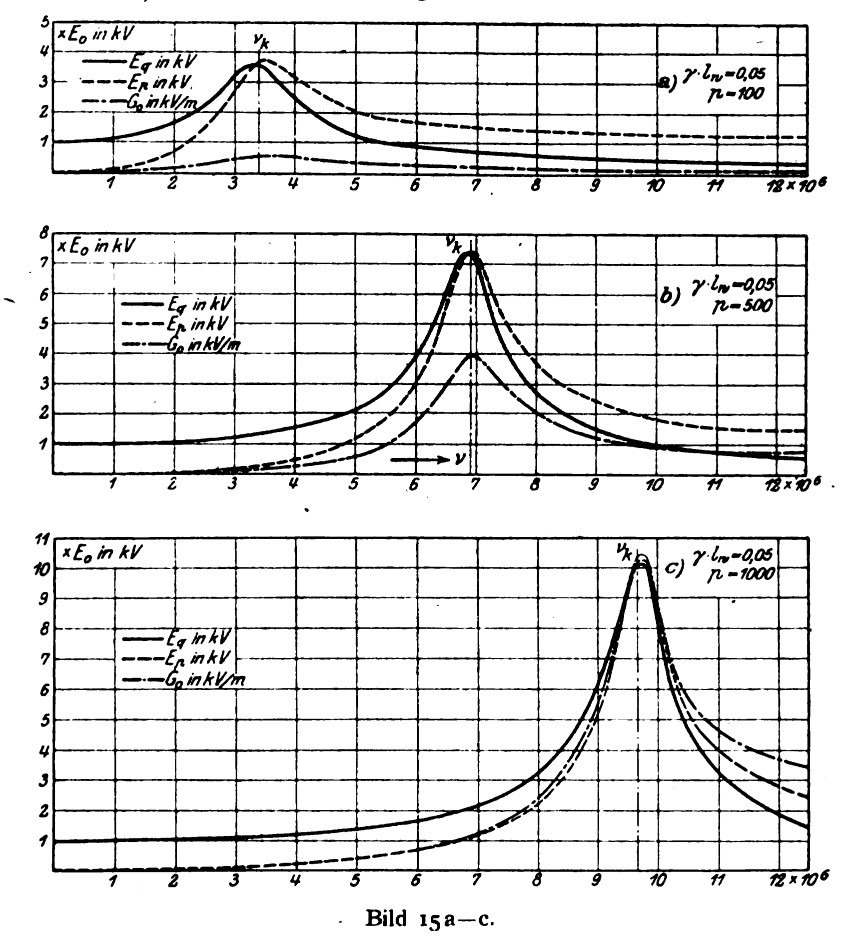


Bild 15a—c.

$$q_k = \frac{\sqrt{2}}{l_w} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L_{0s}}{L_{12}}\left(\frac{K_{12}}{K_{11}} - \frac{L_{0s}}{L_{12}}\right)}}. \tag{56}$$

$$\nu_k = \frac{c}{2\pi} \cdot q_k.$$

Und die Höchstwerte von $\dot{E}_q$ und $\dot{E}_p$ werden angenähert:

$$\dot{E}_q = \sim \dot{E}_p = \sim \sqrt{2}\,\dot{E}\left(\sqrt{1 - p\gamma l_w} + \frac{1}{\sqrt{1 - p\gamma l_w}}\right). \tag{57}$$

Wird der Ausdruck $1 - p\gamma l_w$ oder, anders ausgedrückt, der Wert $\frac{K_{12}}{K_{11}} - \frac{L_{0s}}{L_{12}}$ gleich null, so ist die kritische Frequenz unendlich; wird er negativ, so wird q_k imaginär, und es gibt keine kritische Frequenz. Für diesen Fall gilt Abbildung a des Bildes 16, die für p = 100 bei $\gamma l_w = 0{,}05$ entworfen ist; die Sinuswelle wächst

auf den doppelten Wert der aufgedrückten Spannung, und eine Hyperbelverteilung schafft den Ausgleich, deren Anfangswert der aufgedrückten Klemmenspannung gleich und entgegen gerichtet ist. Bei den höheren Werten von p (Bilder b und c) gibt es wieder eine kritische Frequenz, jedoch sind die Spannungen beträchtlich tiefer als bei den Beispielen mit $\gamma l_w = 0{,}005$.

Es fragt sich nun, wie die Spulen beschaffen sein müssen, bei denen wir eine kritische Frequenz erwarten dürfen. Der Ausdruck (56) lehrt uns, daß die Bedingung besteht:

$$\frac{K_{12}}{K_{11}} > \frac{L_{0s}}{L_{12}} \text{ oder } K_{12} L_{12} > \frac{1}{c^2}. \tag{58}$$

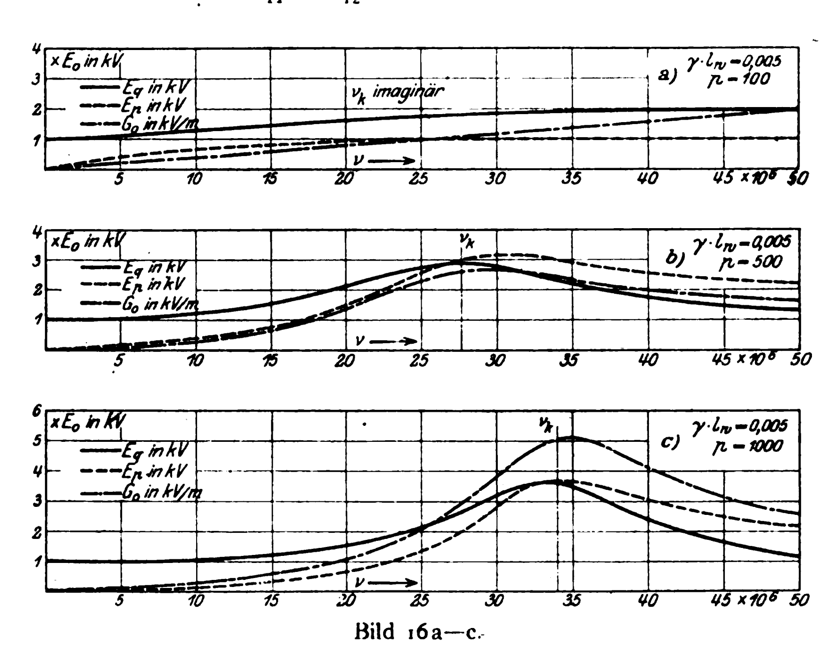


Bild 16a—c.

Setzen wir für eine Spule aus Runddraht:

$$K_{12} = \frac{1}{4 l_w \frac{d - \frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}\delta} \cdot q \cdot 10^6} \text{ Farad/km.} \tag{58}$$

$$L_{12} = l_w \left(1 + \frac{4 h^2}{d^2}\right) 10^{-4} \text{ Henry/km,}$$

worin h den Erdabstand einer Windung, d den Mittenabstand benachbarter Windungen und δ den Drahtdurchmesser bedeuten, so ergibt sich:

$$l_w \frac{d - \frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}\delta} < \frac{1}{4} l_w \left(1 + 4 \frac{h^2}{d^2}\right). \tag{60}$$

Für die verschiedenen Werte von $\frac{h}{d}$ sind die zugehörigen Maximalwerte von $\frac{d}{\delta}$ in der Kurve Bild 17 aufgetragen. Die schraffierte Fläche kennzeichnet das Gebiet, in welchem eine kritische Frequenz auftritt. Die meisten praktisch in Frage kommenden Spulen werden diesem Gebiete angehören.

Für Spulen dieses Gebietes, deren Daten von der Grenze hinreichend weit entfernt liegen, also für Spulen mit sehr hoher Windungskapazität, können wir



annehmen, daß $L_{0s} : L_{12}$ gegen $K_{12} : K_{11}$ verschwindet. Dann ergibt sich für die kritische Frequenz selbst aus dem Ausdruck (56)

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{l_w} \frac{1}{\sqrt{L_{0s} K_{12}}} \sqrt{\frac{L_{12}}{L_{1s}}}. \tag{61}$$

Würden wir die Induktivität nicht unmittelbar benachbarter Windungen vernachlässigen, d. h. L_{1s} gleich L_{12} setzen, so ergäbe sich für die kritische Frequenz der Ausdruck, der von mir bei ganz anderem Rechnungsgange früher abgeleitet wurde.

Die kritische Frequenz der vorliegenden Rechnung scheidet genau wie die meiner früheren Arbeit und wie die von Wagner am Bilde des Kettenleiters festgestellte kritische Frequenz zwei Gebiete: Im unteren Gebiete ist eine Komponente der aufgedrückten Spannung, die eine Sinuswelle in die Wicklung sendet, die größere, im oberen Gebiete dagegen überwiegt eine zweite Komponente, die zu einer hyperbelartigen Potentialverteilung führt. Jedoch war dieses Resultat durch die Vernachlässigung des gegenseitigen Einflusses nicht unmittelbar benachbarter Windungen bei Wagner und mir in einigen Punkten verfälscht. Die früher errechnete Veränderlichkeit der Wellenlängenkonstante q und der Hyperbelkonstante p besteht nach der exakteren Rechnung nicht. Ferner war es bei der früheren Rechnung unmöglich, die Grenzbedingung an den Spulenenden, die das einseitige Fehlen der Nachbarwindungen zu berücksichtigen hat, exakt zu erfassen. Jede nur angenäherte Berücksichtigung der Verhältnisse am Ende führte aber zu einem äußerst krassen Umschwung von der Sinus- zur Hyperbelverteilung bei der kritischen Frequenz. Die damals von mir ausgesprochene Vermutung, daß die Berücksichtigung des gegenseitigen Einflusses nicht unmittelbar benachbarter Windungen einen sanfteren Übergang zeigen würde, hat sich als richtig erwiesen.

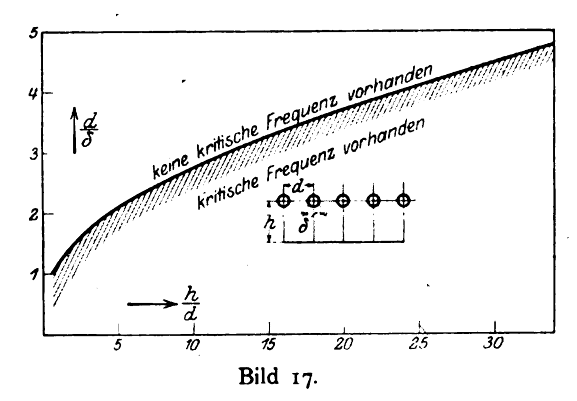


Bild 17.

Nach meiner früheren Rechnung war die kritische Frequenz noch dadurch ausgezeichnet, daß sie (abgesehen von Resonanzerscheinungen im Spuleninnern, also bei einer Wicklung, die als einseitig unbegrenzt angesehen werden kann) durch ein Maximum des Spannungsgradienten am Spulenanfang ausgezeichnet war. Es soll noch untersucht werden, ob wir auch jetzt zu diesem Resultate kommen.

Differenzieren wir Gleichung (54) nach x und setzen den Ausdruck für $x = 0$ an, so erhalten wir als Amplitude des Gradienten am Wicklungsanfang:

$$\dot{G}_0 = \dot{E} \sqrt{\frac{p^2 (A^2 + B^2) + q^2 + 2 p q A}{A^2 + C^2}}. \tag{62}$$

In den Bildern 15 und 16 ist dieser Anfangsgradient in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen. Es zeigt sich wieder das Maximum des Gradienten bei der kritischen Frequenz, jedoch bei weitem nicht so ausgeprägt, wie es die frühere Rechnung bei vereinfachten Annahmen lieferte.

Der Gradient am Anfang der Wicklung ist allerdings nicht der höchste in der Spule auftretende. Die Spannungskomponenten der Sinus- und der Exponentialverteilung sind hier derart phasenverschoben, daß die Vektoren ihrer Gradienten nicht gleichgerichtet sind. Nach dem Spuleninnern zu bleibt die Phase des nach dem Exponentialgesetz verteilten Potentials bestehen, während das von der ein-

dringenden Sinuswelle herrührende Potential seine Phase mit dem Orte ändert. In einiger Entfernung vom Wicklungsanfang werden die beiden Potentiale um 90° gegeneinander verschoben sein, so daß ihre Gradienten sich algebraisch addieren. Da aber in diesem Punkte das Potential der Exponentialverteilung schon kleiner als am Anfang ist, wird das wirkliche Maximum des Gradienten zwischen dem Wicklungsanfang und diesem Punkte liegen. Es hat keinen praktischen Zweck, Lage und Größe dieses Maximums genau zu bestimmen.

Mit den Resultaten der Versuche, die ich seinerzeit auf Anregung von Prof. Petersen im Laboratorium der Technischen Hochschule zu Darmstadt anstellte und im Bd. V dieser Zeitschrift (S. 408) veröffentlichte, stimmen die Ergebnisse der vorliegenden Rechnung völlig überein. Es sei noch darauf hingewiesen, daß nach dem Ergebnis der vorliegenden Arbeit die damals festgestellte Verkürzung der Wellenlänge in einer Wicklung mit wachsender Frequenz nur eine scheinbare ist, da sie durch die Knickungen der Verteilungskurve des Potentials vorgetäuscht wird. Es war daher ein Fehler, aus dieser scheinbaren Verkürzung auf eine Abnahme der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit wachsender Frequenz zu schließen.

Eine experimentelle Feststellung der kritischen Frequenz wird sich nur an sehr langen oder mit starker Dämpfung behafteten Spulen durchführen lassen, weil anderenfalls die Ausbildung der Eigenschwingungen, die ober- und unterhalb der kritischen Frequenz auftreten, das Bild stören würde.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, das Problem der stationär mit Wechselstrom gespeisten Spule auf eine andere Weise, als bisher geschehen, rechnerisch zu klären. Die Ergebnisse der Rechnung stimmen insofern mit den Andeutungen von Rüdenberg und den früheren Arbeiten von Wagner und mir überein, als sie die Existenz einer kritischen Frequenz zeigen, die zwei Frequenzgebiete scheidet, ein unteres Gebiet, in dem die Ausbreitung der aufgedrückten Spannung vorwiegend durch eine eindringende Sinuswelle erfolgt, und ein oberes Gebiet, in dem sich die aufgedrückte Spannung, nach dem Wicklungsinnern zu abklingend, nach einem Exponentialgesetz verteilt. Der Übergang erfolgt ganz allmählich und unter Spannungserhöhung. In der Nähe des Wicklungsanfangs tritt die maximale Beanspruchung der Windungen (wenn von Eigenschwingungen der Spule abgesehen wird) bei der kritischen Frequenz auf. Eigenschwingungen können, wie auch Rogowski gezeigt hat, im Gegensatz zu früheren Ergebnissen Wagners, sowohl unter- wie oberhalb der kritischen Frequenz auftreten[1]).

Die vorliegende Rechnung gilt bis zu Wellenlängen, die nicht kürzer als etwa 10 Windungslängen sind, praktisch also für fast alle auftretenden Frequenzen.

[1]) K. W. Wagner hat nachträglich selbst darauf hingewiesen, daß seine am Kettenleiter abgeleiteten Ergebnisse nicht auf die wirkliche Spule anwendbar seien (A. f. E. VII. S. 32). In meiner früheren Rechnung spielte die kritische Frequenz durchaus nicht die Rolle einer Grenzfrequenz für die Eigenschwingungen einer Spule. Dies wird von Gothe (A. f. E. IX, S. 3) irrtümlich angenommen.



Zur Theorie des Parallelbetriebes von Synchronmaschinen[1]).

Von

G. Benischke.

Unter diesem Titel veröffentlichte Herr L. Dreyfus auf S. 132, Bd. 8 eine Polemik gegen die Darstellung des Pendelns in der 2. Auflage meines Buches: „Der Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen" (Braunschweig 1918), die mir erst jetzt bekannt geworden ist. Er nennt meine Darstellung einen Streitruf gegen die „klassische" Theorie und meint, daß ich ihr zuweilen Behauptungen zur Last lege, die ihr durchaus fern liegen, und daß ich mich zur herrschenden Theorie nicht durch Annahme einer Kupplung an sich, sondern durch Annahme einer losen Kupplung ($\varkappa < 1$) in Widerspruch setze. Diese und einige weitere Bemerkungen zeigen, daß Herr Dreyfus die Entwicklung dieser Frage seit dem auf Boucherot beruhenden Artikel von G. Kapp (ETZ. 1899, S. 134) nicht kennt, insbesondere nicht meine Veröffentlichungen[2]), in denen ich jeweils gezeigt habe, wie die die Kupplung vernachlässigende „klassische" Resonanztheorie mit den Erfahrungstatsachen in Widerspruch gerät. Infolge dieser Widersprüche hat sich dann eine Annäherung an meine Anschauung vollzogen, die sich besonders in Aufsätzen von Fleischmann (ETZ. 1906, S. 873) und von Weißhaar (E. u M. 1908, S. 558) zeigt[3]), wo eine lose Kupplung in die Gleichungen eingeführt wurde. Die Folgerungen, die sich daraus ergeben, wurden allerdings nicht gezogen, sondern es blieb bei der Annahme einer kritischen Eigenschwingungszahl wie bei der Resonanz eines sehr schwach gekuppelten Systems.

Herr Dreyfus stellt dann eine Reihe von Sätzen auf, die zum Teil in einem gar nicht vorhandenen Gegensatz zu mir gebracht werden, zum Teil aber nicht richtig sind. Es würde einen sehr umfangreichen Artikel geben, wenn ich jeden einzelnen vornehmen wollte. Es genügt, die unrichtigen Grundlagen seiner Ansicht zu zeigen.

Er behauptet, die herrschende Theorie behandle zwei parallelgeschaltete Maschinen nicht als ungekuppelte Systeme, die Kupplungsglieder $\varkappa \alpha_2$, $\varkappa \alpha_1$ seien nicht vernachlässigt. x werde niemals vernachlässigt, wohl aber könne α_2 (der Pendelausschlag) gelegentlich gleich null gesetzt werden. Es ist nur zu verwundern, daß dies sonst noch niemand bemerkt und meinen Einwänden entgegengehalten hat. Indem α_2 gleich null gesetzt und das Dämpfungsglied vernachlässigt wird, entsteht aus der vollständigen Gleichung[4])

[1]) Nachdem mit vorliegendem Aufsatz auch Herr Benischke zur Sprache kommt, schließt die Schriftleitung die Erörterung.

[2]) ETZ. 1899. S. 872; 1903, S. 195, 891, 1095. „Elektr. und Maschinenbau" 1907, S. 1009 Vergl. auch Duffing, ebenda 1908, S. 1085; 1909, S. 285.

[3]) Fleischmann geht von einem Doppelpendel aus, welches sich von dem von mir herangezogenen nur dadurch unterscheidet, daß die lose Kupplung aus einer Spiralfeder besteht, statt aus einem durch Gewicht gespannten Faden. Daß ich beim Parallelbetrieb die doppelte Resonanzmöglichkeit schwach gekuppelter Systeme, die ich in meinem Buch „Wiss. Grundlagen d. Elektrot" (§ 202, 203) behandelt habe, nicht berücksichtige, erklärt sich daraus, daß da die Kupplung zwar keine starre, aber doch eine so starke ist, daß die zweite Resonanzmöglichkeit, selbst theoretisch bei einer Schwingungszahl eintreten würde, die bei Maschinen ganz außer Betracht kommt. Im Verein mit der starken Dämpfung bewirkt die starke Kupplung eine derartige „Scheu von der Resonanz", daß überhaupt keine Resonanz, sondern nur Interferenzschwebungen zustande kommen. Mit Recht habe ich hier M. Wien zitiert, der mir auch brieflich zugestimmt hat. (Er schrieb mir am 30. Nov. 1902 mit Bezug auf meinen ersten Artikel über Parallelbetrieb: „Zweifellos handelt es sich hier um gekoppelte Schwingungen. Ich habe aber nur die einfachsten Fälle annähernd durchgeführt. Der Fall der parallelgeschaltenen Wechselstrommaschinen liegt wohl komplizierter.") Daß Herr Dreyfus sich daran stößt, ist um so sonderbarer, als er doch starre Kupplung ($\varkappa = 1$) annimmt, also jede der beiden Resonanzmöglichkeiten gänzlich ausschließt.

[4]) Auf S. 33 meines Buches ist in dieser Gleichung leider das +-Zeichen vor G weggeblieben.



$$T_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + H_1 \frac{d \alpha_1}{dt} + G_1 \alpha_1 + \varkappa \alpha_2 = F_1 \sin \varrho_1 t$$

die Gleichung der „klassischen Theorie"

$$T_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + G_1 \alpha_1 = F_1 \sin \varrho_1 t.$$

Diese entspricht aber nicht dem Falle einer starren Kupplung, wie Herr Dreyfus annimmt, sondern dem eines hemmungslos mitschwingenden Systems ohne Rückwirkung des gekuppelten Systems, wie es Görges durch ein Modell mit sehr schwacher Kupplung demonstriert hat (ETZ. 1903, S. 561). Man sieht ja, daß das Kupplungsglied aus der Gleichung verschwunden ist. Dennoch sagt Herr Dreyfus, das sei keine Vernachlässigung der Kupplung, sondern das sei gerade der Fall der starren Kupplung ($\varkappa = 1$). Mein Fehler läge demnach darin, daß ich das Kupplungsglied nicht vernachlässige wie die herrschende Theorie. Ein eigenartiger Fehler! Da die Interferenzschwingungen nicht bestritten werden, so wären sie also nach Herrn Dreyfus bei starrer Kupplung möglich. Tatsächlich aber können starr gekuppelte Systeme nur eine und dieselbe unveränderliche, nämlich nur die ihnen aufgedrückte Schwingung ausführen. Die Vertreter der Resonanztheorie dürften erstaunt sein, daß ihnen die Annahme einer starren Kupplung zugemutet wird, denn sie rechnen ja mit einem kritischen Trägheitsmoment, das sich aus einer kritischen Eigenschwingung ergibt. Das ist jene, bei welcher Resonanz mit der aufgedrückten Schwingung eintritt. Diese Resonanz setzt eine sehr schwache Kupplung voraus. Bei stärkerer Kupplung, wie ich sie im Gegensatz zur herrschenden Theorie annehme, kommt keine Resonanz zustande, sondern nur Interferenzschwebungen. Bei starrer Kupplung ($\varkappa = 1$) gibt es auch diese nicht mehr, sondern nur eine gemeinsame, aufgedrückte Schwingung. Dieser Fall besteht bei zwei Maschinen, die auf gemeinsamer, torsionsfreier Achse sitzen (§ 18 meines Buches). Nach der Ansicht von Dreyfus wäre also der Parallelbetrieb solcher Maschinen und der Parallelbetrieb zweier getrennter Maschinen in physikalischer Hinsicht identisch.

Da die herrschende Resonanztheorie mit den beobachteten Tatsachen in Widerspruch geraten ist, hat sie zur Rettung der Theorie negative Dämpfung, ja sogar selbsterregte Schwingungen angenommen Herr Dreyfus sucht das durch den Hinweis auf die Tatsache zu begründen, daß man durch Vorschaltung von genügend Ohmschem Widerstand die Maschinen zum Pendeln und schließlich zum Außertrittfallen bringen kann[1]). Also sogar der arbeitsverzehrende Widerstand soll eine negative, d. h. bewegungsvergrößernde Dämpfung darstellen. Mit einer solchen physikalischen Unmöglichkeit muß sich die herrschende Theorie aus der Verlegenheit helfen. Ein Induktionsmotor kann bekanntlich nicht von selbst auf Synchronismus kommen oder mit negativer Schlüpfung laufen, weil ihn die arbeitsverzehrende Reibung und die bei negativer Schlüpfung eintretende Stromerzeugung daran hindert. Kuppelt man ihn mit einem Hilfsmotor, der den Reibungsverlust deckt und bei negativer Schlüpfung die nötige Arbeit zuführt, so kommt der Induktionsmotor auf Synchronismus und negative Schlüpfung. Wenn man den Hilfsmotor und seine Stromquelle unbeachtet läßt, wird man allerdings zu der Ansicht kommen, daß der Induktionsmotor von selbst mit negativer Schlüpfung arbeitet. Genau dasselbe ist es, wenn man negative Dämpfung (ein schon an und für sich unmöglicher physikalischer Begriff) und selbsterregte Schwingungen annimmt. Natürlich ist die Ursche der Schwingungszunahme oder Schwingungserregung nicht immer so leicht zu sehen, wie in diesem Beispiel der Hilfsmotor, namentlich wenn sie im äußeren Stromkreis liegt. Vorhanden ist sie aber immer.

[1]) Der wirkliche Grund liegt, wie ich schon auf S. 45 meines Buches betont habe, darin, daß infolge der Schwächung des Synchronisierungsstromes durch den vorgeschalteten Widerstand die Kupplung zu schwach geworden ist.



Es ist bemerkenswert, daß die Interferenz zwischen aufgedrückter und Eigenschwingung bei loser Kupplung, wie sie insbesondere beim Pendeln eines Synchronmotors rein zur Geltung kommt, in neuerer Zeit in der drahtlosen Telegraphie nützliche Anwendung gefunden hat, nämlich beim Schwebungs-Empfang mittels einer Glühkathodenröhre. Die ankommenden Wellen sind für den lose gekuppelten Röhrenstromkreis aufgedrückte Schwingungen. Sie erregen die Eigenschwingung dieses Stromkreises, die in diesem Falle mit Absicht so eingestellt wird, daß sie sich von der aufgedrückten Schwingung nur wenig unterscheidet, so daß die gewünschten Schwebungen entstehen. Bei einem pendelnden Synchronmotor wird die vom ungleichförmigen Antrieb seines Generators erzeugte mechanische Schwingung dem Synchronmotor durch den Ausgleichsstrom aufgedrückt. Da die Kupplung durch den Ausgleichsstrom keine starre sondern eine lose ist, wird die durch Trägheitsmoment und synchronisierende Kraft bestimmte Eigenschwingung erregt. Ist der Unterschied gegen die aufgedrückte Schwingung klein, so entstehen mechanische Schwebungen in genau derselben Weise wie die elektrischen Schwebungen bei dem genannten Schwebungs-Empfang.

Über Verstärkertransformatoren[1]).

Von

K. Mühlbrett.

(Mitteilung aus den Laboratorien der Inspektion des Torpedowesens in Kiel.)

I. Die Theorie.

A. Einleitung.

Der Versuch, einen Wechselstrom von 50 Per./Sek. mit einem Verstärker, der gewöhnlich für Ströme von etwa 1000 Per./Sek. benutzt wurde, zu verstärken, zeigte die überraschende Tatsache, daß der Apparat schwächte statt zu verstärken. Die Ursache konnte nicht an den Elektronenröhren liegen, da diese von der Frequenz ganz unabhängig sein sollten. Daher mußten die Transformatoren schuld an dem schlechten Arbeiten haben.

Schon vorher hatte Barkhausen gefunden, daß die Sekundärspule der Gittertransformatoren in Resonanz mit Strömen von ungefähr 1000 Per./Sek. schwingt, daß dabei die Spulenkapazität etwa 100 cm groß ist und daß demgemäß eine Belastung von 10^6 Ohm schon die Sekundärspannung stark herunterdrückt, weil sie die Resonanz ganz unscharf macht. Dem Verfasser wurde die eingehende Untersuchung übertragen. Die Ergebnisse werden hiermit vorgelegt.

Die Arbeit ist so aufgebaut, daß zunächst zwei Gesichtspunkte für den Entwurf der Gittertransformatoren aufgestellt und Zahlenangaben gebracht werden. Beiden Zielen, möglichst hoher Übersetzung und richtiger Widerstandsanpassung, dient die Ausnutzung der Stromresonanz, die eingehend behandelt wird. Schließlich wird die Frage nach der Spannungsresonanz und den Oberschwingungen gestreift, die durchaus praktische Bedeutung hat, da es denkbar wäre, hiermit einen Verstärker gleichzeitig für mehrere Frequenzen zu verwenden.

Es folgt eine Beschreibung der Messungen, insbesondere der Aufnahme von Resonanzkurven mit dem Röhrenelektrometer, und schließlich die Mitteilung der Meßergebnisse. Eine kurze Zusammenfassung und die Angabe einer für die Praxis geeigneten Prüfmethode bildet den Schluß.

B. Gesichtspunkte für die Bemessung der Transformatoren.

Wir teilen die Transformatoren eines Verstärkers ein in

1. Gittertransformatoren, die vor dem Gitter einer Röhre liegen, und zwar
   a) den Eingangstransformator, der unmittelbar von der schwachen Stromquelle gespeist wird;
   b) die Durchgangstransformatoren, die zwischen je zwei Röhren liegen;
2. den Ausgangstransformator, der dem Verbraucher die verstärkte Leistung zuführt.

1. Verstärkungsgrad.

Ein Gittertransformator mit folgender Röhre stellt eine Einheit dar, deren Verstärkungsgrad

$$W = \sqrt{\frac{N_a}{N_T}} \qquad (1)$$

sich aus der vom Transformator aufgenommenen Leistung N_T und der im Anodenkreis der Röhre abgegebenen Nutzleistung N_a berechnet.

[1]) Vgl. hierzu die Arbeit von Schottky über „Hochvakuumverstärker", Teil I und vom Verfasser über „Vakuumröhren als Verstärker und Schwingungserzeuger". Archiv f. Elektrot. VIII, 1 und 32, 1919; ferner: „Über die Berechnung von Übertragern für Telephonzwecke" von Holm, ebenda VI, 113, 1917 und VIII, 371, 1920.

$$N_a = \mathfrak{J}_a^2 \cdot R_b, \tag{2}$$

wenn $\mathfrak{J}_a$ der Anodenwechselstrom und R_b der Widerstand der Belastung ist. Nach Barkhausen[1]) wird

$$\mathfrak{J}_a = \frac{\frac{1}{D} \cdot \mathfrak{P}_g}{R_i + R_b}. \tag{3}$$

Ferner gilt

$$N_T = \mathfrak{P}_I \cdot \mathfrak{J}_I = \frac{\mathfrak{P}_{II}^2}{U^2 \cdot \mathfrak{R}_I}, \tag{4}$$

wobei D der Durchgriff der Röhre,

$\mathfrak{R}_i$ der Widerstand der Anodenseite der Röhre,

$R_I = \mathfrak{P}_I / \mathfrak{J}_I$ der Primärwiderstand } des Transformators,

$U = \mathfrak{P}_{II} / \mathfrak{P}_I$ die Übersetzung[2]) } des Transformators,

$\mathfrak{P}_g = \mathfrak{P}_{II}$ die am Gitter liegende Wechselspannung = der Sekundärspannung des Transformators ist.

Nach Einführung dieser Größen wird

$$W = \frac{U}{D} \cdot \frac{\sqrt{\mathfrak{R}_I \cdot R_b}}{R_i + R_b}. \tag{5}$$

Wenn $R_i = R_b$, dann wird

$$\mathbf{W = \frac{1}{2} \cdot \frac{U}{D} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_I}{R_b}}}. \tag{5a}$$

Zahlenbeispiel.

Eingangstransformator: $U_e = 20$ $\mathfrak{R}_{I\,e} = 5\,000\ \Omega$,

Durchgangstransformator: $U_d = 3$ $\mathfrak{R}_{I\,d} = 100\,000\ \Omega$,

Röhre: $D = 0{,}1$ $R_i = R_b = 100\,000\ \Omega$,

Eingang: $W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{0{,}1} \cdot \sqrt{\frac{5\,000}{100\,000}} = 22$,

Durchgang: $W_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{0{,}1} \cdot \sqrt{\frac{100\,000}{100\,000}} = 15$.

2. Die Güte.

Neben der hohen Übersetzung kommt es bei einem Gittertransformator auf einen guten Wirkungsgrad an. Der Transformator ist also um so besser, je höher die Sekundärspannung bei gleichen Aufwand an der Primärseite ist. Man erklärt daher als „Güte"

$$G_T = \frac{\mathfrak{P}_{II}^2}{\mathfrak{P}_I \cdot \mathfrak{J}_I} = U^2 \cdot \mathfrak{R}_I\ ^{3)}. \tag{6}$$

Die Bedeutung der „Güte" liegt darin, daß sich (1) umformen läßt in

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{G_T \cdot G_R}, \tag{1a}$$

wobei G_R die Güte der Röhre, vgl. darüber die erwähnte Arbeit von Barkhausen im Jahrbuch.

Der Ausgangstransformator ist nur nach seinem Wirkungsgrad zu bewerten.

[1]) Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie 14, 39, 1919.

[2]) Die Übersetzung ist, wie die Messungen gezeigt haben, stets gleich dem Verhältnis der Windungszahlen.

[3]) Im Zähler steht $\mathfrak{P}_{II}^2$, weil auch im Nenner ein Produkt steht.

3. Widerstandsanpassung und Spannungserhöhung durch Transformatoren.

Zu der obigen Forderung tritt noch die bekannte Bedingung, daß zwecks größter Leistungsausbeute alle Widerstände einander angepaßt sein müssen.

Für den Ausgangstransformator gilt neben der Hauptforderung guten Wirkungsgrades und richtiger Widerstandsanpassung noch der Gesichtspunkt: Er soll den Hörer von der hohen Anodengleichspannung fernhalten.

Wenn eine Stromquelle mit der EMK $\mathfrak{E}$ und dem inneren Widerstand R_i mit einem Verbraucher R_b belastet ist, dann wird die Nutzleistung am größten für

$$R_i = R_b.$$

Ist es nicht möglich, die Widerstände des Erzeugers und Verbrauchers in dieser Weise anzupassen, dann schaltet man in der Schwachstromtechnik allgemein einen Transformator dazwischen, der hier als verlustlos und streuungsfrei angesehen wird.

In bekannter Weise berechnet man die Spannung am Verbraucher

$$\mathfrak{P}_o = \mathfrak{E} \cdot \frac{R_b}{R_b + R_i}$$

bei unmittelbarem Anschluß,

$$\mathfrak{P}_{II} = \mathfrak{E} \cdot \frac{\frac{R_b}{U}}{\frac{R_b}{U^2} + R_i}$$

bei Transformation.

Die Spannung $\mathfrak{P}_{II}$ hat bei veränderlicher Übersetzung U den Höchstwert

$$\mathfrak{P}_{II\,mx} = \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{E} \cdot \sqrt{\frac{R_b}{R_i}}$$

für

$$U_x = \sqrt{\frac{R_b}{R_i}}. \qquad (7)$$

Da die verstärkte Leistung von der Gitterspannung abhängt, so ist es wichtig zu wissen, welchen Spannungsgewinn V das Einschalten eines Transformators bringt. Die Spannungserhöhnng bei günstigster Übersetzung U_x ist

$$V = \frac{\mathfrak{P}_{II\,mx}}{\mathfrak{P}_o} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_b}{R_i}} + \sqrt{\frac{R_i}{R_b}}\right). \qquad (8)$$

Wenn wie hier der Widerstand des Verbrauchers, d. i. der Gitterwiderstand R_g der Röhre, sehr groß ist gegen den innern Widerstand R_i des Erzeugers, dann wird

$$\frac{R_i}{R_b} \approx 0$$

und

$$V \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{R_b}{R_i}}. \qquad (8a)$$

4. Praktische Zahlenwerte.

Der Eingangstransformator wird meist von einem Detektor der drahtlosen Telegraphie als Erzeuger eines Wechselstroms von etwa 1000 Per./Sek. gespeist. Als wirksamen innern Widerstand kann man etwa 5000 Ohm annehmen. Der Primärwiderstand des mit der Röhre belasteten Eingangstransformators soll ebenso groß sein. Es ist freilich nicht möglich, für jeden Detektor den geeigneten Transformator zu wickeln, aber die Erfahrung lehrt, daß dies nicht nötig ist, denn das „Einstellen des Detektors auf größte Empfindlichkeit“ ist wahrscheinlich nichts anderes als ein Anpassen des Widerstandes.

Die Sekundärseite des Eingangs- und der Durchgangstransformatoren arbeitet auf das Gitter der nächsten Röhre, die im Idealfalle zwischen Gitter und Glühkathode einen unendlich großen Widerstand hat. Die Übersetzung müßte daher unendlich groß werden, wenn nicht die Eigenkapazität der Wicklung als Belastung des Transformators wirkte und die Spannung verminderte. Man wird aber trotzdem bestrebt sein, möglichst viel Windungen aufzubringen und zugleich die Kapazität herabzudrücken, was man durch die schon bei Funkeninduktorien bekannte Scheibenwicklung erreicht. In Wirklichkeit ist der Gitterwiderstand durchaus nicht über alle Maßen groß; es wird aber verlangt, daß er nicht unter 10^7 Ohm sinkt, damit der Transformator nicht merklich belastet wird. Einfluß auf die Größe des Gitterwiderstandes hat das Gitterpotential — bei einer Verminderung um 0,2 Volt steigt der Widerstand auf das Doppelte — die Luftleere, die Rückwirkung der Anodenseite und die Isolation der Röhre und ihrer Zuleitungen.

Der Durchgangstransformator wird von einer Röhre gespeist, deren innerer Widerstand auf der Anodenseite etwa 10^5 Ohm beträgt. Für die Primärseite des Ausgangstransformators gilt dasselbe; seine Sekundärseite ist in der Regel mit einem „1000 Ohm"-Telephon belastet, dessen Wechselwiderstand mit rund 5000 Ohm angenommen sei.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man für den idealen Transformator:

Tabelle 1.

Transformator	$R_i = \mathfrak{R}_I$	$\mathfrak{R}_{II} = R_b$	U_x	V
Eingang	5000 Ω	$10^7\,\Omega$	45	23
Durchgang . . .	100000 Ω	$10^7\,\Omega$	10	5,0
Ausgang	100000 Ω	5000 Ω	$\frac{1}{4{,}5}$	2,3

Die hier für Gittertransformatoren berechnete Übersetzung wird in der Praxis nicht erreicht, wahrscheinlich, weil die Herstellung einer genügend kapazitätslosen Wicklung zu umständlich ist.

Die geringe Verbesserung, die der Ausgangstransformator bringt — er erhöht bei 50 % Wirkungsgrad[1]) die Leistung im Telephon, genaue Anpassung vorausgesetzt, auf das $2{,}3^2 \cdot 0{,}5 = 2{,}6$-fache — rechtfertigt seinen Einbau nicht.

C. Resonanzerscheinungen an Transformatoren.

Die in der Tabelle 1 angegebenen Widerstandswerte sind sehr groß. Um so hohe Beträge in wirtschaftlicher Weise zu erreichen, wandte man die Stromresonanz an, d. h. man wickelte die Transformatoren so, daß sie in Resonanz mit der Frequenz des zu verstärkenden Wechselstroms schwingen. Durch die Resonanzabstimmung wird der Transformator frequenzempfindlich, und so erklärt sich das Versagen eines 1000 Perioden-Verstärkers beim Arbeiten mit 50 Per./Sek.

Es erscheint notwendig, zunächst das Verhalten eines einfachen Schwingungskreises zu betrachten, um den Unterschied zwischen Strom- und Spannungsresonanz klarzustellen, und dann die Gleichungen für den Transformator als Schwinger mit verteilter Induktivität und Kapazität bzw. für einen gleichwertigen Ersatzkreis aufzustellen.

Diesen Verhältnissen mußten auch die Versuche Rechnung tragen, und so liefen die Messungen schließlich auf die Aufnahme zahlreicher Resonanzkurven hinaus.

[1]) Vom Verfasser gemessen.

1. Spannungs- und Stromresonanz.

Je nachdem, wie man die Stromquelle anschließt, kann man an demselben Schwingungskreis Strom- und Spannungsresonanz beobachten. Liegt die Stromquelle in Reihe mit dem Wirkwiderstand R, der Spule L und dem Kondensator C, so muß man voraussetzen, daß die Stromquelle keinen merkbaren innern Widerstand hat, der die Eigenschwingungen des Kreises beeinflussen könnte.

Wenn die Frequenz $\omega = 2\pi\nu$ der Stromquelle mit der Eigenfrequenz des ungedämpft gedachten Kreises $\omega_r = 1/\sqrt{C \cdot L}$ übereinstimmt, dann erreicht die Spannung am Kondensator bzw. an der Spule ihren größten Wert. Man nennt die Erscheinung daher Spannungsresonanz. Mit ihr ist eine bedeutende Verringerung des Gesamtwiderstandes verbunden. Als Gleichung der Spannungsresonanzkurve bezeichnen wir:

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_r} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\pi}{d} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \cdot \omega_d}} \tag{9a}$$

Dabei ist $\mathfrak{S}$ der Leitwert der Reihenschaltung von R, L und C außerhalb der Resonanz, $\mathfrak{S}_r$ der Leitwert bei Resonanz.

Derselbe Kreis, bestehend aus R, L und C, werde durch einen Erzeuger gespeist, der parallel zum Kondensator oder zur Spule liegt. Damit die Eigenschwingungen des Kreises nicht beeinträchtigt werden, muß der innere Widerstand der Stromquelle sehr groß sein gegen die Kreiskonstanten. Der Erzeuger führt einen Strom

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}}$$

wobei

$$\mathfrak{R} = \frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{j \cdot \omega \cdot C \cdot \left(R + j \cdot \omega \cdot L - \frac{j}{\omega \cdot C}\right)} \tag{10}$$

Der Widerstand $\mathfrak{R}$ hat drei ausgezeichnete Werte:

1. Für $\omega = 0$ wird $\mathfrak{R} = R$ = dem mit Gleichstrom gemessenen Widerstand;

2. für $\omega = \infty$ wird $\mathfrak{R} = 0$, da der Kondensator einen Kurzschluß für sehr hohe Frequenzen bildet;

3. für

$$\omega = \omega_r \cdot \sqrt{\sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{R}{\omega_r \cdot L}\right)^2} - \left(\frac{R}{\omega_r \cdot L}\right)^2} = \omega_s$$

erreicht $\mathfrak{R}$ seinen größten Wert $\mathfrak{R}_r$. Da $R \ll \omega_r \cdot L$, so ist sehr angenähert $\omega_s = \omega_r$ und $\omega_s \cdot L = \frac{1}{\omega_s \cdot C}$. Dann wird

$$\mathfrak{R}_r \approx \frac{R + j \cdot \omega_r \cdot L}{\omega_r \cdot C \cdot R} \approx \frac{L}{C \cdot R}. \tag{10a}$$

Die Stromquelle liefert dabei nur einen geringen Strom $\mathfrak{J}_r$, der für $R = 0$ sogar ganz verschwindet, da der Kreis keinen Zuschuß nötig hat, wenn er nichts verbraucht. Trotzdem fließen im Innern des Schwingungskreises starke Ströme, deren Phasen aber um 180° gegeneinander verdreht sind und die daher nach außen die Summe 0 ergeben. Die Erscheinung führt den Namen Stromresonanz. Ihre wesentlichen Kennzeichen sind:

1. Keine Erhöhung der Spannung an C oder L über den Betrag der Erzeugerspannung $\mathfrak{P}$.
2. Höchstwert der Stromstärke im Schwingungskreis.

3. Geringste Speisestromstärke $\mathfrak{J}_r$ im Erzeuger, oder, was dasselbe bedeutet, Höchstwert des Widerstandes $\mathfrak{R}_r$.

Man hat also hierin ein Mittel, mit dem geringsten Materialaufwand einen bestimmten Widerstand herzustellen. Aus diesem Grunde arbeiten die Gittertransformatoren in Stromresonanz. Brächte man, um die Kapazität der Wicklung zu verringern, weniger Windungen auf, so würde die Übersetzung verhältnismäßig klein; und vermehrte man die Windungszahl über das für Resonanz erforderliche Maß, so würde die Belastung durch Eigenkapazität trotz der großen Übersetzung die Spannung vermindern.

Als Gleichung der Stromresonanzkurve bezeichnen wir:

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_r} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\pi}{d} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \cdot \omega_d}} \qquad (9b)$$

2. Der Transformator als Schwingungskreis.

a) Ersatzschaltung des Transformators.

Die schwingende Sekundärseite eines Gittertransformators ist ein Gebilde mit verteilter Induktivität und Kapazität. Die einzelnen Drahtteilchen sind induktiv und kapazitiv in einer Weise gekoppelt, die sich der scharfen rechnerischen Erfassung vollkommen entzieht. Die Versuche, durch Rechnung die Schwingungsmöglichkeiten einer Spule zu bestimmen, haben bisher nur für sehr einfache Fälle qualitativ richtige Ergebnisse geliefert[1]). Man ist daher auf Näherungsrechnungen und Versuche angewiesen.

Da die Oberschwingungen der Spule hier zunächst nicht interessieren, so kann man Widerstand, Induktivität und Kapazität des Transformators in erster Annäherung punktförmig vereinigt denken und die auf der Sekundärseite liegenden Größen auf die Primärseite umrechnen:

$$R_I = \frac{R_{II}}{Ü^2} \qquad L_I = \frac{L_{II}}{Ü^2} \qquad C_I = C_{II} \cdot Ü^2. \qquad (11)$$

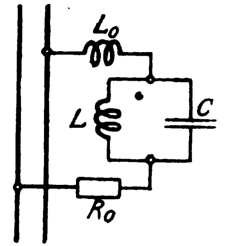


Abb. 1.

So erhält man als Ersatzschaltung den Schwingungskreis Abb. 1. Will man die Leerlaufverluste und Streuung berücksichtigen, so kann man als Ersatz vor den idealen Transformator einen gleichwertigen Widerstand R_0 und eine Spule L_0 geschaltet denken.

Steigert man die Frequenz des erregenden Wechselstromes von $\nu = 0$ ausgehend, so wird zuerst der Kreis C, L in Resonanzschwingungen geraten, und zwar wenn die Kreisfrequenz des zugeführten Wechselstromes

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}}.$$

Dies entspricht der Stromresonanz.

Treibt man die Frequenz noch höher, so wird der Strom zum größern Teil den Kondensator durchlaufen, während die Spule allmählich stromlos wird. Für die Stromführung kommt sie schließlich gar nicht mehr in Betracht. Wir haben jetzt in Reihe mit dem Erzeuger einen Schwingungskreis mit der Kapazität C und der Induktivität L_0. Wenn der Generator über einen Spannungsteiler geschlossen ist,

[1]) Vgl. hierzu: Arnold, Die Wechselstromtechnik, 2. Auflage, 1. Bd., § 46 und eine Reihe von Arbeiten von Rogowski und K. W. Wagner im Archiv f. Elektrot. Auch die „Beiträge zur Theorie des Resonanztransformators" von Naumann, E. u. M., Heft 44 ex 1913, streifen unser Gebiet.

dann kann man dessen Induktivität vernachlässigen und eine zweite Resonanzlage erwarten für

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L_0}}.$$

Diese ist als „Spannungsresonanz" anzusehen.

Bei der Aufstellung der Gleichungen denken wir uns zunächst die Sekundärwicklung entfernt; dann hat der Transformator den Eingangswiderstand

$$\mathfrak{R}_0 = R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0.$$

Bringt man die Sekundärwicklung auf, so stellt sie einen Widerstand $\mathfrak{R}_{II}$ dar, und für die Spannung der Primärseite gilt:

$$\mathfrak{P}_I = \mathfrak{J}_I \cdot \mathfrak{R}_0 + j \cdot \omega \cdot M \cdot \mathfrak{J}_{II}.$$

Die sekundäre EMK. beträgt

$$\mathfrak{E}_{II} = - j \cdot \omega \cdot M \cdot \mathfrak{J}_I = \mathfrak{J}_{II} \cdot \mathfrak{R}_{II},$$

woraus

$$\mathfrak{P}_I = \mathfrak{J}_I \cdot \left[\mathfrak{R}_0 - \frac{(j \cdot \omega \cdot M)^2}{\mathfrak{R}_{II}}\right] = \mathfrak{J}_I \cdot \mathfrak{R}_I.$$

Hierbei ist

$$\mathfrak{R}_I = \mathfrak{R}_0 + \frac{\omega^2 \cdot M^2}{\mathfrak{R}_{II}}$$

der Eingangswiderstand bei Belastung.

Ohne großen Fehler kann man $\mathfrak{R}_0$ gegen $\frac{\omega^2 \cdot M^2}{\mathfrak{R}_{II}}$ vernachlässigen. Bei verschwindend kleiner Streuung gilt ferner:

$$M^2 = L_I \cdot L_{II} = \left(\frac{L_{II}}{U}\right)^2.$$

$\mathfrak{R}_{II}$ kann man darstellen durch

$$\mathfrak{R}_{II} = R_{II} + j \cdot \left(\omega \cdot L_{II} - \frac{1}{\omega \cdot C_{II}}\right).$$

Führt man dies ein, so wird

$$\mathfrak{R}_I = \frac{\left(\frac{\omega \cdot L_{II}}{U}\right)^2}{R_{II} + j \cdot \left(\omega \cdot L_{II} - \frac{1}{\omega \cdot C_{II}}\right)} = \left(\frac{\omega \cdot L_{II}}{U}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_{II}} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{1}{R_{II}} \cdot \left(\omega \cdot L_{II} - \frac{1}{\omega \cdot C_{II}}\right)}$$

$$\mathfrak{R}_I = \frac{\frac{\pi}{d} \cdot \frac{\omega \cdot L_{II}}{U^2}}{1 + j \cdot \frac{\pi}{d} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \cdot \omega_d}}. \tag{12}$$

b) Widerstandsanpassung bei Stromresonanz.

Im Resonanzfall wird $\omega = \omega_r$ und

$$\mathfrak{R}_{Ir} = \frac{\pi}{d} \cdot \frac{\omega_r \cdot L_{II}}{U^2}. \tag{12a}$$

Die richtige Widerstandsanpassung erfordert, daß der Primärwiderstand R_{Ir} des Transformators gleich dem innern Widerstand R_i der Stromquelle wird. Aus der Gleichung (12a) kann man nun die Übersetzung U berechnen, wenn man für $\omega_r \cdot L_{II} = \frac{1}{\omega_r \cdot C_{II}}$ einen bestimmten Wert einsetzt. Es soll U berechnet werden für den Fall, daß z. B. die Zunahme der Dämpfung, die eine Belastung des Transformators mit R_b bringt, das log. Dekrement d um d_R vermehrt. Aus



$$d_R = \frac{\pi}{\omega_r \cdot C_{II} \cdot R_b} \tag{13}$$

und

$$\omega_r \cdot L_{II} = \frac{1}{\omega_r \cdot C_{II}} \tag{14}$$

wird

$$U = \sqrt{\frac{\pi}{d} \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}_{Ir} \cdot \omega_r \cdot C_{II}}} = \sqrt{\frac{d_R}{d} \cdot \frac{R_b}{\mathfrak{R}_{Ir}}}. \tag{15}$$

Wenn wir dieselbe Formel wie (7) erhalten wollen, so müssen wir $d_R = d$ setzen. Wählt man ferner $R_b = 10$ Megohm, dies entspricht erfahrungsgemäß dem Gitterwiderstand einer Röhre, und $d = d_R = 0{,}5$, was praktisch ungefähr zutrifft, so wird aus (13) und (14)

$$\omega_r \cdot L_{II} = \frac{1}{\omega_r \cdot C_{II}} = \frac{d_R \cdot R_b}{\pi} = \frac{0{,}5 \cdot 10^7}{\pi} = 1{,}59 \cdot 10^6 \,\Omega.$$

Mit $\nu_r = 1000$ Per./Sek. wird nun

$$L_{II} = \frac{1{,}59 \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot 1000} = 250 \text{ H}$$

$$C_{II} = \frac{9 \cdot 10^{11}}{2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 1{,}59 \cdot 10^6} = 90 \text{ cm}.$$

Hiermit wird U wie früher gleich 45 bzw. 10.

c) Oberschwingungen.

Da die Transformatorspule mit ihren verteilten Schwingungsgrößen als linearer Oszillator anzusehen ist, auf dem sich stehende Schwingungen ausbilden können, so müssen auch Oberschwingungen möglich sein; es ist jedoch fraglich, ob man sie messend beobachten kann, da die mit der Frequenz zunehmende Dämpfung, besonders durch den Eisenkern, alles verwischt. Nach Rogowski[1]) müssen sich abwechselnd Strom- und Spannungsresonanz in unendlicher Reihe folgen.

II. Die Untersuchung.

A. Das Meßverfahren.

Entsprechend den frühern Darlegungen kam es bei der Untersuchung vor allem darauf an, für verschiedene Frequenzen in der Nähe des normalen Arbeitsgebietes bei Leerlauf und Belastung $\mathfrak{R}_b$ Spannungen, Stromstärken und Widerstände zu messen.

Die Primär- und Sekundärwicklung des zu untersuchenden Transformators war einpolig geerdet, das andere Ende konnte frei schwingen. Gemessen wurde sekundär nur die Spannung; die Stromstärke war bei den gewählten Spannungen zu klein, als daß man sie hätte bequem messen können.

Für die Aufnahme von Kurven der Stromresonanz muß der Schwingungskreis mit dem Erzeuger möglichst lose gekoppelt sein, damit die Parallelschaltung von Spule und Kondensator nicht durch einen Nebenschluß gestört wird. Deshalb wurde vor den Verstärkertransformator ein sehr großer Widerstand R_z geschaltet.

Bei der Aufnahme von Kurven der Spannungsresonanz soll der Schwingungskreis durch den Stromerzeuger möglichst kurz geschlossen werden, damit in der Reihenschaltung Erzeuger, Spule, Kondensator keine zusätzliche Dämpfung oder frequenzbestimmende Größe auftritt, die das Schwingungsbild entstellt. Dies wurde dadurch verwirklicht, daß der Schwingungskreis von einem sehr kleinen Widerstand des Spannungsteilers (einigen Zehnteln

[1]) Archiv f. Elektrot. VII, 32, 1918/19.

Ohm) abgezweigt wurde, wobei der oben erwähnte große Vorschaltwiderstand R_z kurz geschlossen war.

Nach den theoretischen Darlegungen im Abschnitt I C drückt sich die Resonanz als Gipfel der Widerstands- bezw. Leitwertkurve aus. Diese Größen kann man aus Stromstärke und Spannung berechnen. Dieses „indirekte" Verfahren hat den Vorteil, sehr bequem zu sein, da man alle gewünschten Größen ablesen kann Vorteilhafter ist das zweite hier in Betracht kommende: die „Wheatstonesche Brücke", die unmittelbar die gesuchten Widerstände nach Größe und Phase ergibt und somit mehr leistet als das indirekte Verfahren. In den unruhigen Versuchsräumen — rings herum lagen Werkstätten — wäre ein genaues Abgleichen nach dem Gehör nicht möglich gewesen. Als Vorteil der Brückenschaltung muß man es ansehen, daß die Sekundärseite des Transformators nicht mit Meßeinrichtungen belastet ist, aber hierin liegt auch ein Nachteil, da man weder Stromstärke noch Spannung nachprüfen kann. Es hat sich ferner als äußerst schwierig herausgestellt, den Widerstand von Durchgangstransformatoren zu messen, da dieser zu groß ist.

B. Die Meßobjekte.

In Betracht kamen in erster Linie die normalen Verstärkertransformatoren von Telefunken und E. F. Huth. Zur Verfügung stand auch ein amerikanischer Verstärker von de Forest, sowie englische und französische Beutestücke. Daneben wurden auch ältere Transformatoren der A. E.-G. und ganz neue Versuchsapparate für Niederfrequenz, ebenfalls von der A. E.-G., durchgemessen.

Die ersten Verstärkertransformatoren waren den bereits bekannten Telephontransformatoren nachgebildet. Die ziemlich große Streuung, die von dem offenen Eisenkern herrührte, war die Quelle starker Störungen durch magnetische Induktion, und so kam man auf den Gedanken, den Transformator nach außen magnetisch zu schirmen. Der Transformator, der annähernd zylindrische Form hat, ist von einem kräftigen Eisenmantel umgeben, der einen verschwindend kleinen magnetischen Widerstand hat; darüber liegt außen ein Kupfermantel, der durch Wirbelstrombildung magnetische Felder fernhält.

Eine weitere Verbesserung bestand in der Einführung des geschlossenen Eisenkerns. Der Drahtkern wurde etwa um das Doppelte verlängert und außen über der Spule zurückgebogen, so daß sich die Enden reichlich überlappten. Das Ganze wurde wieder durch Eisen- und Kupfermantel zusammengehalten.

Ganz im Sinne der Starkstromtechnik ist der Transformator von Huth aufgebaut, der einen geschlossenen Kern von dünnen, legierten Eisenblechen enthält[1]). Auch englische und französische Verstärker haben Transformatoren mit geschlossenem Blechkern. Die einzelnen Bleche sind hierbei allerdings wesentlich dicker, da die Frequenz des zu verstärkenden Wechselstromes geringer ist als bei den deutschen Apparaten. Ganz grobe Bleche enthält der Niederfrequenztransformator der A. E.-G.

Nur die mittleren Windungen der Wicklung führen Strom, die äußeren Windungen und die Klemmen sind praktisch stromlos, da der Transformator durch die Meßröhre (S. 12) nicht belastet wird. Um eine Vorstellung von der Größe dieses Stromes zu bekommen, sei die Sekundärwicklung ersetzt durch eine konzentrierte Selbstinduktivität von $L_{II} = 250$ H und einen Kondensator mit der Kapazität $C_{II} = 90$ cm. Die größte Spannung am Kondensator sei $\mathfrak{P}_{II} = 1$ Volt.

Den stärksten Strom berechnet man zu

$$\mathfrak{J}_{II} = \mathfrak{P}_{II} \sqrt{\frac{C_{II}}{L_{II}}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{90}{9 \cdot 10^{11} \cdot 250}} \approx 10^{-5} \text{ Ampere.}$$

[1]) Der Transformator hat knapp das doppelte Volumen wie eine Streichholzschachtel.

Eine äußere Belastung von 10^7 Ohm ändert hieran nicht viel. Mit Rücksicht auf die elektrische Belastung kann somit der Kupferquerschnitt der Wicklung beliebig klein gemacht werden. Man ist in der Tat bis auf 0,03 mm Durchmesser herabgegangen. Dabei wachsen aber die mechanischen Schwierigkeiten ganz bedeutend. Das Wickeln erfordert größte Sorgfalt, und kleine Fehler, wie säurehaltige Lötmittel an einer geflickten Stelle, zerstören leicht die Wicklung. Man ist daher wieder zu etwa 0,07 mm Durchmesser zurückgekehrt.

Ein wunder Punkt der Verstärker ist die Isolation. Durch 10^7 Ohm wird der Transformator bereits merklich belastet. Es war daher interessant zu sehen, daß man bei einem französischen Verstärkertransformator versucht hatte, die hohe Isolation durch Eintauchen in geschmolzenes Paraffin zu erreichen, das beim Erstarren alle Poren dicht verschließen sollte. Es scheint aber fraglich, ob bei Temperaturwechsel nicht doch ein „Arbeiten" des Paraffins eintritt und der Transformator durch die Haarrisse atmet. Wichtiger dürfte es sein, die wirksamen Widerstände im Verstärker herabzusetzen, so daß die Isolation an Einfluß verliert.

C. Die Meßgeräte.

1. Die Stromquelle.

Als Wechselstromerzeuger diente ein Motorgenerator von Hartmann und Braun, auf dessen Welle vier kleine Maschinen saßen, deren Frequenzbereiche 30 bis 120, 90 bis 360, 300 bis 1200, 750 bis 3000 Per./Sek. umfaßten.

Ein Zungenfrequenzmesser war an der Maschine mit dem niedersten Frequenzbereich dauernd angeschlossen. Er besaß 4 Reihen zu je 60 Zungen, die im Bereich von 30 bis 60 Per./Sek. von $^1/_4$ zu $^1/_4$ Periode, zwischen 60 und 120 Per./Sek. von $^1/_2$ zu $^1/_2$ Periode abgestuft waren.

2. Die Spannungsmessung.

Im Verstärker läuft die Sekundärseite des Gittertransformators leer. Sie darf daher bei der Untersuchung nicht durch Meßgeräte belastet werden. Es kommen also nur Elektrometer in Betracht, die zudem eine möglichst kleine Kapazität haben sollen, die gegenüber der Eigenkapazität der Spule verschwindet. Hervorragend geeignet erschien daher das Elektrometer von Szilard, dessen Kapazität mit ca. 6 cm angegeben wird. Außerdem ist es für ein Zeigergerät sehr empfindlich — die Teilung beginnt bei 100 und reicht bis 300 Volt — und besitzt eine gute Dämpfung. Will man die praktischen Verhältnisse nachbilden, wie sie im Verstärker vorkommen, dann muß man die Empfindlichkeit viel weiter treiben, etwa bis zur Größenordnung 10^{-6} Volt; immerhin genügte das Gerät für die ersten Versuche, da der Zeiger beim Auslaufen einer Maschine der Resonanzkurve sehr schön folgte.

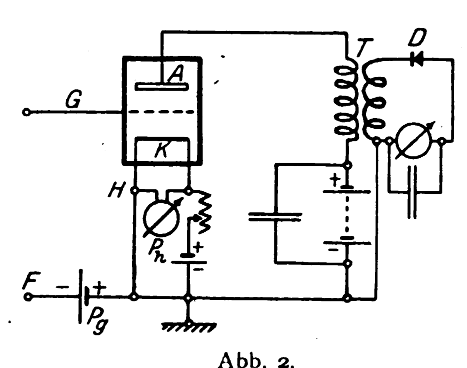


Abb. 2.

Da es bedenklich erschien, aus den mit ca. 150 Volt Sekundärspannung gewonnenen Erfahrungen auf das Verhalten der Transformatoren im Verstärker schließen zu wollen, so wurde eine Meßanordnung ausgebildet, die sich dem Zusammenarbeiten des Transformators mit der Röhre im Verstärker eng anschließt. Die Verstärkerröhre ist ja selber ein ideales Elektrometer von höchster Empfindlichkeit[1]). Die

[1]) Über andere Röhrenvoltmeter vgl. die technischen Mitteilungen der Versuchskompagnie der Tafern Nr. 2: Die Verwendung hochgepumpter Kathodenröhren zur Messung von Wechselspannungen beliebiger Frequenz (Röhrenvoltmeter) von Dr.-Ing. K. Hohage.



Schaltung eines Röhrenelektrometers ist auf Abb. 2 zu sehen. Die zu messende Spannung wird an die Klemmen F und G gelegt. Zwischen F und der negativen Heizfadenklemme H liegt die Stromquelle P_g von geringem inneren Widerstande, am bequemsten ein 2 Volt-Akkumulator, wenn nötig mit einem Nebenschluß von 2 μF, der dem Gitter die nötige konstante Vorspannung gibt. Die Heizstromstärke oder besser noch die Spannung P_h am Glühfaden wird mit einem Präzisionsmeßgerät überwacht. Alle Batterien sollen einen gemeinsamen geerdeten Pol haben; die Anodenbatterie und das Galvanometer werden durch Kondensatoren von mindestens 2 μF überbrückt, um den Wechselströmen Wege von geringem Widerstand zu bieten: T ist ein normaler Ausgangstransformator, der mit dem Detektor D und einem hochempfindlichen Zeigergalvanometer mit Spitzenlagerung (Widerstand R = 750 Ohm, Empfindlichkeit $1^0 = 0{,}0002$ Volt, Teilung 0 — 200⁰) belastet ist. Die Spannung der Anodenbatterie ist so zu wählen, daß der Wendepunkt der Kennlinie Anodenstrom = f (Gitterspannung) bei — 2 Volt liegt.

Die Empfindlichkeit der Anordnung ist ziemlich groß, wenn man die Einzelteile — Röhre, Transformator, Detektor — sorgfältig auswählt. 0,1 Volt Wechselspannung am Gitter ergeben bei 1000 Per./Sek. etwa 25 Teile Ablenkung des Galvanometers.

Die Genauigkeit hängt sehr von der Bedienung des Meßsatzes ab. Die günstigsten Werte der Gitter-, Heiz- und Anodenspannung müssen sorgfältig eingehalten werden. Sehr wichtig ist die Wahl eines guten Detektors, die bei den vorliegenden Versuchen keine Schwierigkeiten machte. Der Detektor durfte allerdings nicht über den vollen Galvanometerausschlag hinaus belastet werden.

Eine sehr störende Erscheinung, deren Nichtbeachtung die Messungen wertlos machen kann, ist das Übersprechen. Man versteht darunter induktive oder kapazitive Beeinflussung der Meßanordnung durch fremde Wechselströme. So zeigte sich gleich bei Beginn der Versuche, daß die Wechselstrommaschine, obwohl sie im Nachbarzimmer stand, durch ihr magnetisches Streufeld die Meßleitungen beeinflußte, so daß das Galvanometer Spannung anzeigte, selbst wenn alles zweipolig abgeschaltet war. Durch Vergrößerung des Abstandes zwischen Maschine und Meßtisch konnte sofort abgeholfen werden. Auch Verstellen der ganzen Apparatur, Drehen einzelner Teile, saubere Leitungsführung usw. helfen oft. Gegen Ladestörungen schützt man sich durch Erden aller geeigneten Punkte, z. B. des gemeinsamen Batteriepols, aller Metallgehäuse usw. Es ist stets gelungen, die Störungen bis auf 1^0 am Galvanometer zu unterdrücken.

Genügt die Empfindlichkeit des Röhrenelektrometers noch nicht, so kann man 2 oder 3 Röhren mit Zwischentransformatoren hintereinander schalten. Bei besonders sorgfältigem Aufbau kann man wohl noch mehr Röhren benutzen. Hier traten bei 4 Röhren stets selbsterregte Schwingungen auf und ließen das Galvanometer bis zum Anschlag fliegen. Es liegt nahe, statt des Zeigergerätes ein Spiegelgerät zu nehmen, das wesentlich empfindlicher ist. Die Versuche befriedigten nicht. Das Galvanometer zeigte alles mögliche an, es zuckte hin und her, der Nullpunkt wanderte, und es war offenbar, daß es starken Störungen ausgesetzt war. Vielleicht kamen diese aus dem Detektor, wahrscheinlich waren es von der Detektorleitung aufgefangene Hochfrequenzschwingungen, die von funkenden Maschinen in der Nähe ausgingen. Auch das Prickeln und Rauschen mancher Röhren könnte schuld sein.

Zum Eichen des Röhrenelektrometers wurde ein Spannungsteiler benutzt. Ein Präzisionswiderstand von 500 Ω, abgestuft bis 0,1 Ω, mit induktions- und kapazitätsfreier Wicklung nach Chaperon lag mit seinen Außenklemmen an der Maschinenspannung, die mit einem Hitzdrahtgerät gemessen und während der Eichung dauernd auf 10 Volt gehalten wurde. Von den zwei Wanderstöpseln gingen Leitungen nach F und G. Der Ausschlag α des Galvanometers war ein Maß für die an



F, G liegende Wechselspannung. Da der Ausgangstransformator praktisch leer läuft, so übersetzt er bei verschiedenen Frequenzen verschieden; man muß also für alle vorkommenden Frequenzen eichen.

Die Anwendung der Röhre als Elektrometer erscheint praktisch einwandfrei, da der Transformator im Verstärker mit der Röhre zusammen arbeitet. Die Forderung aber, daß der untersuchte Transformator durch die Röhre in keiner Weise belastet werden soll, ist in Wirklichkeit nicht erfüllt, selbst wenn man dem Gitter eine starke negative Vorspannung gibt, so daß der Gitterwiderstand unmeßbar groß wird. Parallel zu dem Stromwege Gitter-Kathode liegt noch ein zweiter Weg, der vom Gitter G, Abb. 2, über die Anode A, über den Ausgangstransformator T und die Batterien zur Kathode K führt. Hierdurch ist eine Rückwirkung der Röhren-Belastung auf den Transformator vorhanden.

Wenn zwischen Gitter und Kathode eine Wechselspannung $\mathfrak{P}_g$ herrscht, dann wirkt die Röhre wie ein Erzeuger mit der EMK. $-\mathfrak{P}_g/D$ auf der Anodenseite und erzeugt einen Wechselstrom im Anodenkreis, dessen Stärke nach (3) gegeben ist. Die Klemmenspannung am Verbraucher $\mathfrak{R}_b$ wird dann

$$\mathfrak{P}_b = \mathfrak{J}_a \cdot \mathfrak{R}_b = -\frac{\mathfrak{P}_g}{D} \cdot \frac{\mathfrak{R}_b}{R_i + \mathfrak{R}_b} = -\frac{\mathfrak{P}_g}{D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_i}{\mathfrak{R}_b}}.$$

An dem Kondensator Gitter-Anode, dessen Kapazität gleich C sei, liegt eine wirksame Spannung¹)

$$\mathfrak{P}_g - \mathfrak{P}_b = \mathfrak{J}_c \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \mathfrak{P}_g \cdot \left[1 + \frac{1}{D \cdot \left(1 + \frac{R_i}{\mathfrak{R}_b}\right)}\right].$$

Dieser Kondensator belastet den vor dem Gitter liegenden Transformator mit einem Widerstand

$$\mathfrak{R}_c = \frac{\mathfrak{P}_g}{\mathfrak{J}_c} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{D \cdot \left(1 + \frac{R_i}{\mathfrak{R}_b}\right)}}. \tag{16}$$

Der Kondensatorwiderstand hängt danach außer von den Röhrenkonstanten D und R_i von der Belastung $\mathfrak{R}_b$ ab. Man kann $\mathfrak{R}_c$ sehr groß machen, wenn man $\mathfrak{R}_b$ möglichst verringert. Für $\mathfrak{R}_b = 0$ wird $\mathfrak{R}_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$, was bei der geringen Größe von C nicht in Betracht kommt. Läßt man $\mathfrak{R}_b$ allmählich größer werden, so nimmt $\mathfrak{R}_c$ ab und erreicht bei $\mathfrak{R}_b = R_i$ den Betrag

$$\mathfrak{R}_c \approx \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \frac{C}{2D}} \tag{16a}$$

und bei $\mathfrak{R}_b = \infty$ wird

$$\mathfrak{R}_c \approx \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \frac{C}{D}}. \tag{16b}$$

Da $D < 1$, so wirkt die Kapazität C um so mehr, je kleiner der Durchgriff D ist. Diese Kapazitätsvergrößerung kann merkliche Werte annehmen und die Resonanzlage des Transformators verschieben. Zu beachten ist, daß C nicht nur die Kapazität des Gitters gegen die Anode, sondern auch die Kapazität der Zuleitungen, z. B. im Röhrensockel, einschließt.

Die Rückwirkung der Belastung beeinflußt auch die Dämpfung, da der Widerstand $\mathfrak{R}_c$ eine positive oder negative Ohmsche Komponente enthalten

¹) Die folgende Rechnung hat Barkhausen angegeben. Ausführlicher bei Stuart Ballantine: On the input impedance of the thermionic amplifier. Phys. Rev. (2) 15, 400—420, 1920.



kann. Nehmen wir zunächst an, die Belastung sei $\mathfrak{R}_b = j\omega L_b$, wobei $\omega L_b = R_i$, so wird

$$\mathfrak{R}_c = \frac{1}{j\omega C} D \frac{1-j}{1+D(1-j)} \approx D \cdot \left(\frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{16c}$$

wenn

$$1 \gg D(1-j).$$

Hier tritt ein negativer Widerstand $R_c = -\frac{D}{\omega C}$ auf. Er vermindert, da er leistungserzeugend wirkt, die Dämpfung und erhöht dadurch die Pfeifneigung des Verstärkers[1].

Setzt man dagegen $\mathfrak{R}_b = \frac{1}{j\omega C_b}$ und $\frac{1}{\omega C_b} = R_i$, so wird

$$\mathfrak{R}_c = \frac{1}{j\omega C} D \cdot \frac{1+j}{1+D(1+j)} \approx D\left(\frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{\omega C}\right) \tag{16d}$$

und wir erhalten eine positive Komponente $R_c = +D/\omega \cdot C$, welche die Dämpfung erhöht. Dieser Fall sollte praktisch angestrebt werden, da der Verstärker unbedingt tonsicher sein muß. Man kann das nach einem Patent von Barkhausen dadurch erreichen, daß man den Eingangstransformator auf eine bestimmte Frequenz abstimmt und jeden folgenden Transformator etwas tiefer einstellt als den vorhergehenden.

Die hier benutzte Meßanordnung nähert sich dem ersten Falle. Der Ausgangstransformator, der durch den Detektor und das Galvanometer nur schwach belastet ist, hat ziemlich viel Selbstinduktivität und vermindert die Dämpfung.

3. Die Strommessung.

Die Primärstromstärke $\mathfrak{J}_1$ der Gittertransformatoren (Größenordnung 1 mA bis 1 μA) wurde gewöhnlich durch eine zweite Versuchsreihe mittelbar bestimmt. Vor den zu untersuchenden Transformator wurde ein Ohmscher Widerstand R_z geschaltet, gegen den man den Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_I$ des Transformators vernachlässigen konnte, und nun wurde wieder die Maschinenspannung $\mathfrak{P}_z$ so gewählt, daß das Galvanometer dieselbe Sekundärspannung $\mathfrak{P}_{II}$ anzeigte. Dann ist

$$\mathfrak{J}_I = \frac{\mathfrak{P}_z}{R_z}. \tag{17}$$

Sowohl der Widerstand R_z wie auch die Belastungswiderstände R_b bestanden aus Bleistiftstrichen auf Faturanplatten. Sie änderten sich infolge der schwachen Beanspruchung nicht, nur mit der Zeit zeigten sich kleine Änderungen, die 5 % nie überschritten und die häufig auf feuchtes Wetter zurückzuführen waren.

D. Die Auswertung der Messungen.

Bei gleichbleibender Sekundärspannung $\mathfrak{P}_{II}$ des Transformators wurden für verschiedene Belastungen $\mathfrak{R}_b$ Stromaufnahme $\mathfrak{J}_I$ und Spannung $\mathfrak{P}_I$ an der Primärseite abhängig von der Frequenz ν des zugeführten Wechselstroms gemessen. Daraus wurde zunächst der Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_I$ berechnet

$$\mathfrak{R}_I = \frac{\mathfrak{P}_I}{\mathfrak{J}_I} = f(\nu). \tag{18}$$

Man erhält so eine Kurve, deren Gipfel $\mathfrak{R}_{Ir}$ die Stromresonanz kennzeichnet. ν_r sei die Resonanzfrequenz. Mit Hilfe der Beziehung

$$d = \pi \cdot \frac{\nu'' - \nu'}{\nu_r} \cdot \frac{\mathfrak{R}_I}{\sqrt{\mathfrak{R}_{Ir}^2 - \mathfrak{R}_I^2}} \tag{19}$$

kann man das log. Dekrement berechnen. Hierbei sind ν' und ν'' die beiden Abszissen, zu denen die Ordinate $\mathfrak{R}_I$ gehört.

[1]) Auf dieser Erkenntnis beruht eine der Firma E. F. Huth geschützte Schaltung zur Schwingungserzeugung.

Die gemessenen Spannungen $\mathfrak{P}_I$ und $\mathfrak{P}_{II}$ ergeben die Übersetzung

$$U = \frac{\mathfrak{P}_{II}}{\mathfrak{P}_I}$$

und die Güte im Resonanzpunkt

$$G_r = U^2 \cdot \mathfrak{R}_{Ir}. \tag{6}$$

Legt man parallel zur Sekundärseite einen Kondensator C_b, so wandert der Resonanzgipfel von ν_r nach ν_z, wobei $\nu_z < \nu_r$, und man findet aus

$$\frac{1}{\nu_r} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C_{II} \cdot L_{II}}$$

$$\frac{1}{\nu_z} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(C_b + C_{II}) \cdot L_{II}}$$

die Eigenkapazität und Selbstinduktivität der Sekundärseite

$$\left.\begin{aligned} C_{II} &= C_b \cdot \frac{\nu_z^2}{\nu_r^2 - \nu_z^2} \\ L_{II} &= \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu_r^2 \cdot C_{II}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Den Wirkwiderstand R_{II} erhält man aus

$$R_{II} = \frac{d}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{L_{II}}{C_{II}}}. \tag{21}$$

Aus den letzten drei Größen kann man den Widerstand $\mathfrak{R}_{II}$ der Sekundärseite gegen Schwingungen von der Frequenz ν_r feststellen, die etwa von der Röhre in den Transformator eindringen wollen:

$$\mathfrak{R}_{II} = \frac{L_{II}}{C_{II} \cdot R_{II}}. \tag{10a}$$

Die Schwingungskonstanten der Sekundärseite kann man noch auf andere Weise ermitteln, ohne Zuhilfenahme der Zusatzkapazität C, indem man von den drei Gleichungen ausgeht:

$$d = \pi \cdot R_{II} \cdot \sqrt{\frac{C_{II}}{L_{II}}}$$

$$\nu_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C_{II} L_{II}}} \qquad \mathfrak{R}_{Ir} = \frac{1}{U^2} \cdot \frac{L_{II}}{C_{II} R_{II}}.$$

Die Ausrechnung ergibt ganz andere Werte als vorher, und das ist nicht verwunderlich, da die Kapazität der Sekundärwicklung durchaus keine eindeutig bestimmte Größe ist. Maßgebend für das Verhalten des Transformators im Verstärker ist aber der Einfluß eines zugeschalteten Kondensators, etwa der Kapazität der Röhre und ihrer Zuleitungen, und daher ist das vorher beschriebene Verfahren der Messung mittels Zusatzkondensators hier als einwandfrei zu bezeichnen.

Man kann ferner die Kurven heranziehen, die bei Belastung mit Ohmschem Widerstand R_b aufgenommen sind, und aus der Vermehrung der Dämpfung bzw. d_R und der Resonanzfrequenz ν_r die Kapazität und Induktivität berechnen. Diese Werte haben praktische Bedeutung, selbst wenn sie von den mittels kapazitiver Belastung erhaltenen abweichen, da sie das Verhalten des Transformators gegenüber einem tatsächlich vorkommenden Betriebszustand kennzeichnen.

$$d_R = \frac{\pi}{R_b} \cdot \sqrt{\frac{L_{II}}{C_{II}}}; \qquad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_{II} \cdot L_{II}}},$$

woraus

$$L_{II} = \frac{R_b \cdot d_R}{2\pi^2 \nu_r} \qquad C_{II} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{11}}{\nu_r \cdot R_b \cdot d_R}. \tag{22}$$

III. Die Ergebnisse.

A. Untersuchung und Eichung der Röhre.

Um die Eignung der Verstärkerröhren für elektrometrische Messungen festzustellen, wurden an einer A-Röhre von Siemens und Halske die Kennlinien Abb. 3 aufgenommen. Die erste mit 0,52 Ampere Heizstrom erhaltene Kurve des Anodenstroms abhängig von der Gitterspannung $I_a = f(P_g)$ zeigte, daß für 100 Volt Anodenspannung der Wendepunkt etwa bei $P_g = 0$ Volt liegt, wobei die Röhre den Transformator belasten würde. Daher wurde die Heizstromstärke auf 0,50 Ampere verringert und abermals bei $P_a = 100$ V die Kurve $I_a = f(P_g)$ aufgenommen. Das Ergebnis, das auf Abb. 3 als I_a-Kurve eingetragen ist, entsprach ganz den Erwartungen. Der Wendepunkt W liegt genau bei $P_g = -2$ Volt, einer Spannung, bei welcher der ebenfalls eingezeichnete Gitterstrom $I_g = f(P_g)$ bereits verschwindet und der Gitterwiderstand $d P_g : d I_g$ unendlich groß ist. Die I_a-Kurve verläuft in der Gegend des Wendepunktes W am steilsten; lagert man über die Gleichspannung P_g eine Wechselspannung $\mathfrak{P}_g$, so muß das Galvanometer hinter der Röhre bei W den größten Ausschlag α geben, wenn man die Ergebnisse der Gleichstromuntersuchung auf die Verhältnisse bei Wechselstrom übertragen darf. Die Bestätigung gibt die mit einer Wechselspannung $\mathfrak{P}_g = 0,5$ Volt bei der Frequenz $\nu = 1000$ Per./Sek. aufgenommene Kurve α, deren Gipfel ebenfalls bei -2 Volt liegt.

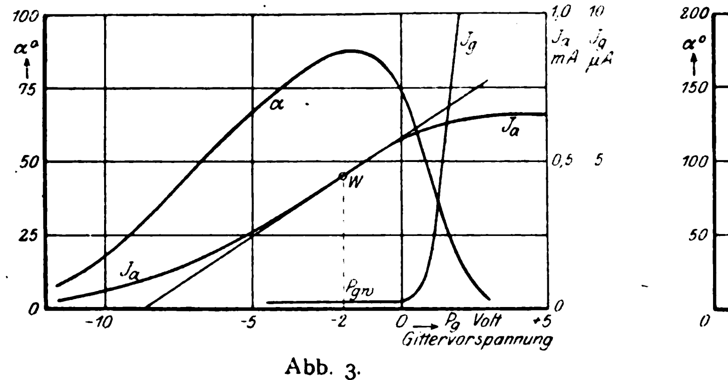


Abb. 3.

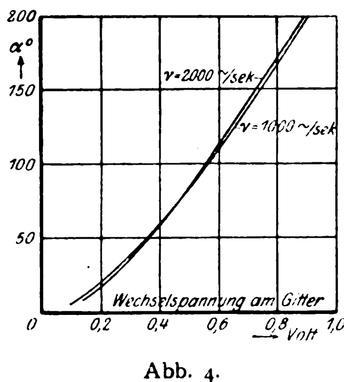


Abb. 4.

Die Röhre erschien hiernach für die Transformatoruntersuchungen geeignet. Nun wurde die Empfindlichkeit und die Abhängigkeit von der Frequenz geprüft. Die beiden Kurven auf Abb. 4 zeigen, daß man die Anordnung für die Messung von Spannungen zwischen 0,2 und 0,9 V gebrauchen kann. Der Einfluß der Frequenz ist so gering, daß man ihn bei Spannungen unter $\mathfrak{P}_g = 0,6$ V vernachlässigen kann. Andere Ausgangstransformatoren, die später zusammen mit einem empfindlicheren Detektor benutzt wurden, zeigten eine viel größere Abhängigkeit von der Frequenz.

B. Normale Leerlauf- und Belastungskurven.

Die ersten Versuche mit dem Elektrometer von Szilard bei $\mathfrak{P}_{II} = 150$ V Sekundärspannung wurden an dem Eingangsstransformator eines amerikanischen Verstärkers gemacht. Die Kurven der Stromstärke, der Spannung und des Widerstandes bei Leerlauf sind auf Abb. 5 enthalten. Als Besonderheit mag bei diesem Transformator erwähnt werden, daß seine Sekundärwicklung in der Mitte aufgeschnitten ist und die beiden Hälften kapazitiv und induktiv miteinander gekoppelt sind. Die Kurven zeigen den die Stromresonanz kennzeichnenden Verlauf: die Stromstärke durchläuft einen Kleinstwert, und in derselben Gegend ändert sich die Spannung gar nicht, so daß für die Widerstandskurve an dieser Stelle ein Höchstwert herauskommt.

Die Abb. 6, 7 und 8 lassen das Verhalten desselben Transformators bei verschiedenen Belastungen mit Ohmschem Widerstand erkennen. Man sieht, wie die Stromstärke mit der Belastung allmählich zunimmt, 1 Megohm wirkt schon wie ein Kurzschluß. Diese Tatsache läßt es wünschenswert erscheinen, die Isolation hoch zu treiben, daß sie gegenüber 1 MΩ sehr groß erscheint. Die Primärspannung bzw. die Übersetzung wird durch die Belastung viel weniger beeinflußt; die Kurven liegen so dicht beieinander, daß der Übersicht wegen nur zwei gezeichnet wurden. Der Primärwiderstand durchläuft schöne Resonanzkurven, deren Auswertung in der folgenden Tabelle enthalten ist. In Abb. 9 sind die Stromkurven für Kapazitätsbelastung wiedergegeben. Auch hier sieht man, wie empfindlich die Sekundärseite ist. Eine Belastung mit $C_b = 31$ cm verschiebt die Resonanzlage von 1360 auf 1100 Per./Sek. Die Spannungs- und Widerstandskurven sind hier weggelassen, weil sie nichts Neues bringen.

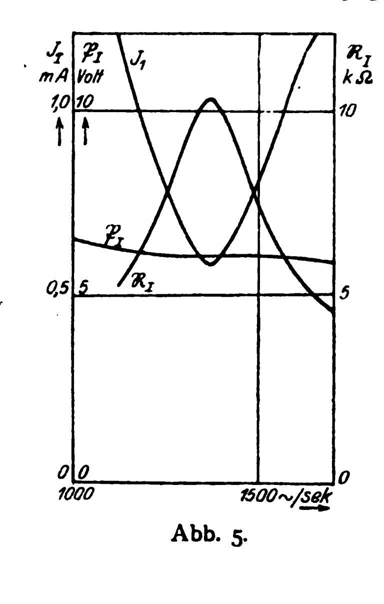


Abb. 5.

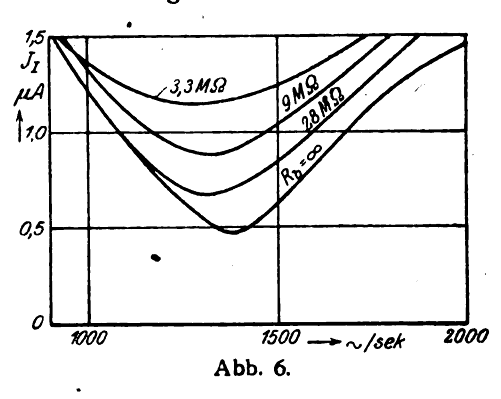


Abb. 6.

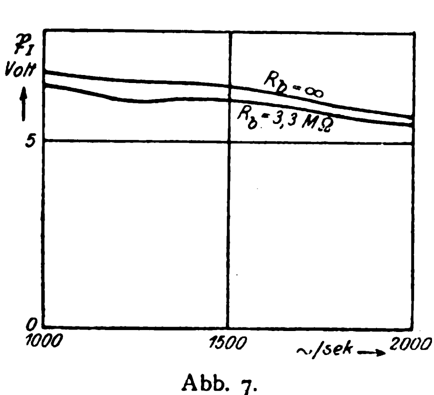


Abb. 7.

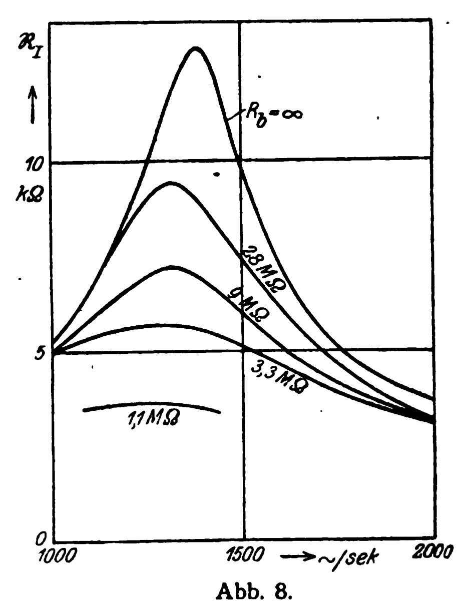


Abb. 8.

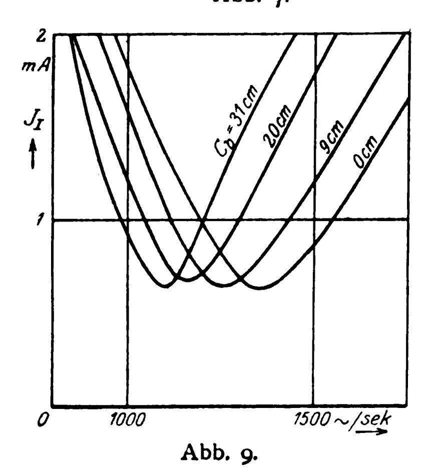


Abb. 9.

Tabelle 2.

	R_b in Megohm					C_b in cm		
	∞	28	9	3,3	1,1	0	31	
ν_r	1380	1320	1330	1290	1260	1360	1100	Per./Sek.
$\mathfrak{P}_{II}$	150	150	150	150	150	150	150	Volt
U_r	25	25	24	24	21	25	22	—
J_{Ir}	0,48	0,67	0,88	1,15	1,94	0,64	0,65	m A
$\mathfrak{R}_{Ir}$	13,0	9,4	7,2	5,7	3,7	9,5	10,6	k Ω
G_r	8,1	5,9	4,2	3,3	1,6	6,0	5,1	M Ω
d	0,67	1,05	1,33	2,36	—	0,69	0,54	—
C_{II}	nach Formel 20					80		cm
L_{II}						150		H
R_{II}	0,28	0,44	0,55	0,98	—	0,29	0,22	M Ω
$\mathfrak{R}_{II}$	6,0	3,8	3,1	1,7	—	5,8	7,7	M Ω
d_R	nach Formel 22	0,38	0,66	1,69				
L_{II}		407	226	192				H
C_{II}		32	57	62				cm
R_{II}		1,13	0,80	0,56				M Ω
$\mathfrak{R}_{II}$		10,1	4,5	5,0				M Ω

Die nach den Formeln 20 bzw. 22 errechneten Werte von L_{II}, C_{II}, R_{II} und $\mathfrak{R}_{II}$ weichen voneinander ab, und das kann nicht überraschen, da die Annahme punktförmiger Kreisgrößen nur eine Annäherung darstellt. Jedenfalls gibt die Tabelle eine Vorstellung von den vorkommenden Größenordnungen. Die mit Gleichstrom gemessenen Widerstände der Primär- und Sekundärwicklung waren 140 bzw. 8100 Ohm.

Vergleichsmessungen mit dem Röhrenelektrometer konnten an dem amerikanischen Transformator nicht gemacht werden, da die aufgeschnittene Sekundärwicklung die Einstellung der Gittergleichspannung verhinderte. An anderen Transformatoren wurde qualitativ kein Unterschied gefunden.

C. Verschiedene Resonanzlagen eines Transformators.

Aus mehreren Versuchsreihen, die einige Tage auseinander lagen, ergab sich eine sprungweise Änderung der Resonanzlage, für die eine Erklärung gesucht werden sollte. Es wurden daher folgende Versuche gemacht. Zunächst wurde an dem Transformator wie gewöhnlich die Stromkurve aufgenommen. Dann wurde auf der Primärseite dauernd Gleichstrom überlagert und wiederum gemessen. Schließlich wurde der Transformator durch Hammerschläge erschüttert und nochmals eine Resonanzkurve aufgenommen. Ein merkbarer Unterschied war an den drei Kurven nicht wahrzunehmen.

Der nächste Versuch erst brachte volle Klarheit. Bei der Untersuchung wird stets ein Primär- und ein Sekundärende der Wicklung geerdet. Bezeichnet man die Enden der Primärwicklung mit weiß und gelb, die Enden der Sekundärwicklung mit rot und blau, so hat man folgende vier Möglichkeiten zu erden: weiß-rot, weiß-blau, gelb-rot, gelb-blau. Jedes Wicklungsende hat Kapazität gegen die anderen Enden, und diese Kapazitäten werden durch die Erdung in verschiedener Weise kurz geschlossen, so daß die wirksame Transformatorkapazität und damit auch die Eigenfrequenz in jeder Schaltung eine andere ist. Der Versuch ergab

geerdet:	weiß-blau	gelb-blau	gelb-rot	weiß-rot	
Resonanz:	1070	1220	1270	1440	Per./Sek.



Daraufhin wurde bei allen Versuchen genau vermerkt, welche Enden geerdet waren, und die rätselhaften Sprünge der Resonanzfrequenz kamen nicht mehr vor.

D. Prüfung der Transformatoren auf Endenbezeichnung und Wickelrichtung.

Die Marine schreibt für die Herstellung der Verstärkertransformatoren vor, daß beide Spulen in gleichem Sinn gewickelt und daß die Enden von innen nach außen gezählt durch die Farben weiß, gelb, rot, blau gekennzeichnet sein müssen. Bei einem richtig bezeichneten Transformator liegen gelb und rot am nächsten beieinander; ihre Kapazität muß daher am größten sein. Da die Primärwicklung nur verhältnismäßig wenig Windungen hat, so ist die Kapazität weiß-rot nur wenig kleiner als gelb-rot. Am kleinsten sollte die Kapazität der weit auseinander liegenden Enden weiß-blau sein. Es gelang in der Tat, diese Größen mit der Seibtschen Kapazitätsmeßbrücke zu messen. An einem Niederfrequenztransformator der A. E.-G wurde mit $\nu \approx 1000$ Per./Sek. gemessen:

gelb-rot	C = 295 cm
weiß-rot	288 „
gelb-blau	170 „
weiß-blau	65 „

Zur Kontrolle wurden noch die Kapazitäten gegen den Eisenkern bestimmt:

Kern-weiß	115 cm
„ gelb	115 „
„ rot	85 „
„ blau	60 „

Hieraus ergibt sich einwandfrei, daß der Transformator richtig bezeichnet ist, und eine Besichtigung bestätigte dies. Man kann also durch Messung der Kapazität der Wicklungsenden gegeneinander und gegen den Kern die Lage der Enden feststellen. Über den Sinn der Wicklung kann diese Messung noch nichts aussagen. Diesen findet man sehr leicht, indem man nacheinander in beide Wicklungen Gleichstrom schickt und an einem Kompaß die magnetische Wirkung betrachtet.

E. Wirkung eines Kondensators parallel zur Primär- und Sekundärwicklung.

Schaltet man einen Kondensator an die Primär- oder an die Sekundärklemmen eines Transformators, so verschiebt er die Resonanzlage, und bei einem idealen Transformator ist der Einfluß von C_{bI} auf der Primärseite genau gleich dem Einfluß von C_{bII} auf der Sekundärseite, wenn

$$C_{bI} = U^2 C_{bII}. \tag{11}$$

Mit Rücksicht darauf, daß der Ladestrom des sekundär angeschlossenen Kondensators den ganzen Transformator passieren muß, ehe er in den Kondensator eintritt, erscheint es zweckmäßiger, den Transformator durch einen primär angeschlossenen Kondensator auf die bestimmte Frequenz abzustimmen. Der Unterschied dürfte aber unbedeutend sein. Die Richtigkeit obiger Gleichung wurde sehr genau bestätigt gefunden.

F. Wirkung einer Kurzschlußwindung.

Bei der Herstellung der Transformatoren kommt es leicht vor, daß eine oder mehrere Windungen in sich kurz geschlossen werden, ohne daß die Wicklung unterbrochen wird. Es war daher notwendig, den Einfluß eines solchen Kurzschlusses zu untersuchen und eine Methode anzugeben, wie man ihn findet. Über die Sekundär-



wicklung wurde eine Windung von 0,4 mm starkem Kupferdraht gewickelt und die Resonanzkurven aufgenommen. Danach wird die Resonanzlage und das logarithmische Dekrement gar nicht beeinflußt, die Übersetzung sinkt und die Stromaufnahme steigt. Es dürfte daher keinen Zweck haben, die Resonanzkurve aufzunehmen, und es wurde vorgeschlagen, die Spannungsübersetzung als entscheidend anzusehen, die mit beliebiger Frequenz und beliebigen Spannungen bestimmt werden kann.

G. Einfluß des Gitterstroms der Röhre.

Sowohl für die Beurteilung des Meßverfahrens wie für die Kenntnis der Vorgänge im Verstärker war eine Reihe von Versuchen wertvoll, die das Zusammenarbeiten von Transformator und Röhre behandeln.

Von anderer Seite war festgestellt worden, daß die Gitterstromkennlinie $I_g = f(P_g)$ eine negative Neigung dP_g/dI_g haben kann. Ein solcher negativer Widerstand übt eine Generatorwirkung aus, und ein angeschlossener Schwingungskreis wird zu Eigenschwingungen angeregt. Auch wenn er nicht schwingt, so ist mindestens eine Neigung zum Schwingen vorhanden, die sich in verringerter Dämpfung gegenüber einfallenden Schwingungen der Resonanzfrequenz äußert. Auf den Verstärker angewendet: die Empfindlichkeit und zugleich die Pfeifneigung wird erhöht.

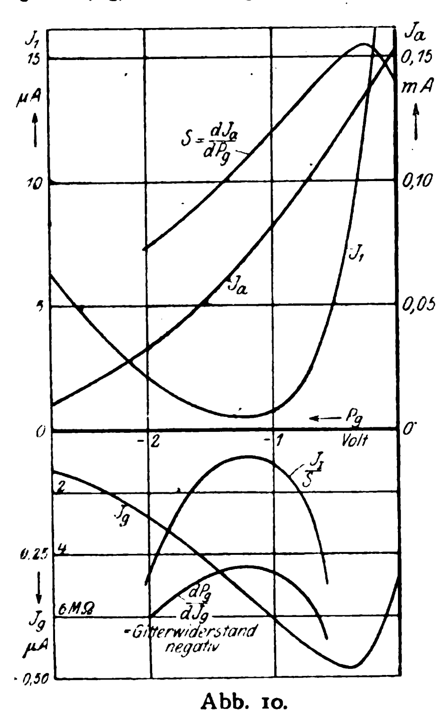


Abb. 10.

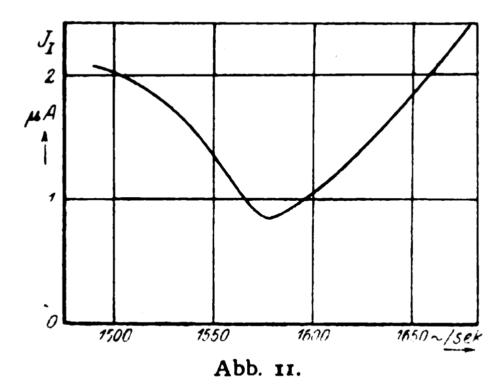


Abb. 11.

Für die Versuche stand eine Röhre Nr. 3379 zur Verfügung, die als sehr schlecht bezeichnet werden muß, wenn man die in Abb. 10 gegebene Gitterstromkennlinie betrachtet. Die Anodenspannung wurde bei den Versuchen auf 79 Volt gehalten, weil hierbei der Transformator ganz dicht vor der Selbsterregung stand, aber noch nicht tönte. Der Gitterwiderstand dP_g/dI_g ist bei negativen Spannungen P_g etwa von —0,4 bis —3 Volt negativ und an der Stelle der Wendetangente nur —4,5 Megohm. Auf Abb. 10 ist zugleich die Anodenstromkennlinie $I_a = f(P_g)$ und ihre Steilheit $S = dI_a/dP_g = f(P_g)$ eingetragen.

Mit Hilfe dieser Röhre wurden bei verschiedenen Gittergleichspannungen die Resonanzstromstärken $\mathfrak{J}_{Ir} = f(P_g)$ des Eingangstransformators LT 3 Nr. 28 aufgenommen und in Abb. 10 eingezeichnet. Der Verlauf dieser Kurve ist noch durch die Steilheit S der Anodenstromkennlinie beeinflußt, da auf stets gleichen Ausschlag des Galvanometers eingestellt wurde. Bildet man $\mathfrak{J}_{Ir}/S$, so erhält man eine Kurve über P_g, die bei einer guten Röhre eine Gerade ergeben sollte, die aber hier genau denselben Verlauf wie die Kurve dP_g/dI_g hat. Hiermit ist erwiesen, daß der Verlauf der

Gitterstromkennlinie von größter Bedeutung für die Verstärkung ist. Die Stromaufnahme des Transformators wird um so kleiner, je kleiner der negative Gitterwiderstand; das ist an sich ein Vorteil. Aber die geringste Störung, z. B. eine kleine Verschlechterung des Vakuums oder eine Erhöhung der Anodenspannung beim Auswechseln der Batterie, bringt den Verstärker zum dauernden Pfeifen. So gut daher solche Verstärker mit verminderter Dämpfung — zu ihnen gehören auch die Anordnungen mit Rückkopplung — scheinen, so sind sie für die Praxis doch unbrauchbar. Eher kann man eine solche Anordnung für Schwingungserzeugung, etwa als Überlagerer, gebrauchen. Die vom Zufall abhängige Veränderlichkeit des negativen Widerstandes läßt aber auch dies nicht als aussichtsreich erscheinen.

Die folgende Abb. 11 zeigt eine mit der Röhre Nr. 3379 aufgenommene Resonanzkurve mit der die schlechte Röhre kennzeichnenden Spitze. Bestimmt man das log. Dekrement für verschiedene Ordinaten, z. B. aus den zwei Punkten, die 2 Mikroampere entsprechen, so bemerkt man, daß die Dämpfung mit der Annäherung an den Resonanzpunkt immer kleiner wird.

Bei einer gut entlüfteten Röhre wirkt der Gitterstrom nur wie eine Ohmsche Belastung auf den Transformator, wie aus Abb. 12 hervorgeht. Die eine Kurve ist mit 0 Volt, die andere mit —0,5 Volt Gleichspannung am Gitter aufgenommen worden. Die hohe Stromaufnahme bei 0 Volt und die damit verbundene große Dämpfung fällt sofort ins Auge.

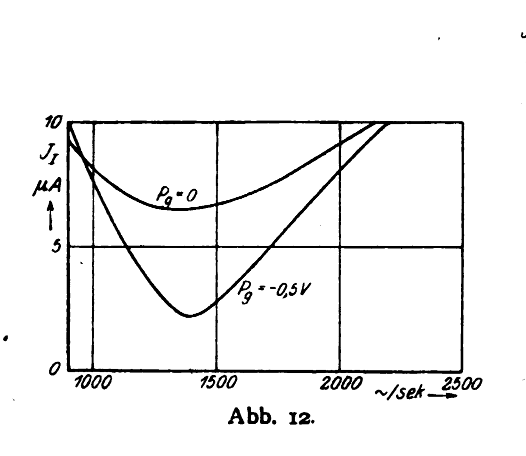


Abb. 12.

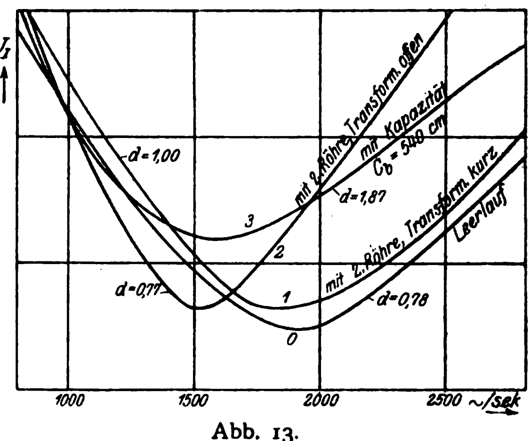


Abb. 13.

H. Anodenrückwirkung.

Die Rückwirkung der Anodenbelastung auf den Gittertransformator wurde mit Hilfe einer zweiten Röhre festgestellt, die parallel zu der Elektrometerröhre lag. Die beiden Gitter waren unmittelbar miteinander verbunden, Heiz- und Anodenbatterie waren gemeinsam. Im Anodenkreise der zweiten Röhre lag als Drosselspule die Hochspannungsseite des Durchgangstransformators Tr. 35 C. Beide Röhren wurden gespeist von dem Eingangstransformator Tr. 34 A. Schaltete man bloß die Meßröhre an, so erhielt man die Leerlaufkurve 0 von Abb. 13. Nur wenig änderte sich ihr Aussehen, wenn man auch die zweite Röhre anlegte, aber ohne Belastung im Anodenkreis (Tr. 35 C kurz geschlossen), Kurve 1. Eine ganz bedeutende Änderung trat erst ein, als man den Kurzschluß entfernte, so daß im Anodenkreis der hohe induktive Widerstand der Sekundärwicklung von Tr. 35 C auftrat. Dieser wirkte, wie von Barkhausen vorhergesagt, wie ein Kondensator die Frequenz verringernd, Kurve 2. Zum Vergleich ist noch die Kurve 3 beigefügt, die in normaler Schaltung, ohne die zweite Röhre, bei Belastung des Transformators Tr. 34 A mit $C_b = 540$ cm Kapazität auf der Sekundärseite gewonnen wurde.

Tabelle 3.

$\mathfrak{R}_b$	Leerlauf ohne 2. Röhre	Belastung mit 2. Röhre Tr. 35 C kurz	Tr. 35 C leer	Ohne 2. Röhre mit $C_b = 540$ cm	
ν_r	1910	1840	1530	1590	Per./Sek.
$\mathfrak{J}_{lr}$	0,80	1,07	1.07	2,00	μ A
d	0,78	1,00	0.77	1,87	—

Aus der letzten Messung berechnet man die Eigenkapazität des Eingangstransformators zu $C_{II} = 120$ cm, und mit Hilfe dieser Größe die bei Kurve 2 scheinbar zugeschaltete Kapazität $C_z = 680$ cm. Die zweite Röhre mit der in ihrem Anodenkreis liegenden Drosselspule wirkt also wie ein Kondensator von 680 cm.

Um genaue Werte zu erhalten, wurde folgende Messung gemacht: der Eingangstransformator wurde wie zuvor bei der Aufnahme der Kurven 0, 1 und 2 belastet und außerdem an seine Sekundärklemmen ein Luftdrehkondensator angelegt. Nun wurde wie immer die Frequenz der Maschine eingestellt und — hierin liegt das Neue — der Kondensator so lange verdreht, bis das Galvanometer durch seinen größten Ausschlag Resonanz anzeigte. Die zugehörige Kapazität sei C_{mx}. Bezeichnet man die Eigenkapazität des Transformators mit C_{II}, die der zugeschalteten zweiten Röhre ohne Drosselspule mit C_{RO} und mit Drosselspule als C_{RD}, so erhält man Gleichungen von der Form

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{C\,L}},$$

nämlich

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C_{II}}}$$

$$\nu_r{}' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,(C_{II} + C_{RO})}}$$

$$\nu_r{}'' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,(C_{II} + C_{RD})}}.$$

Diese kann man nach C auflösen und erhält[1])

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_r{}^2 L} = k\,x,$$

wenn man $\frac{1}{\nu_r{}^2} = x$ und $\frac{1}{4\pi^2 L} = k$ setzt. Da C proportional x, so erhält man in graphischer Darstellung parallele Geraden für $C = f(x)$. Zieht man noch durch den Nullpunkt eine Parallele, so sind die Stücke, die sie aus einer beliebigen Ordinate herausschneiden, gleich der Kapazität des Transformators allein bzw. des Transformators mit leer laufender zweiter Röhre bzw. mit zweiter Röhre und Drosselspule. Auf Abb. 14 sind die Geraden eingezeichnet. Sie verlaufen gut parallel und ergeben für die Kapazität

des leer laufenden Transformators	$C_{II} =$	120 cm
der zugeschalteten Röhre bei Leerlauf		20 ,,
,, ,, ,, mit Drossel		100 ,,

Diese Werte dürften zuverlässiger sein als die früheren, da alle gemessenen Punkte zum Ergebnis beitragen.

[1]) Vgl. Rietz, Ann. Phys. 41, 543, 1913.

J. Einfluß des innern Widerstandes der Stromquelle auf die Dämpfung.

Die hier beschriebenen Messungen zeigen übereinstimmend, daß Resonanz nur auftritt, wenn der Transformator von einer Quelle gespeist wird, die einen sehr großen Widerstand enthält. Dies war bei der Strommessung der Fall. Bei der Spannungsmessung fehlte dieser große Widerstand R_z, und die Kurve $\mathfrak{P}_I = f(\nu)$ ergibt annähernd eine Gerade, ohne Resonanzandeutung. Man kann diese Beobachtung auch so auslegen: Der innere Widerstand der Stromquelle, der parallel zum Schwingungskreis liegt, dämpft die Schwingungen um so mehr, je kleiner er ist. Man wird also, wenn man von $R_z = \infty$ ausgehend mit immer kleinern Werten R_z Resonanzkurven aufnimmt, stets flachere Kurven erhalten, die bei $R_z = 0$ in eine Gerade übergehen. Abb. 15 zeigt drei solche Kurven, die an einem Durchgangstransformator Tr. 35 C

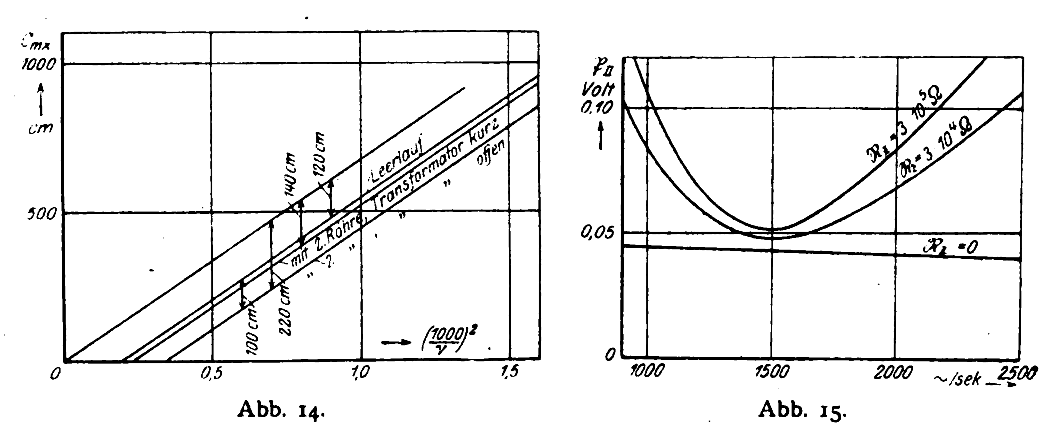


Abb. 14. Abb. 15.

aufgenommen wurden. Hat man an einem Transformator mit großem vorgeschalteten R_z die Resonanzkurve aufgenommen und das log. Dekrement bestimmt, so muß man bei günstigster Anpassung mit einem Dekrement von doppelter Größe rechnen.

K. Transformatoren für verschiedene Frequenzen.

Praktisch vorkommende Frequenzen, für die bereits Verstärker gebaut wurden, sind: 50; 600; 1000; 6000 Per./Sek. Da für alle dieselben Gesichtspunkte maßgebend sind, so weichen die erhaltenen Meßergebnisse nicht wesentlich voneinander ab.

Die Resonanz der Niederfrequenztransformatoren lag nicht bei 50 Per./Sek., sondern beträchtlich höher; sie wurden durch Kondensatoren auf der Sekundärseite abgestimmt. Sowohl die Resonanzkurven wie auch Versuche mit dem ganzen Verstärker zeigten, daß die Abstimmung mit großen Kapazitäten auf die Höhe des Eingangswiderstandes im Resonanzpunkt wenig Einfluß hat. Sie macht aber den Verstärker unempfindlich gegen Störungen. Durch die Abstimmung wird die Resonanzkurve an der gewünschten Resonanzstelle nur ein wenig gehoben, dagegen im übrigen stark abgesenkt, woraus sich die Störungsfreiheit ergibt.

Der 600 Perioden-Verstärker arbeitet mit dem Marconiton und weist keine Besonderheiten gegenüber dem für 1000 Per./Sek. auf.

Ein Verstärker für 6000 Per./Sek. wurde in der Werkstätte der Inspektion des Torpedowesens gebaut und geprüft, als die Aufgabe vorlag, Ströme zu verstärken, deren Frequenz in der Gegend der oberen Hörgrenze lag. Der Ton sollte durch Überlagerung eines Wechselstromes von 7000 Per./Sek. hörbar gemacht werden. Es erschien nach den Vorversuchen günstiger, erst zu verstärken und dann zu überlagern, so wie man es bei den später erschienenen Hochfrequenzverstärkern macht.

L. Spannungsresonanz.

Bei Beginn der Transformatoruntersuchungen, als man sich über die Resonanzvorgänge noch nicht klar war, wurde vorwiegend nach Spannungsresonanz gesucht und bei einigen ausgefallenen Formen auch gefunden. Diese Versuche wurden später wieder aufgenommen, um festzustellen, ob sich nicht auch mit Spannungsresonanz ein brauchbarer Verstärkertransformator herstellen ließe. Als besonders geeignet erschien ein Niederfrequenz-Eingangstransformator der A. E.-G. Nr. 153, dessen Windungszahlen 450/40000 waren.

Bei gleichbleibender Sekundärspannung $\mathfrak{P}_{II} = 150$ mV wurden in der beschriebenen Schaltung mit Hilfe des Röhrenelektrometers die Kurven der primären Stromstärke $\mathfrak{J}_I$ und Spannung $\mathfrak{P}_I$ aufgenommen. Um den ganzen Frequenzbereich

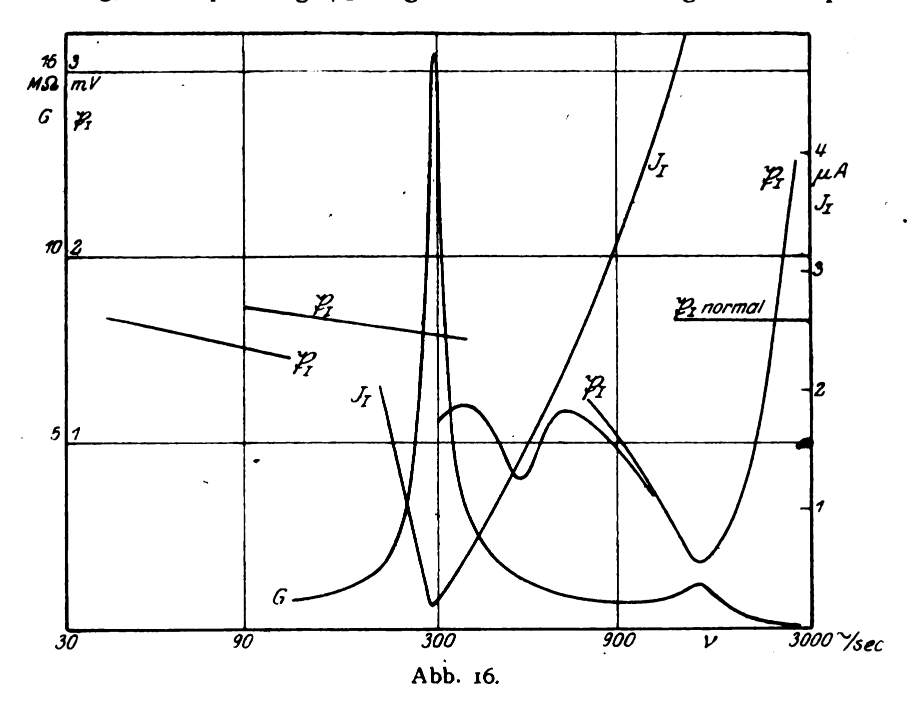


Abb. 16.

von 30 bis 3000 Per./Sek. verhältnismäßig gleichberechtigt darzustellen, wurde eine logarithmische Teilung der Abszissenachse gewählt So wurden die vier Kurvenstücke, die der Aufnahme mit den vier einzelnen Maschinen entsprechen, gleich lang, Abb. 16.

Die Spannungskurve $\mathfrak{P}_I = f(\nu)$ zeigt im Anfang nichts Besonderes. Sie verläuft fast wagrecht und grade und hält sich nahe der Gegend, die durch das Windungsverhältnis gegeben ist. Zwischen 400 und 600 Per./Sek. zeigt sie eine schwache Einsenkung, die einer Resonanzlage entsprechen könnte, worauf bei 1500 Per./Sek. ein tiefes Resonanztal sich bildet. Vergleicht man die Frequenzen der Resonanzlagen, 500 und 1500, so ist das Verhältnis 1500/500 = 3 viel zu glatt für die Oberschwingungen eines solch komplizierten Gebildes, wie es ein Transformator darstellt. Viel näher liegt daher der Schluß, daß hier eine Maschinenoberschwingung zur Resonanz kam. Bekanntlich sind die ungeraden Maschinenoberschwingungen am stärksten ausgeprägt, und sie müssen ganze Ordnungszahlen haben. Die wirkliche Spannungsresonanz liegt also bei 1500 Per./Sek. und ergibt, wie man aus dem Kurvenblatt berechnen kann, etwa 4,6-fache Spannungserhöhung gegenüber dem Verhältnis der Windungszahlen.



Einen ganz überraschenden Verlauf nahm die Stromkurve: Sie zeigte zwischen 30 und 300 Per./Sek. nicht weniger als 6 Minima, darüber hinaus stieg sie dauernd. Diese 6 Resonanzlagen waren

32	42	59	97	147	292	Per./Sek.
9	7	5	3	2	1	
288	294	295	291	294	292	

Multipliziert man die in der obersten Zeile stehenden, aus dem Kurvenblatt abgegriffenen Werte mit den darunter stehenden Zahlen der zweiten Reihe, so erhält man die Werte der untersten Reihe, die auffallend dicht um den Mittelwert 292 herum liegen. Auch hier sind es wieder, wie aus den ganzen Zahlenverhältnissen 1, 2 usw. hervorgeht, die Oberschwingungen der Maschine, die Resonanzen vortäuschen. Jedenfalls dürfte die wirkliche Resonanzfrequenz von 292 Per./Sek. hierdurch mit großer Genauigkeit bestimmt sein.

Um einwandfrei festzustellen, daß es sich wirklich um Maschinenoberschwingungen handelte, wurde zur Sekundärseite des Transformators ein Kondensator von ca. 200 cm parallel geschaltet. Das Bild war genau dasselbe: Scheinbare Reonanzen lagen bei

32	45	75	112,5	225	Per./Sek.
7	5	3	2	1	
224	225	225	225	225	

Die Multiplikation mit den ganzen Faktoren 1, 2, 3 usw. ergibt hier mit hervorragender Übereinstimmung 225. Es dürfte ganz ausgeschlossen sein, daß sich die Transformatoroberschwingungen unter allen Verhältnissen mit solcher Regelmäßigkeit folgen wie hier. Bezeichnend ist auch, daß die den ungeraden Faktoren entsprechenden Kurventäler annähernd gleich tief sind, während das zum Faktor 2 gehörende Tal ziemlich flach ist, was der bekannten Tatsache entspricht, daß die geraden Oberschwingungen der Maschinen schwach ausgeprägt sind.

Die Nutzanwendung aus dieser Beobachtung sollte nun sein, daß man zwischen Maschine und Meßanordnung einen abstimmbaren Zwischenkreis legt. Praktisch ist das hier nicht durchführbar, weil dann für jeden Meßpunkt bei veränderlicher Frequenz neu abgestimmt werden müßte und die Arbeit ins Uferlose verzögert würde. Ein weiterer Vorschlag würde darauf hinauslaufen, die Maschine durch einen Röhrengenerator zu ersetzen. Aber auch hier hat man Schwierigkeiten. Solange man mit den reinen Sinusschwingungen erster Art arbeitet, bekommt man nur eine geringe Schwingungsleistung, die zum Betriebe der Meßgeräte nicht ausreicht, und bei den kräftigen Schwingungen zweiter Art hat man wieder mit verzerrten Kurven zu kämpfen.

Der Eingangswiderstand des Transformators zeigt bei 300 Per./Sek. einen Höchstwert von rund 1600 Ohm, der mit zunehmender Frequenz immer mehr abnimmt, bis er bei 1600 Per./Sek. einen geringsten Wert von nur 6,4 Ohm erreicht. Später steigt er wieder an.

Die Übersetzung hält sich bis 400 Per./Sek. auf dem durch das Windungsverhältnis gegebenen Wert und beginnt dann langsam zu ihrem Gipfel empor zu klettern, den sie bei 1500 Per./Sek. mit $U = 430$ erreicht.

Maßgebend für die Bewertung ist die Güte, und ihre Kurve zeigt, so verlockend die hohe Übersetzung von 430 erscheint, daß der hierbei auftretende kleine Widerstand das Produkt $U^2 \cdot \mathfrak{R}_1$ weit unter den Betrag herabdrückt, den es bei Stromresonanz erreicht. Das Urteil muß daher lauten: Die bei Spannungsresonanz gewonnene Spannungserhöhung wird durch die gleichzeitige Widerstandsabnahme mehr als ausgeglichen, so daß der Transformator unbedingt bei Stromresonanz günstiger arbeitet.



IV. Schluß.

A. Zusammenfassung der Meßergebnisse.

1. Die Gittertransformatoren arbeiten mit Stromresonanz, d. h. im Resonanzfall ist die Stromaufnahme von außen ein Minimum, der Widerstand ein Maximum.

2. Die Resonanz der Transformatoren allein liegt ziemlich hoch, etwa bei 1400 Per./Sek.

3. Man erhält vier verschiedene Resonanzlagen, je nachdem, welche von den vier Wicklungsenden man erdet.

4. Das logarithmische Dekrement der Transformatoreigenschwingungen ist 0,4 bis 0,6.

5. Die Übersetzung bleibt bei den praktisch vorkommenden Belastungen unverändert und ist nahezu gleich dem Windungsverhältnis.

Eingangstransformatoren $U = 20$
Durchgangstransformatoren $U = 3$.

6. Die Eigenkapazität der Sekundärseite, berechnet aus der Verschiebung des Resonanzpunktes durch Zusatzkapazität, hat die Größenordnung 80 cm, die Selbstinduktivität 150 Henry.

7. Man kann die Eigenfrequenz verkleinern
   a) durch Parallelschalten von Kondensatoren auf der Primär- oder Sekundärseite; der Eingangswiderstand bleibt dabei im Resonanzfalle fast ungeändert;
   b) durch Vermehrung der Sekundärwindungen, wodurch die Übersetzung und der Eingangswiderstand bei Resonanz steigt.

8. Die Belastbarkeit ist gering. 10 Megohm auf der Sekundärseite drücken den Eingangswiderstand bei Resonanz auf die Hälfte herab. Daher ist gute Isolation und genügende negative Vorspannung am Gitter nötig.

9. Der Widerstand der Sekundärseite gegen Schwingungen von der Resonanzfrequenz ist

$$\mathfrak{R}_{II} = \frac{L_{II}}{C_{II} R_{II}} \approx 10 \text{ Megohm.}$$

Der negative Gitterwiderstand muß, abgesehen vom Vorzeichen, größer sein, sonst tritt Selbsterregung ein.

10. Die Transformatorwiderstände sind den Röhrenwiderständen nur bei Resonanz angepaßt.

11. Die Güte der Transformatoren ist bei Stromresonanz etwa gleich $3\,M\,\Omega$ und viel größer als bei Spannungsresonanz.

B. Verbesserungsvorschläge.

Eine Verbesserung der Transformatoren ist auf zwei Wegen denkbar:

1. Man verringert die Dämpfung. Das log. Dekrement des leer laufenden Transformators beträgt jetzt etwa 0,5, bei Belastung mit der Röhre 1,0. Die Resonanzkurve sinkt dann bei $0{,}76 \cdot \nu_r$ bzw. $1{,}31 \cdot \nu_r$ auf $1/2$ der Gipfelhöhe. Ist das Dekrement bei Belastung dagegen 0,5, so fällt die Kurve schon bei $0{,}87 \cdot \nu_r$ bzw. $1{,}15 \cdot \nu_r$ auf $1/2$. Der wirksame Frequenzbereich ist also nur noch halb so groß wie zuvor. Frequenzschwankungen werden in der Lautstärke sich entsprechend mehr bemerkbar machen.

2. Man verringert die Induktivität und Kapazität pro Windung. Die Aufgabe ist dieselbe wie beim Rahmenempfang der drahtlosen Telegraphie, nur ist sie hier insofern schwieriger, als man die vielen tausend Windungen nicht mit beliebigem Abstand wickeln kann. Immerhin dürfte eine Unterteilung in dünne Scheiben eine größere Übersetzung ermöglichen.

C. Praktische Prüfeinrichtung.

Um das Verhalten des Transformators im Verstärker vor dem Einbau feststellen zu können, wurde folgende Anordnung gewählt: Die Maschinenspannung wird an einen Spannungsteiler von geringem Widerstand gelegt. Mit Hilfe eines Umschalters wird entweder I. die volle Spannung $\mathfrak{P}$ dem Gitter unmittelbar zugeführt und die Lautstärke im Telephon beobachtet, das von dem im Anodenkreis liegenden Ausgangstransformator gespeist wird; oder II. man legt eine Teilspannung $\mathfrak{P}_t$ an den Transformator und dessen erhöhte Sekundärspannung an die Röhre. Durch Ändern von $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_t$ stellt man beim Umschalten von II auf I auf gleiche Lautstärke ein und kann bei wechselnder Frequenz Resonanzkurven aufnehmen. In die Schaltung sind feste Widerstände eingebaut: $R_b = 10^7$ Ohm als Belastung der Sekundärseite und $R_z = 10^3$ bzw. 10^5 Ohm als Ersatz für den inneren Widerstand des Stromerzeugers (Detektor bei Eingangs-, Röhre bei Durchgangstransformatoren).

$\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_t = V$ gibt die wirksame Spannungserhöhung. Bei den bisher geprüften Durchgangstransformatoren war $V = 1{,}5$ bis $1{,}8$ bei Resonanz.

Bei der Prüfschaltung ist sorgfältig auf Übersprechen zu achten. Wenn die Maschine einpolig angeschaltet ist, darf man nichts hören. Erdung ist notwendig. Der Spannungsteiler, von dem die Gittervorspannung abgenommen wird, darf nur geringen Widerstand haben. Andernfalls muß er, ebenso wie die 100 Voltbatterie, durch einen großen Kondensator überbrückt werden.

Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 10. Heft. 1921.

Kurzer Bericht über die allgemeine Relativitätstheorie und ihre Prüfung an der Erfahrung.

Von

A. Sommerfeld.

Wenn auch das unmittelbare Interesse des Elektrotechnikers bereits durch die spezielle Relativitätstheorie befriedigt wird, welche das Verständnis der Maxwellschen Gleichungen im allgemeinen und der Induktion bewegter Leiter im besonderen vertieft, sollen hier, einem Wunsche der Schriftleitung und dem Zuge der Zeit folgend, die Gedanken entwickelt werden, welche Einstein zu seiner allgemeinen Relativität und zu einer Erneuerung der Gravitationstheorie geführt haben. Die Darstellung wird sich dabei nicht ausdrücklich an den elektrotechnischen Leser wenden, sie war vielmehr ursprünglich für ein weiteres, nicht technisch gebildetes Publikum bestimmt. Daß sie den Gegenstand nicht erschöpfen, ja nicht einmal immer genau bezeichnen kann, braucht kaum entschuldigt zu werden; ihr Ziel ist lediglich, dem Leser außer dem allgemeinen begrifflichen Zusammenhang ein gewisses Gefühl für das Naturgemäße und Befriedigende des relativistischen Standpunktes zu ermitteln.

Bis zum Herbst 1919 haben sich nur die eigentlichen Träger mathematisch-physikalischer Bildung mit der Relativitätstheorie befaßt, seit jener Zeit aber ist zunächst in englischen, dann auch in deutschen Zeitungen die Relativitätsflut entfesselt. Bis 1919 wurde die Theorie in kleinen Vorlesungen mit heißem Bemühen studiert, in München z. B. seit 1909 fast in regelmäßiger jährlicher Wiederkehr; seit 1919 wird sie von Berufenen und Unberufenen vor größtem Publikum erörtert, teils begeistert gerühmt, teils leidenschaftlich bekämpft.

Im Gegensatz zu dem öffentlichen Aufsehen ist der Einfluß der Relativitätstheorie auf die reale Naturforschung ein beschränkter. Während die Quantentheorie, die andere große Leistung deutscher Wissenschaft im zwanzigsten Jahrhundert, fast alle Zweige der Physik und Chemie befruchtet und bestimmt hat, braucht die Relativitätstheorie, um ihre Spuren in der Erscheinungswelt nachzuweisen, außerordentliche Bedingungen und Größenverhältnisse. Die ursprüngliche spezielle Relativitätstheorie ließ sich unter Laboratoriumsbedingungen nur mittels der schnellsten β-Strahlen prüfen, das ist mit Hilfe von Elektronen, die beim radioaktiven Zerfall fast mit Lichtgeschwindigkeit fortgeschleudert werden. Im übrigen operierte sie mit der Erde als Versuchsobjekt, indem sie die Frage stellte, ob die jährliche Erdbewegung den Ablauf der elektrischen und optischen Erscheinungen an der Erdoberfläche beeinflusse, eine Frage, die nur durch Präzisionsmessungen winziger Größen beantwortet werden konnte. Die neuere allgemeine Relativitätstheorie dagegen greift bereits zur Sonne als Versuchsobjekt, da sich nur auf ihr Kraftfelder von der erforderlichen Konzentration finden, welche die Relativitätswirkung in eine beobachtbare Größenskala rücken; darüber hinaus zieht sie die kosmischen Massen- und Geschwindigkeitsverteilungen in Betracht. Unter den gewöhnlichen Laboratoriumsbedingungen dagegen, läßt sich kein Versuch für oder wider die allgemeine Relativität ausfindig machen.

Trotzdem bleibt der ideale Wert der Theorie und das subjektive Verdienst Einsteins unvergleichlich und unerhört. Mit einer Kühnheit und Folgerichtigkeit

des philosophischen Denkens, wie sie noch nie einem naturwissenschaftlichen Geiste vermählt war, mit einer mathematischen Kraft, die an Gauß und Riemann erinnert, mit einem auch in allen anderen Teilen der Physik bewährten untrüglichen Scharfblick für physikalische Wirklichkeiten hat Einstein in zehn Jahren ein Lehrgebäude aufgerichtet, vor dem auch wir, die seine Arbeit von Jahr zu Jahr gespannt verfolgt haben, heute staunend und schwindelnd stehen: 1905 die spezielle Relativitätstheorie unter Beschränkung auf gleichförmige Bewegungen, dann jahrelanges Tasten und Kämpfen um die Erweiterung des Relativitätsprinzipes auf beliebige Bewegungen, und Ende 1915 der volle Erfolg, der Abschluß in theoretischer Hinsicht. Der Abschluß in empirischer Hinsicht ist begreiflicherweise auch heute noch nicht voll erreicht; aber die ersten Schritte dazu waren, wie wir am Schlusse dieses Aufsatzes sehen werden, von vollem Erfolge begleitet.

Einige Zeilen aus einem Briefe Einsteins vom November 1915 mögen seinen Kampf um das allgemeine Relativitätsprinzip schildern: „Sie dürfen mir nicht böse sein, daß ich erst heute auf Ihren Brief antworte. Aber ich hatte im letzten Monat eine der aufregendsten, anstrengendsten Zeiten meines Lebens, allerdings auch der erfolgreichsten. Ans Schreiben konnte ich nicht denken. Ich erkannte nämlich, daß meine bisherigen Feldgleichungen der Gravitation gänzlich haltlos waren und sah klar, daß nur durch einen Anschluß an die allgemeine Kovariantentheorie Riemanns eine befriedigende Lösung gefunden werden konnte. Die letzten Irrtümer in diesem Kampfe habe ich leider in den Akademiearbeiten, die ich Ihnen bald senden kann, verewigt. Das endgültige Ergebnis ist folgendes. . . Das Herrliche, was ich erlebte, war nun, daß sich nicht nur Newtons Theorie als erste Näherung, sondern auch die Perihelbewegung des Merkur (43 Sekunden pro Jahrhundert) als zweite Näherung ergab. Für die Lichtablenkung an der Sonne fand sich der doppelte Betrag wie früher." Sodann aus dem Frühjahr 1916 als Erwiderung auf Einwände von mir: „Von der allgemeinen Relativitätstheorie werden Sie überzeugt sei, wenn Sie dieselbe studiert haben werden. Deshalb verteidige ich sie Ihnen mit keinem Wort." Daß er die experimentelle Bestätigung der Theorie erleben würde in dem Ausmaß, wie sie die Sonnenfinsternis von 1919 tatsächlich gebracht hat, glaubte Einstein selbst nicht; aber die innere Schönheit und Überzeugungskraft der Theorie war für ihn bereits ausschlaggebend.

Nun zur Sache! Daß Bewegung ein relativer Begriff ist, daß wir nur von der Geschwindigkeit eines Körpers oder Punktes relativ gegen andere Körper reden können, ist eine Selbstverständlichkeit, welche uns durch tägliche Erfahrungen geläufig geworden ist. Die klassische Mechanik Newtons hat dies so formuliert: Es ist unmöglich, durch Erfahrungen innerhalb eines Systems von Körpern festzustellen, ob sich dasselbe in Ruhe oder gleichförmig geradliniger Bewegung befindet. Durch mechanische Erfahrungen auf der Erde können wir z. B. niemals nachweisen, daß wir uns (jeweils annähernd geradlinig und gleichförmig) um die Sonne bewegen, noch durch Beobachtungen innerhalb des Sonnensystems, daß sich dieses gegen das Fixsternsystem bewegt. Dies ist das Relativitätsprinzip in der ursprünglichen Formulierung der klassischen Mechanik. Es kann kurz so gefaßt werden: „Es gibt keinen absoluten Raum, das heißt keine Äußerung und physikalische Beobachtungsmöglichkeit des Fortschreitens im Raume, beim Fehlen sonstiger Anhaltspunkte für das Fortschreiten relativ gegen andere Körper."

Die Optik schien dem zu widersprechen. Sie verlangte einen Lichtäther, einen materialisierten Raum, in dem sich die Lichtwellen fortpflanzen sollen. Die



Optik ist, wie wir heute wissen, nur ein Zweig der Elektrodynamik. Auch die Elektrodynamik sprach vom Äther als einer physikalischen Wirklichkeit. Die absolute Bewegung im Raum kann hiernach, so sollte man denken, als Bewegung gegen den Äther, optisch oder elektrodynamisch, nachgewiesen werden. Die Lichtfortpflanzung im Sinne der Erdbewegung würde von der Erde aus beobachtet langsamer erfolgen als im umgekehrten Sinne. Wir hätten also, entgegen dem Relativitätsprinzip, in den optischen Beobachtungen ein Mittel, um die Bewegung der Erde im Raum (im Äther) festzustellen. Die tatsächlichen Beobachtungen haben diese Mutmaßung widerlegt, ein berühmter Versuch von Michelson, ein älterer Kondensatorversuch von Röntgen etc. Diese zeigten auch optisch und elektromagnetisch kein Anzeichen der Erdbewegung. Das Relativitätsprinzip besteht also zu Recht, aber es ist im Widerspruch gegen den universellen Träger der Lichterscheinungen, gegen den Äther. Deshalb sah sich Einstein genötigt, den Äther abzuschaffen (er ist unbeobachtbar, nicht physikalisch, sondern metaphysisch, ein verkleideter absoluter Raum). Jedes „Bezugssystem", die Erde, der Jupiter, jedes Laboratorium, hat, wenn man so will, seinen besonderen Äther, seine Lichtfortpflanzung, die unabhängig ist von dessen gedachtem Bewegungszustande und nur abhängt von wirklichen physikalischen Bedingungen und Stoffen. Aber noch mehr: Die Lichtfortpflanzung findet statt in Raum und Zeit. Die Gleichheit der Lichtfortpflanzung in allen Bezugssystemen, insbesondere ihre Unabhängigkeit vom Bewegungszustand der Lichtquelle zwingt uns, nicht nur den absoluten Raum, sondern auch die absolute Zeit zu leugnen. Das war Einsteins Tat von 1905. Die Mechanik leugnet den absoluten Raum, läßt aber die absolute Zeit bestehen. Die Optik und Elektrodynamik verlangen auch die Relativierung der Zeit. Jedes Bezugssystem hat seine eigene Zeitskala. Wenn ich mich als ruhend definiere und ein anderes, relativ gegen mich bewegtes Körpersystem K betrachte, so läuft derselbe Vorgang z. B. ein Menschenleben, die Pendelschwingung einer Uhr, die Schwingung in einer Spektrallinie, in K langsamer ab als in meiner Zeitskala. Das Verhältnis ist umkehrbar: Der Beobachter in K kann sich ebensogut als ruhend und mich als bewegt auffassen und schließt, daß meine Uhren, mein Lebenslauf etc. langsamer gehen wie seine. Ähnlich erscheint eine in der relativen Bewegungsrichtung abgemessene in K ruhende Länge von meinem Standpunkte aus kürzer als der Beobachter in K sie mißt und umgekehrt.

Das alles erscheint widerspruchsvoll; Einstein weist aber die durchsichtigen mathematischen Beziehungen auf, die zwischen den Raum- und Zeitbestimmungen zweier solcher Bezugssysteme gelten und die in schönster Harmonie sind, sobald man das metaphysische Vorurteil der absoluten Zeit aufgibt. So wie der Raum nur besteht durch die in ihm enthaltenen Orte materieller Körper, so besteht die Zeit nur durch die in ihr stattfindenden Ereignisse. Nur diese Ereignisse sind real und objektiv. Unsere Orts- und Zeitbestimmungen dagegen sind relativ und hängen vom Standpunkt des Beobachters ab. Es findet eine Art perspektivischer Verzerrung in Raum und Zeit statt. Der Schrank, der vor mir steht, hat bestimmte Verhältnisse von Breite und Höhe. Betrachte ich ihn von der Seite, so ändern sich die Verhältnisse, verkürzt sich seine Breite. Minkowski hat uns gelehrt, die drei Dimensionen des Raumes mit der einen Ausdehnung der Zeit zu einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, die er treffend die „Welt" nennt, zusammenzufassen. In dieser Mannigfaltigkeit lassen sich die von der Einsteinschen Theorie geforderten Längen- und Zeitänderungen in der Tat deuten als rein perspektivische, vom Standpunkt des Beobachters abhängige scheinbare Verzerrungen. Durch mathematische Formeln oder durch ihnen äquivalente geometrische Figuren sowie durch gewisse oft genannte Gedankenexperimente (Eisenbahnzug und Fahrdamm etc.) ließe sich dies im einzelnen nachweisen. Übrigens sei zur Beruhigung des Lesers wiederholt, was schon in der Einleitung gesagt wurde: Alle diese Relativitätseffekte sind winzig

klein und unter gewöhnlichen Umständen unmerkbar. Sie werden erst beobachtbar, wenn die Relativitätsgeschwindigkeit vergleichbar wird mit der Geschwindigkeit des Lichtes.

Die Tatsachen der Optik und Elektrodynamik bewegter Körper finden in dieser Theorie ihren einfachsten Ausdruck, z. B. die Aberration, die Fresnelsche Mitführung des Lichtes etc. Von besonderer Bedeutung ist ein Ergebnis über das Verhältnis von Masse und Energie. Die Relativitätstheorie zeigt, daß beide Begriffe wesensgleich sind. Die Masse eines jeden Körpers ist nämlich gleich seinem Energieinhalt geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Jeder Energieverlust eines Körpers (Ausstrahlung, Abkühlung) bedeutet daher eine Massenabnahme. Damit hängt zusammen eine Abhängigkeit der Masse vom Bewegungszustand. Schon die vorrelativistische Elektrodynamik hat gefolgert, daß die Masse der elektrischen Elementarladung, des Elektrons, unbegrenzt zunehmen müsse, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons sich der Lichtgeschwindigkeit nähert. Die Relativitätstheorie verlangte eine solche Zunahme für alle Massen und vereinfachte zugleich das Gesetz ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Wohlgemerkt, die Masse des Elektrons ist, vom bewegten Elektron aus beurteilt, immer die gleiche, von der Geschwindigkeit unabhängige, das bewegte Elektron ist ja ein mit jedem anderen gleichberechtigtes Bezugssystem, das nichts von seiner Bewegung weiß. Ja, es ist sogar unsinnig, von dem bewegten Elektron schlechtweg zu sprechen, ohne zu sagen, wogegen die Bewegung gedacht wird. Aber zu der Kathodenstrahlröhre, in der sich das Elektron bewegt, oder zum Laboratorium, in dem es beobachtet wird, hat es eine bestimmte Geschwindigkeit und eine von der Geschwindigkeit abhängige Masse. Das Gesetz dieser Abhängigkeit ist im Laufe der Jahre immer genauer beobachtet worden und hat sich immer genauer übereinstimmend mit der Forderung der Relativitätstheorie ergeben. Die Zweifel an der Relativitätstheorie sind daraufhin mehr und mehr verstummt, an derjenigen Relativitätstheorie nämlich, die wir bisher besprochen haben, die ihren Wirkungsbereich beschränkt auf geradlinig-gleichförmige Relativbewegungen und die sich als notwendige Weiterentwickelung der ältesten Gedankengänge aus der klassischen Mechanik darstellt. Sie ist uns so weit in Fleisch und Blut übergegangen, daß wir den Wechsel des Standpunktes zwischen Ruhe und Bewegung bereits als etwas Selbstverständliches empfinden, daß unser Gefühl sich dagegen sträubt, wenn wir von der bewegten Erde oder dem bewegten Elektron sprechen ohne Angabe des Bezugssystems, in dem die Bewegung beobachtet wird. Der Kampf geht heutzutage nicht um diese spezielle, sondern um die allgemeine Relativitätstheorie.

Kaum hatte Einstein die spezielle Relativitätstheorie abgeschlossen, als ihm die gleichförmig-geradlinig-bewegten Bezugssysteme verdächtig wurden. Woher leiteten diese ihre besonderen Vorrechte gegenüber beschleunigten oder rotierenden Systemen ab? Was heißt überhaupt Beschleunigung oder Rotation, wenn nicht wieder ein absoluter Raum dahinter gedacht wird, gegen den Drehung oder Beschleunigung erfolgt? Hat es einen Sinn, von der rotierenden Erde zu sprechen, wenn sie allein vorhanden wäre, wenn Sonne und Fixsterne fehlten? Wir haben auf der Schule gelernt, daß die Rotation der Erde objektiv nachgewiesen werden kann durch den Pendelversuch, daß sie Zentrifugalkräfte und durch deren Vermittelung die Abplattung der Erde hervorruft. Also gäbe es scheinbar eine absolute Rotation und einen absoluten Raum, in dem die Rotation erfolgt, auch dann, wenn der rotierende Himmelskörper allein vorhanden wäre.

Mach war der erste, der auf Grund seines allgemeinen Phänomenalismus die Bündigkeit dieses Schlusses anzweifelte. Die Zentrifugalkräfte sind nach Mach



eine Wechselwirkung zwischen der rotierenden Erde und den Himmelskörpern, die nicht an der Rotation teilnehmen. Ohne diese könnte man von keiner Rotation sprechen und keine Zentrifugalkräfte beobachten. Diese Behauptung ist unwiderlegbar, weil der Versuch nicht ausführbar ist, und bleibt eben deshalb eine geistreiche Spekulation. Erst Einstein hat ihr physikalisches Leben gegeben.

Schon 1907 verglich Einstein die Verhältnisse im Gravitationsfelde mit denjenigen in einem beschleunigten Bezugssystem. Wir denken uns das eine Mal einen mit Beobachtungsgeräten ausgestatteten, geräumigen, nach außen abgeschlossenen Kasten an der Erdoberfläche ruhend und dem Einfluß der Erdschwere unterworfen; das andere Mal denselben Kasten außerhalb des Feldes der Erdschwere als Fahrstuhl mit der gleichförmigen Beschleunigung g „in die Höhe" gezogen. Der im Fahrstuhl eingeschlossene Beobachter stellt in beiden Fällen genau die gleichen Erscheinungen fest. Im ersten Falle fällt ein losgelassener Stein mit der Beschleunigung g zu Boden. Im zweiten Falle bleibt er sozusagen frei schwebend, aber der Boden bewegt sich ihm entgegen mit derselben Beschleunigung. Im ersten Falle drückt der Beobachter durch seine Schwere auf den Boden, im zweiten Fall durch seinen Trägheitswiderstand gegen die ihm vom Fahrstuhl erteilte Beschleunigung. Im ersten Falle kommt es auf seine „schwere Masse" an, im zweiten auf seine „träge". Daß beide Massenäußerungen gleich sind, hatte schon Bessel durch seine Pendelmessungen gezeigt; man hatte diese Gleichheit hingenommen, ohne nach einem Grunde zu fragen und ohne sich sehr darüber zu wundern. Erst Einstein hat sich gebührend darüber gewundert; er sah darin die Verknüpfung zweier bisher getrennter Erscheinungen, der Gravitation einerseits, der mechanischen Trägheitswirkungen andererseits. Indem er die völlige Gleichwertigkeit der Vorgänge in dem einen und dem anderen Fahrstuhl zum Postulat erhob, konnte er die Gleichheit von schwerer und träger Masse auf ein allgemeineres Prinzip zurückführen, auf das Prinzip der Äquivalenz des Gravitationsfeldes mit einem Beschleunigungsfelde.

Einsteins weitere Aufgabe (eine Riesenaufgabe!) bestand nun darin, die hier angedeutete Verknüpfung zwischen Gravitation und Beschleunigungszustand für ganz beliebige und beliebig bewegte physikalische Systeme durchzuführen und damit zugleich eine allgemeine Auffassung der Gravitation zu erreichen, der geheimnisvollen Grundkraft, die seit Newton in der Formel „proportional den Massen, umgekehrt proportional dem Entfernungsquadrat" erstarrt war und die sich allein von allen Naturkräften als momentane Fernwirkung behauptet hatte. Beide Kräftegruppen, Gravitations- und Trägheitswirkungen, sollten zurückgeführt werden auf die Raum-Zeit-Struktur, auf die inneren Meßverhältnisse der „Welt", diese Maßverhältnisse gegeben gedacht nicht durch irgend eine subjektive, apriorische Festsetzung, sondern durch die gegenseitige Lage und Wirkung der in der Welt vorhandenen realen Massen, Energien, Ereignisse. Die physikalischen Tatsachen formen ihrerseits erst die Welt, in der sie sich abspielen. Raum und Zeit werden im höchsten Sinne objektiviert (sie erhalten ihre Form lediglich von wirklichen Geschehnissen) und zugleich im höchsten Sinne relativiert (sie sind für sich nichts, sondern sie sind nur durch die in ihnen sich abspielenden Vorgänge).

Zur Durchführung dieses Programms bedurfte es der abstraktesten mathematischen Begriffe. Zum Glück lagen diese bereits ausgearbeitet vor in den Spekulationen unserer großen Geometer Gauß und Riemann. Gauß hatte in seiner Theorie der krummen Flächen die allgemeinste Wahl des Bezugsystems gelehrt („Gaußsche Koordinaten"). Riemann hatte für Gebilde beliebiger Dimension, insbesondere also auch für die vierdimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit der „Welt", diejenigen inneren Eigenschaften ermittelt, die von der Wahl des Bezugsystems unabhängig sind („Riemannsche Krümmung"). Wie in der speziellen



Relativitätstheorie die Gleichwertigkeit aller relativ zueinander gleichförmig bewegten Bezugsysteme gefordert wird, so wird in der allgemeinen Relativitätstheorie die Gleichberechtigung aller überhaupt denkbaren Gauß scher Koordinatensysteme statuiert. Wie in der speziellen Relativitätstheorie die Vorgänge von jedem der berechtigten Bezugsysteme aus in identischer Weise ablaufen, derart, daß die Eigenbewegung des Bezugsystems nicht beobachtbar wird, so sollen in der allgemeinen Relativitätstheorie die Naturgesetze unabhängig von der (völlig beliebigen) Wahl des Bezugssystems ausgesprochen werden können. Die mathematische Form der Naturgesetze soll so allgemein gefaßt werden, daß z. B. die Vorgänge an der Erdoberfläche durch Gleichungen von derselben Form beschrieben werden, mag man nun die Erde als rotierend oder als ruhend oder als sonst irgendwie beschleunigt bewegt denken. Diese Forderung ist das allgemeine Relativitätsprinzip Einsteins, die letzte und weitestgespannte Generalisierung des alten Relativitätsprinzipes der klassischen Mechanik.

Die geforderte Unabhängigkeit der Naturgesetze von der Koordinatenwahl bringt es mit sich, daß in dem allgemeinen Ausdruck der Naturgesetze (unter der durch die Natur des Problems bedingten Einschränkung auf Differentialquotienten zweiter Ordnung) nur die Riemannsche Krümmung eingehen kann, da nur diese, wie wir sagten, auf den wesentlichen inneren Eigenschaften des Gebildes beruht und von der zufälligen, unwesentlichen Koordinatenwahl frei ist. Wie diese Krümmungsgröße genauer definiert ist, können wir hier, ohne zu weitschweifig zu werden, nicht angeben. Schon bei einer gewöhnlichen krummen Fläche, die doch unserer dreidimensionalen Anschauung ohne weiteres zugänglich ist, läßt sich der genaue Begriff der Krümmung als innere Eigenschaft der Fläche nicht ohne mathematische Konstruktionen oder Rechnungen definieren. Z. B. hat der Mantel eines Kreiszylinders im Gauß-Riemannschen Sinne keine Krümmung, da er sich ohne Änderung seiner inneren Eigenschaften (ohne Dehnung und Zerrung) in eine Ebene verbiegen läßt, nachdem man ihn einmal längs einer seiner Mantellinien aufgeschnitten hat. Anders eine Kugel, welche eine um so stärkere Krümmung hat, je kleiner ihr Radius ist, und welche sich nicht auf die Ebene abwickeln läßt. Um die Krümmungsverhältnisse in der vierdimensionalen Welt beschreiben zu können, müssen wir in ihr zehn zweidimensionale Flächen legen; die auf ihnen gemessenen Krümmungen kennzeichnen dann diejenigen inneren Eigenschaften der Welt in dem fraglichen Punkte, die wir unter dem Namen der Riemannschen Krümmung zusammengefaßt haben. Die Riemannsche Krümmung der „Welt" wird also durch 10 Maßzahlen bestimmt. Der allgemeine Ausdruck des Naturgeschehens lautet nun nach Einstein „Die Krümmung der Welt ist an jeder Stelle proportional der dort vorhandenen Energie." Auch die Energie ist nicht wie die Wärmeenergie oder die Bewegungsenergie durch eine Maßzahl gegeben, sondern in allgemeinerer Auffassung durch 10 Maßzahlen; sie begreift den Energiefluß und den Impuls (Bewegungsgröße, Druck etc.) in sich. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Krümmung und Energie ist nichts anderes als die Gravitationskonstante des Newtonschen Gesetzes.

Damit dieses Grundgesetz kein leeres Schema bleibt, wollen wir versuchen, es uns im Bilde näher zu führen. Dabei werden wir nicht von der unverstellbaren wirklichen vierdimensionalen Welt, sondern von einer nur zweifach ausgedehnten im allgemeinen flachen Welt sprechen. An einzelnen Stellen dieser Welt mögen sich Massen befinden (z. B. Sonne, Erde) in Ruhe oder in Bewegung. Solche Stellen sind, wie schon die spezielle Relativitätstheorie lehrte, Anhäufungen von Energie. Hier wird also unsere sonst flache Welt gekrümmt sein, am Orte und in der Umgebung der Masse haben wir Erhebungen, Buckel. Denken wir uns diese Welt nach Art eines (nicht durchweg ebenen) Billards vor uns liegen und lassen wir, um



im Bilde des Billards zu bleiben, einen kleinen Ball darüber hin laufen, so wird er sich im allgemeinen auf gerader Bahn bewegen; wenn er sich aber einem unserer Massenbuckel nähert, wird er abgelenkt. Die gerade Bahn geht über in die unter den gegebenen Krümmungsverhältnissen möglichst gerade, oder, wie man sagt, geodätische Bahn. Diese Abweichung von der Geradheit ist Folge des Vorhandenseins unserer Massen und erklärt die allgemeine Newtonsche Gravitation. Sie liefert die oben verlangte Zurückführung der Gravitation auf die Raum-Zeit-Struktur, auf die Krümmungsverhältnisse in der Welt.

Daraufhin wolle man die Andeutungen in dem vorangestellten Briefe Einsteins nochmals überlesen; sie zeigen uns, daß das Gesetz „Weltkrümmung proportional Energie" nicht nur qualitativ und bildlich die Gravitation widerzuspiegeln vermag, sondern daß es auch rechnerisch exakt wenigstens in erster Näherung das Newtonsche Gesetz vom Entfernungsquadrat liefert. Die elliptischen Bahnen, die die Planeten um die Sonne beschreiben, sind in der vierdimensionalen Welt solche geradesten oder geodätischen Bahnen, wie sie unserem Ball durch die von der Sonne ausgehende Weltkrümmung aufgezwungen werden. Unser Ball sei insbesondere der Merkur, d. h. der sonnennächste Planet. Das Gesetz vom Entfernungsquadrat gilt nur in erster Näherung; in großer Sonnennähe liefert die genaue Ausrechnung der Riemannschen Krümmung Abweichungen davon. Diese bewirken eine langsame Drehung der Merkurellipse, ein Fortschreiten ihres Perihels, d. h. ihres sonnennächsten Bahnpunktes. Daß der Betrag dieses Fortschreitens (43 Bogensekunden im Jahrhundert) sich genau so groß ergab, wie die sorgsamsten astronomischen Beobachtungen und Rechnungen ihn ermittelt hatten, war das Herrliche, das Einstein 1915 erlebte. Man bemerke wohl: der Einsteinsche Gedankengang nahm seinen Ausgang von erkenntnistheoretischen Forderungen, hatte nirgends eine Unbestimmtheit oder Lücke, wußte von Hause aus nichts vom Merkurperihel und führte doch zwangläufig und ungewollt zu dem astronomischen Beobachtungswert von 43".

Unser Billardball werde andererseits mit Lichtgeschwindigkeit durch unsere gekrümmte Welt gejagt. Die Abweichung von der Geradlinigkeit wird dann, eben wegen der Größe der Geschwindigkeit, nur winzig sein. Der Lichtstrahl, den unser Ball jetzt wenigstens in der Näherung der Emissionsauffassung darstellt, muß schon dicht am Sonnenrande vorbeigehen, damit seine Ablenkung merkbar wird. D. h. der Fixstern, der den Lichtstrahl zu uns entsendet, muß in nächster Nähe der Sonne stehen. Dann ist er aber im allgemeinen für uns unsichtbar. Man mußte also eine Sonnenfinsternis abwarten, um diesen Effekt beobachten zu können. Eine solche fand am 29. Mai 1919 statt und war in Brasilien total. Die Engländer übernahmen die Aufgabe, von deren Erfüllung Deutschland ausgesperrt war, und haben ihre Sache gut gemacht. Sie konnten sieben starke sonnennahe Sterne beobachten. Die Ablenkungen (auf den photographischen Platten nur von mikroskopischer Größe) lagen alle im Sinne der Einsteinschen Theorie und stimmten innerhalb des Beobachtungsfehlers mit der theoretischen Größe überein (1,7 Bogensekunden für einen Stern am Sonnenrande). Spätere Sonnenfinsternisse werden lange nicht so günstig sein; man wird sich bei ihnen mit schwächeren und sonnenferneren Sternen begnügen müssen. Der 29. Mai 1919 wird in der Geschichte des menschlichen Geistes ewig denkwürdig bleiben.

Zum Teil kann man das Ergebnis der Sonnenfinsternis schon verstehen auf Grund des obigen Postulates von der Äquivalenz zwischen Gravitations- und Beschleunigungsfeld. In dem ruhenden Fahrstuhl mit Schwerefeld beschreibt jeder in Bewegung gesetzte Körper eine Wurfparabel; in dem beschleunigten Fahrstuhl stellt sich dieselbe Bahnform relativ gegen den Fahrstuhl ein, da die räumlich gesprochen geradlinige Bahn durch das beschleunigte Entgegenkommen des Fahrstuhls relativ zu diesem gekrümmt erscheint. Das gilt für jede Geschwindigkeit des Körpers, auch für die Lichtgeschwindigkeit. Daher wird auch ein Lichtstrahl parabolisch



abgekrümmt, zunächst im Beschleunigungsfelde, aber nach dem Äquivalenzpostulat auch im Gravitationsfelde. Scheinbar ist also die Theorie dieser Lichtablenkung sehr einfach, aber nur scheinbar. Wie Einstein in seinem Brief von 1915 bemerkt, ist die wahre Lichtablenkung, die sich aus der vollständigen Theorie ergibt, doppelt so groß als er sie nach der eben skizzierten rohen Theorie ursprünglich berechnet hatte. Gerade die Entscheidung zwischen dem vollen Wert der wahren Theorie und dem halben Wert der elementaren, auf dem Äquivalenzpostulat beruhenden Betrachtung war das eigentliche Ziel bei der rechnerischen Diskussion der Sonnenfinsternisaufnahmen von 1919.

Wir können dem Vergleich unserer beiden Fahrstühle noch eine weitere Prüfungsmöglichkeit der Einsteinschen Theorie entnehmen. Ordnen wir in dem nach oben beschleunigten Fahrstuhl eine einfarbige Lichtquelle am Boden an (z. B. eine gelbe Natriumflamme) und beobachten wir sie an der Decke. Das Licht braucht eine gewisse Zeit, um vom Boden zur Decke zu gelangen; in dieser Zeit hat die Geschwindigkeit des Fahrstuhls zugenommen. Die Lichtquelle im Augenblick des Aussendens hatte also eine geringere Geschwindigkeit als der Beobachter im Augenblick des Ankommens der Welle (oder eines bestimmten Teiles derselben). Denkt sich der Beobachter als ruhend, so hat die Lichtquelle beim Aussenden eine von ihm fortgerichtete Relativgeschwindigkeit. Hiermit ist aber ein Dopplereffekt verknüpft, der z. B. die gelbe Farbe der Natriumflamme ein wenig ins Rot spielen lassen würde. (Bekanntlich bewirkt eine vom Beobachter fortgerichtete Bewegung der Licht- oder Schallwelle eine Auseinanderziehung der Wellenfolge, also eine Vergrößerung der Wellenlänge, eine auf den Beobachter hingerichtete Bewegung eine Zusammenstauchung des Wellenzuges, also eine Verkleinerung der Wellenlänge.) Auf den im Schwerefelde ruhenden Fahrstuhl übertragen bedeutet dieser Dopplereffekt: Eine Lichtquelle an Orten höherer Gravitationsenergie (am Boden des Fahrstuhls) strahlt eine etwas rötere Wellenlänge aus als dieselbe Lichtquelle an Orten niederer Gravitationsenergie (an der Decke des Fahrstuhls). Dabei ist die „Rotverschiebung“ der Wellenlänge direkt proportional der Arbeit, die das Gravitationsfeld auf die Masseneinheit beim Übergang von dem ersten zum zweiten Orte leistet.

Diese Rotverschiebung steht zur Zeit im Mittelpunkt des Interesses. Von Schwarzschild wurde sie an gewissen Stickstofflinien des Sonnenspektrums nachgewiesen, aber in einem kleineren Betrage als aus der Einsteinschen Berechnung folgt. Merkwürdigerweise hat sich mit den vorzüglichen Mitteln des Mount-Wilson-Observatoriums fast keine Spur des Effektes ergeben. Dagegen haben kürzlich die Herren Grebe und Bachem in Bonn an denselben Stickstofflinien unter planmäßiger Auswahl von 6 ungestörten und Ausschaltung aller durch Störungen verdächtigen Linien die Rotverschiebung quantitativ bestätigt. Eine weitere Überraschung brachte die diesjährige Nauheimer Naturforscherversammlung. Indem dieselben Herren eine Statistik von 100 Stickstofflinien, gestörten und ungestörten, durchführten, wurden sie abermals im wesentlichen auf den Einsteinschen Wert der Rotverschiebung geführt. Wir haben also allen Grund anzunehmen, daß die weitere Verfolgung auch dieses schwierigen Problems mit einem vollen Siege der Einsteinschen Prophezeiung endigen wird.

Zum Schluß werfen wir einen Blick auf die Weltanschauungsfragen. Die volle Relativierung von Raum und Zeit, wie sie in dem unerbittlichen Formelgerüst der Einsteinschen Theorie durchgeführt ist, wird nicht umhin können, die philosophischen Grundlagen der Erkenntnistheorie entscheidend zu beeinflussen und die aprioristischen Lehren Kants umzudeuten. Mit größerer Sicherheit können wir



von einer Wandlung unserer realen Weltanschauung, von einem Umsturz im Kopernikanischen System sprechen. Künftighin ist es nicht mehr verboten zu sagen: die Erde steht still und der Fixsternhimmel dreht sich um die Erde, oder: die Sonne bewegt sich und die Erde steht im Brennpunkte der Sonnenbahn („und sie bewegt sich doch nicht!"). Die Aussage, daß der Fixsternhimmel ruhe, hat relativistisch überhaupt keinen Sinn und Inhalt. Daß der sich drehende Fixsternhimmel an der ruhenden Erde genau dieselben Zentrifugalkräfte als Gravitationswechselwirkungen hervorruft, wie sie nach Newton und nach der Erfahrung an der sich drehenden Erde auftreten, ist durch die Einsteinsche mathematische Weltordnung gesichert und im einzelnen durch Rechnung nachgewiesen (diesmal nicht von Einstein selbst, sondern von Thirring). Freilich wird es immer bequemer und für die praktischen Zwecke der rechnenden Astronomen vernünftiger sein, mit Kopernikus den heliozentrischen Standpunkt einzunehmen. Aber es ist auch nicht widersinnig, sich mit Ptolemäus auf den geozentrischen Standpunkt zu stellen. Gerade der souveräne Wechsel des Standpunktes ist es, den die Relativitätstheorie uns frei gemacht hat und der sie zu ihren Erfolgen in der Gravitationstheorie geführt hat.

Die Charakteristik zusammengesetzter Leitungen.

Von

Ulfilas Meyer.

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt.)

In letzter Zeit hat in der Fernsprechtechnik die Charakteristik der Leitungen sehr an Bedeutung gewonnen; besonders durch die Ausgleichsschaltungen bei Verstärkereinrichtungen. Während bei homogenen Leitungen sich die Charakteristik in sehr einfacher Weise durch die elektrischen Konstanten ausdrücken läßt, es ist

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R} + i\omega L}{\mathfrak{A} + i\omega K}},$$

wird bei zusammengesetzten Leitungen diese Abhängigkeit ziemlich verwickelt. Um unsere Kenntnis über solche Leitungen zu vertiefen, erscheint es jedoch nützlich, die Abhängigkeit trotzdem einmal formelmäßig zu entwickeln und Gesetzmäßigkeiten darin aufzusuchen.

Um zunächst möglichst allgemein zu bleiben, wollen wir den Fall betrachten, daß in eine homogene Leitung ein Stück einer Leitung mit anderen Konstanten an irgend einer Stelle zwischengeschaltet ist. Die Konstanten der einzelnen Abschnitte bezeichnen wir mit den Indizes 1, 2 und 3. Dann ist, da der erste und dritte Abschnitt von gleicher Bauart sein soll, $\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_1$ und $\gamma_3 = \gamma_1$. In der allgemeinen Gleichung

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{A}\,\mathfrak{V}_e + \mathfrak{B}\,\mathfrak{J}_e$$
$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{A}'\,\mathfrak{J}_e + \mathfrak{C}\,\mathfrak{V}_e$$

gelten in diesem Fall die Beziehungen[1])

$$\mathfrak{A} = \operatorname{Cos}\gamma_2 l_2 \operatorname{Cos}\gamma_1 (l_1 + l_3) + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \operatorname{Cos}\gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}\gamma_2 l_2 \operatorname{Sin}\gamma_1 l_3 + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Sin}\gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}\gamma_2 l_2 \operatorname{Cos}\gamma_1 l_3,$$

$$\mathfrak{A}' = \operatorname{Cos}\gamma_2 l_2 \operatorname{Cos}\gamma_1 (l_1 + l_3) + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Cos}\gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}\gamma_2 l_2 \operatorname{Sin}\gamma_1 l_3 + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} \operatorname{Sin}\gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}\gamma_2 l_2 \operatorname{Cos}\gamma_1 l_3,$$

[1]) Die hyperbolischen Funktionen sind im Folgenden durch große Anfangsbuchstaben gekennzeichnet: Sin, Cos usw.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}_1 \operatorname{Cos} \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} \gamma_1 (l_1 + l_3) + \mathfrak{Z}_2 \operatorname{Cos} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} \gamma_1 l_3 + \frac{\mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Sin} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} \gamma_1 l_3,$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_1} \operatorname{Cos} \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} \gamma_1 (l_1 + l_3) + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Cos} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} \gamma_1 l_3 + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1^2} \operatorname{Sin} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} \gamma_1 l_3.$$

Die Charakteristik der Gesamtleitung ist durch die Gleichung bestimmt

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}'\,\mathfrak{C}}}\,.$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen der obigen Werte

$$\mathfrak{Z}^2 = \frac{\begin{aligned} &\mathfrak{Z}_1 [\operatorname{Cos}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 (l_1 + l_3) + \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Cos} 2 \gamma_1 l_3] + \\ &+ \mathfrak{Z}_2 \operatorname{Cos} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} 2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} \gamma_1 (l_1 + 2 l_3) + \frac{\mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Sin} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} 2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} \gamma_1 (l_1 + 2 l_3) + \\ &+ \frac{\mathfrak{Z}_2^2}{\mathfrak{Z}_1} \operatorname{Cos}^2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_3 + \frac{\mathfrak{Z}_1^3}{\mathfrak{Z}_2^2} \operatorname{Sin}^2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_3 \end{aligned}}{\begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{Z}_1} [\operatorname{Cos}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 (l_1 + l_3) + \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Cos} 2 \gamma_1 l_3] + \\ &+ \frac{1}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Cos} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} 2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} \gamma_1 (l_1 + 2 l_3) + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1^2} \operatorname{Sin} \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} 2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} \gamma_1 (l_1 + 2 l_3) + \\ &+ \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2^2} \operatorname{Cos}^2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_3 + \frac{\mathfrak{Z}_2^2}{\mathfrak{Z}_1^3} \operatorname{Sin}^2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_3 \end{aligned}}\,. \tag{1}$$

Diese Gleichung läßt sich durch einige Umformungen auf folgende etwas einfachere Form bringen, wobei zur Abkürzung $\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} = \mathfrak{M}$ gesetzt ist:

$$\frac{\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2} = \frac{\begin{aligned} &(\mathfrak{M}^2 - 1) \operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 (2 \mathfrak{M} \operatorname{Cos} \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} 2 \gamma_1 l_3 + \\ &+ (\mathfrak{M}^2 + 1) \operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_3) \end{aligned}}{\begin{aligned} &2 \mathfrak{M}^2 \operatorname{Cos} 2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 (l_1 + l_3) + \mathfrak{M} (\mathfrak{M}^2 + 1) \operatorname{Sin} 2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} 2 \gamma_1 (l_1 + l_3) + \\ &+ (\mathfrak{M}^2 - 1)^2 \operatorname{Sin}^2 \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} 2 \gamma_1 l_1 \operatorname{Sin} 2 \gamma_1 l_3 \end{aligned}}\,. \tag{2}$$

Mit dieser allgemeinen Gleichung ist zunächst wenig anzufangen; um zu brauchbaren Folgerungen zu gelangen, müssen wir besondere Fälle ins Auge fassen, bei denen sich eine Vereinfachung ergibt. Wir nehmen daher einmal an, daß $\mathfrak{Z}_2$ nur sehr wenig von $\mathfrak{Z}_1$ abweicht, so daß $\mathfrak{M} - 1$ klein ist und höhere Potenzen davon vernachlässigt werden können. Dieser Fall ist von praktischer Bedeutung, denn die elektrischen Größen jeder „homogenen" Leitung sind kleinen Schwankungen unterworfen; unsere Gleichung wird uns daher die Frage beantworten, welchen Einfluß kleine räumliche Schwankungen der Charakteristik $\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R} + i\omega L}{\mathfrak{A} + i\omega K}}$ auf die Größe der Charakteristik der gesammten Leitung haben. Bei Durchführung der eben erwähnten Vernachlässigungen vereinfacht sich unsere Grundgleichung auf folgende Form:

$$\frac{\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2} = \frac{\mathfrak{M}^2 - 1}{\mathfrak{M}} \frac{\operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} (\gamma_2 l_2 + 2 \gamma_1 l_3)}{\operatorname{Sin} 2 (\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_1 l_3)}\,. \tag{3}$$

Die Abweichung der Charakteristik der Gesamtleitung $\mathfrak{Z}$ von der Charakteristik $\mathfrak{Z}_1$ wird also um so größer, je größer der Ausdruck auf der rechten Seite wird, und zwar seinem absoluten Betrage nach. Nun ist

$$\left| \frac{\operatorname{Sin} \gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} (\gamma_2 l_2 + 2 \gamma_1 l_3)}{\operatorname{Sin} 2 (\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_1 l_3)} \right| = \sqrt{\frac{(\operatorname{Sin}^2 \beta_2 l_2 + \sin^2 \alpha_2 l_2) [\operatorname{Sin}^2 (\beta_2 l_2 + 2 \beta_1 l_3) + \cos^2 (\alpha_2 l_2 + 2 \alpha_1 l_3)]}{\operatorname{Sin}^2 2 (\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_1 l_3) + \sin^2 2 (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_1 l_3)}}\,. \tag{4}$$

Während die Hyperbelfunktionen mit wachsendem l stets zunehmen, schwanken die Quadrate der trigonometrischen Funktionen zwischen den Werten 0 und 1. Wir betrachten zunächst den Faktor $(\mathfrak{Sin}^2 \beta_2 l_2 + \sin^2 \alpha_2 l_2)$. Da die Schwankungen der elektrischen Größen nur sehr geringe räumliche Ausdehnung haben, ist l_2 immer kurz und somit wird bei gewöhnlichen Leitungen dieses ganze Glied klein, daher ist die Abweichung der Charakteristik erst recht zu vernachlässigen, denn dabei ist (4) noch mit der kleinen Größe $\frac{\mathfrak{M}^2 - 1}{\mathfrak{M}}$ multipliziert. Anders liegen die Verhältnisse aber bei Pupinleitungen, bei diesen muß die Länge eines Spulenabstandes mit der zugehörigen Spule als einheitliches Element aufgefaßt werden, l_2 ist daher hier nicht so ganz klein und da auch das Winkelmaß bei Pupinleitungen verhältnismäßig groß ist, ist der Wert von $\sin \alpha_2 l_2$ von der Größenordnung 1. Im allgemeinen werden die Abmessungen so gewählt, daß $\alpha_2 l_2$ bei der Frequenz 5000 ungefähr 30° ist, d. h. $\sin \alpha_2 l_2 \approx \frac{1}{2}$; in diesem Fall bewirkt also dieser erste Faktor kein Verschwinden des Ausdrucks (4), die Abweichung der Gesamtcharakteristik kann hier merklich werden.

Der Ausdruck (4) wird ferner um so größer, je kleiner der Nenner ist; am größten daher, wenn das Winkelmaß der Gesamtleitung $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_1 l_3$ gleich einem Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ist. Da die Wellenlängenkonstante α der Frequenz proportional ist, wird diese letztere Bedingung bei jeder Leitung für gewisse Frequenzen erfüllt sein. Unsere Formel gibt uns demnach eine Erklärung für die schon häufig beobachtete Tatsache, daß bei Pupinleitungen, und zwar nur bei diesen, die Charakteristik verhältnismäßig stark von der Frequenz abhängt, und daß für die Frequenzen, für welche die Leitungslänge ein Vielfaches einer Viertelwellenlänge ist, Maximas der Abweichung auftreten. Je länger die Leitung ist, desto schwächer werden sich dabei die Abweichungen infolge des Gliedes $\mathfrak{Sin}^2 2 (\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_1 l_3)$ bemerkbar machen.

Es bleibt uns nun noch übrig, den Einfluß des zweiten Faktors im Zähler des Ausdruckes (4) abzuschätzen. Man ersieht daraus, daß die Abweichungen am stärksten sind, wenn der Abstand der Mitte des mittleren Leitungsstückes vom Ende der Leitung gleich einem Vielfachen einer Viertelwellenlänge ist, weil dann $\cos^2 (\alpha_2 l_2 + 2 \alpha_1 l_3)$ am größten, nämlich gleich 1 ist, daß aber im übrigen die Lage des mittleren Leitungsstückes nur von geringem Einfluß auf die Größe der Abweichung ist, sie wird wegen des Gliedes $\mathfrak{Sin}^2 (\beta_2 l_2 + 2 \beta_1 l_3)$ langsam um so stärker, bei sonst gleichen Verhältnissen, je weiter das abweichende Stück vom Ende entfernt ist, je näher es also am Anfang liegt. Die Gleichung (3) läßt ferner ohne weiteres erkennen, daß die Abweichung der Gesamtcharakteristik von $\mathfrak{Z}_1$ größer werden kann als die Abweichung des $\mathfrak{Z}_2$ von $\mathfrak{Z}_1$, da der Faktor (4) größer als 1 werden kann. Wir wollen uns hier mit diesen allgemeinen Folgerungen begnügen; eine genauere Ableitung des Wertes der Gesamtcharakteristik, sowohl dem absoluten Wert wie dem Phasenwinkel nach, würde zu sehr unhandlichen Formeln führen. Für besondere Fälle läßt sich die Rechnung mit Hilfe der Gleichung (3) ohne größere Schwierigkeiten durchführen. In der Praxis sind außerdem die Verhältnisse noch etwas verwickelter, denn die einzelnen Elemente der Pupinleitung sind in ihren elektrischen Werten alle etwas voneinander verschieden. Durch Übereinanderlagerung der von ihnen herrührenden Abweichungen wird die scheinbar ganz regellose Abhängigkeit der Charakteristik von der Frequenz hervorgerufen, wie sie bei den Beobachtungen an längeren Kabelstücken gefunden worden ist (siehe Höpfner, Über Fernsprechverstärker. Telegraphen- u. Fernsprechtechnik, 1919, 3. Sonderheft, Seite 84, Abb. 16).



Die Herren K. W. Wagner und Küpfmüller haben in einer im nächsten Archivheft erscheinenden Arbeit eine eingehendere theoretische und experimentelle Untersuchung der Charakteristik von Spulenleitungen ausgeführt, wodurch die beobachteten eigenartigen Schwankungen der Charakteristik in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenen maßgebenden Faktoren vollständig aufgeklärt werden.

Die Fernleitungen werden jetzt, auch wenn sie Freileitungen sind, meist mittels Kabel in das Gebiet der Städte eingeführt. Der Fernleitung ist also dabei ein kurzes Stück einer Leitung mit erheblich abweichender Charakteristik vorgeschaltet, die Charakteristik einer Freileitung unterscheidet sich von der eines Pupinkabels hauptsächlich im absoluten Betrag, von der eines gewöhnlichen Kabels im Phasenwinkel. Wir wollen auch auf diesen Fall unsere Formel anwenden und sehen, was wir mit ihrer Hilfe über die Charakteristik der Gesamtleitung aussagen können. Es ist also jetzt in Formel (2) $l_3 = 0$ zu setzen (wenn man auch am Ende der Freileitung eine gleiche Länge Einführungskabel annimmt, also $l_1 = l_3$ setzt, gelangt man fast zu der gleichen Formel wie unten). Dann wird

$$\frac{\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2} = \frac{(\mathfrak{M}^2 - 1)\operatorname{Sin} 2\gamma_2 l_2}{2\mathfrak{M}\operatorname{Cos} 2\gamma_2 l_2 \operatorname{Sin} 2\gamma_1 l_1 + (\mathfrak{M}^2 + 1)\operatorname{Sin} 2\gamma_2 l_2 \operatorname{Cos} 2\gamma_1 l_1} \tag{5}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2} = \frac{\mathfrak{Z}_2^2 - \mathfrak{Z}_1^2}{\mathfrak{Z}_2^2 + \mathfrak{Z}_1^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} 2\gamma_1 l_1 + \dfrac{2\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_2^2 + \mathfrak{Z}_1^2}\operatorname{Sin} 2\gamma_1 l_1 \operatorname{Cotg} 2\gamma_2 l_2}. \tag{6}$$

Da die Freileitung verhältnismäßig lang ist, kann $\operatorname{Cotg} 2\gamma_2 l_2$ in erste Annäherung gleich 1 gesetzt werden, dann ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_1} = \frac{\mathfrak{Z}_2 \operatorname{Cos}\gamma_1 l_1 + \mathfrak{Z}_1 \operatorname{Sin}\gamma_1 l_1}{\mathfrak{Z}_1 \operatorname{Cos}\gamma_1 l_1 + \mathfrak{Z}_2 \operatorname{Sin}\gamma_1 l_1}. \tag{7}$$

Am meisten interessiert auch hier die Abhängigkeit des $\mathfrak{Z}$ von der Frequenz, um darüber ein Bild zu gewinnen setzen wir $\mathfrak{Z} = x + iy$, trennen das Reelle vom Imaginären und eliminieren aus den beiden so erhaltenen Gleichungen α_1, da diese Größe sich am stärksten mit der Frequenz ändert. Die Gleichung zwischen x und y wird uns dann angeben, auf was für einer Kurve die Endpunkte des Vektors $\mathfrak{Z}$ liegen würden, wenn $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ und β unabhängig von der Frequenz wären. Die Gleichung läßt sich in der Form schreiben

$$(x - \sqrt{r^2 + Z_1^2}\cos\varphi_1)^2 + (y - \sqrt{r^2 + Z_1^2}\sin\varphi_1)^2 = r^2, \tag{8}$$

$$\text{wobei } r = Z_1 \frac{\sqrt{Z_1^4 + Z_2^4 - 2Z_1^2 Z_2^2 \cos 2(\varphi_2 - \varphi_1)}}{2Z_1 Z_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\operatorname{Cos} 2\beta_1 l_1 + (Z_1^2 + Z_2^2)\operatorname{Sin} 2\beta_1 l_1}; \tag{9}$$

es ist also die Gleichung eines Kreises. Dieser Kreis würde einmal durchlaufen werden, wenn $\alpha_1 l_1$ um π wächst; da l_1 im allgemeinen kurz ist, wird eine so starke Änderung des Winkelmaßes bei den in Betracht kommenden Frequenzen nicht erreicht, es wird also nur ein Teil des Kreises durchlaufen. Bei nicht pupinisierten Kabeln ist auch α_1 klein und daher werden in diesem Fall die Änderungen der Gesamtcharakteristik mit der Frequenz nur sehr gering sein. Genau genommen sind die in (9) auftretenden Größen nicht unabhängig von der Frequenz, aber sie ändern sich in dem für die Fernsprechtechnik in Betracht kommenden Frequenzbereich doch nur sehr wenig; am stärksten ist die Änderung wohl noch bei den Phasenwinkeln φ; da jedoch in (9) nur der Cosinus ihrer Differenz, die selbst nicht groß ist, auftritt, wird r dadurch nur wenig geändert. Die Lage der Endpunkte des Vektors $\mathfrak{Z}$ bei verschiedenen Frequenzen wird also auch bei Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit aller Größen nur wenig von dem durch Gleichung (8) bestimmten Kreise abweichen.

Um den aus der Frequenzabhängigkeit der Gesamtcharakteristik von Fernleitungen entspringenden Nachteil für die Abgleichung der Leitungen zu vermeiden, wird es sich vielleicht empfehlen, die Einführungskabel nur so weit mit Selbstinduktion zu belasten, daß die Charakteristiken der Freileitung und des Kabels möglichst genau gleichwerden, die Vergrößerung der Dämpfungskonstante des Kabels kommt bei dessen Kürze nur wenig in Betracht, besonders da die Reflexionen gleichzeitig vermindert werden.

Zusammenfassung. Aus der Berechnung der Charakteristik zusammengesetzter Leitungen lassen sich folgende Folgerungen ableiten: Bei Pupinleitungen können Unterschiede in den elektrischen Konstanten der einzelnen Glieder erhebliche Änderungen der Gesamtcharakteristik mit der Frequenz verursachen; die Änderungen werden besonders groß bei den Frequenzen, bei denen die Länge der Leitung ein Vielfaches einer Viertelwellenlänge ist. Die Lage des abweichenden Gliedes ist nur von geringem Einfluß auf die Größe der Änderung, diese nimmt mit zunehmender Entfernung des Gliedes vom Anfang ab. Bei gewöhnlichen nicht pupinisierten Leitungen sind räumliche Schwankungen der elektrischen Konstanten von geringem Einfluß auf die Größe der Gesamtcharakteristik.

Bei langen Fernleitungen mit vorgeschalteten Einführungskabeln anderer Charakteristik liegen die Endpunkte der als Vektor auf der komplexen Zeichnungsebene aufgetragenen Gesamtcharakteristik bei verschiedenen Frequenzen angenähert auf einem Kreise.

Selbsterregung einer Gleichstromnebenschlußmaschine für Wechselstromabgabe.

Von

L. Fleischmann.

Im Archiv für Elektrotechnik, 9. Band, 2./3. Heft, 8. Juli 1920, Seite 95, gibt Leyerer eine Ableitung der Bedingungen für die Wechselstromselbsterregung von Gleichstromnebenschlußmaschinen mittels Differentialgleichungen. Es soll hier unter der Voraussetzung, daß sinusförmige Wechselströme entstehen können, auf elementarem Wege dasselbe abgeleitet werden. Die Schaltung (Bild 1) ist die folgende: die Erregerspule ist, zum Unterschied von der normalen Schaltung, nicht von den Bürsten direkt, sondern hinter einem Widerstand (Regulator) abgezweigt und liegt parallel zu einer anderen Spule mit Widerstand und Selbstinduktion. Es bezeichnet r_n den Widerstand und L_n den Selbstinduktionskoeffizienten der Erregerwicklung, R und L_a den Widerstand und SJK des Regulators, r_r und L_r Widerstand und SJK des Verbrauchskreises und N_n den Koeffizienten der rotatorischen Induktion. Es ist $\mathfrak{Z}_a = R - j w L_a$, $\mathfrak{Z}_n = r_n - j w L_n$, $\mathfrak{Z}_r = r_r - j w L_r$, w die (zunächst unbekannte) Kreisfrequenz $j = \sqrt{-1}$. Ist $\mathfrak{E} = N_n \mathfrak{J}_1$ die EMK der Maschine in Phase mit $\mathfrak{J}_1$ (es wird von Eisenverlusten und Wirbelstromverlusten abgesehen), $\mathfrak{J}_1$ die Stromstärke in $\mathfrak{Z}_n$ der Erregerwicklung, $\mathfrak{J}_2$ die Stromstärke in $\mathfrak{Z}_r$, $\mathfrak{J}_3$ die Stromstärke in $\mathfrak{Z}_a$, so haben wir die Gleichungen in komplexen Größen

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{J}_3 \mathfrak{Z}_a = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{Z}_n. \qquad (1)$$

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{J}_3 \mathfrak{Z}_a = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{Z}_r. \qquad (2)$$

$$\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3. \qquad (3)$$

Setzen wir in Gleichung (1) und (2) den Wert für $\mathfrak{J}_3$ aus Gleichung (3) ein und für $\mathfrak{E} = N_n \mathfrak{J}_1$ (N_n ist eine Funktion von dem absoluten Betrag von $\mathfrak{J}_1$), so erhalten wir

$$\mathfrak{J}_1 (N_n - \mathfrak{Z}_a - \mathfrak{Z}_n) - \mathfrak{J}_2 \mathfrak{Z}_a = 0.$$
$$\mathfrak{J}_1 (N_n - \mathfrak{Z}_a) - \mathfrak{J}_2 (\mathfrak{Z}_a + \mathfrak{Z}_r) = 0.$$

Damit diese beiden Gleichungen gleichzeitig bestehen können muß

$$\begin{vmatrix} (N_n - \mathfrak{Z}_a - \mathfrak{Z}_n & -\mathfrak{Z}_a \\ (N_n - \mathfrak{Z}_a) & -(\mathfrak{Z}_a + \mathfrak{Z}_r) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\mathfrak{Z}_a \mathfrak{Z}_r + \mathfrak{Z}_n \mathfrak{Z}_a + \mathfrak{Z}_n \mathfrak{Z}_r = N_n \mathfrak{Z}_r.$$

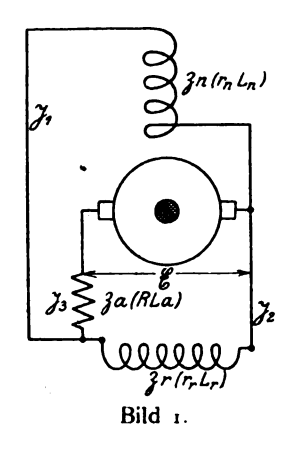


Bild 1.

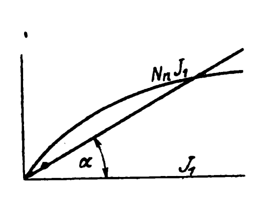


Bild 2.

Dieses ist eine Gleichung komplexer Größen und zerfällt in zwei Gleichungen. Setzen wir $L_a = 0$, so kommt

$$R r_n + R r_r + r_n r_r - N_n r_r = w^2 L_n L_r \tag{4}$$

und nach Division des imaginären Teiles mit w

$$N_n = (R + r_r) \frac{L_n}{L_r} + R + r_n. \tag{5}$$

Aus (4) finden wir

$$w = \sqrt{\frac{R r_n + R r_r + r_n r_r - N_n r_r}{L_n L_r}}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (5) mi J_1, so erhalten wir

$$J_1 N_n = J_1 \left[(R + r_r) \frac{L_n}{L_r} + R + r_n \right]. \tag{6}$$

$J_1 N_n$ ist die Leerlaufcharakteristik der Maschine in Abhängigkeit von J_1 und $J_1 \left[(R + r_r) \frac{L_n}{L_r} + R + r_n \right]$ ist eine Gerade, welche mit der Abszissenachse einen Winkel α einschließt, gegeben durch $\operatorname{tg} \alpha = (R + r_r) \frac{L_n}{L_r} + R + r_n$.

Die Lösung der Gleichung (6) ergibt sich infolgedessen sehr einfach aus der graphischen Konstruktion (Bild 2).

Zusammenfassung. Es wird mit Hilfe der als komplexen Größen ausgedrückten Ströme und Impedanzen die Bedingung für Wechselstromabgabe von Nebenschlußmaschinen abgeleitet.

Das genaue Kreisdiagramm der Asynchronmaschine.

Von

Dr.-Ing. **H. Kafka.**

Prof. Thomälen gibt in seinem „Lehrbuch der Elektrotechnik", 7. Auflage, S. 264 eine sehr einfache Konstruktion für das genaue Kreisdiagramm der Asynchronmaschine an. Als Ausgangspunkt dient dabei das Widerstandsdiagramm des Ersatzstromkreises Bild 1 für $r_1 = 0$, welches in Bild 2 spiegelbildlich dargestellt ist.

Dem Synchronismus $(s = 0)$ entspricht der Blindwiderstand

$$\overline{Op}_{0\,(r_1 = 0)} = j(x_{1\sigma} + x_m), \tag{1}$$

den Schlüpfungswerten $s = +\infty$ der Blindwiderstand

$$\overline{Op}_{\infty\,(r_1 = 0)} = j\left(x_{1\sigma} + \frac{x_m x'_{2\sigma}}{x_m + x'_{2\sigma}}\right) = \sigma\,\overline{Op}_{0\,(r_1 = 0)};$$
$$\sigma = 1 - \frac{x^2_m}{(x_{1\sigma} + x_m)(x_m + x'_{2\sigma})} = 1 - \frac{1}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}. \tag{2}$$

Der Kreis über dem Durchmesser $\overline{p_{\infty\,(r_1 = 0)}\,p_{0\,(r_1 = 0)}}$ mit dem Mittelpunkte $m_{(r_1 = 0)}$ ist das Widerstandsdiagramm des Ersatzstromkreises Bild 1 für $r_1 = 0$.

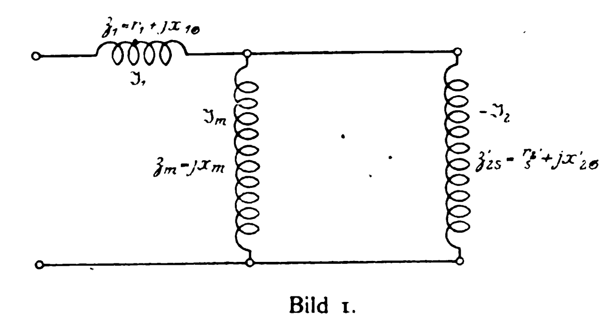


Bild 1.

Das Widerstandsdiagramm für irgend einen Wert des primären Widerstandes r_1 wird durch Verschiebung des Kreises $m_{(r_1 = 0)}$ ∥ zur v-Achse um die Strecke r_1 erhalten (Kreis m). Durch Inversion des Kreises m in bezug auf den Pol O ergibt sich das Leitwertdiagramm des Ersatzstromkreises für den betreffenden Widerstandswert (Kreis M). Es kann nun der Leitwertmaßstab so gewählt werden, daß der Leitwertkreis M mit dem Widerstandskreise m zusammenfällt. In diesem Falle entsprechen die zweiten Schnittpunkte der Verbindungsgeraden Op_0 und Op_∞ mit dem Kreise $m \equiv (M)$ den Punkten (P_0) bzw. (P_∞) des Leitwertkreises. Die auf die Leitwerte bezughabenden Punkte des Bildes 2 sind durch große in Klammern gesetzte Buchstaben bezeichnet, um Verwechslungen mit den Widerstandspunkten (kleine Buchstaben) zu vermeiden. Aus Bild 2 ist zu ersehen, daß die Abstände der Endpunkte (A) und (B) des durch (M) parallel zur u-Achse gezogenen Kreisdurchmessers von der v-Achse den gesamten Streukoeffizienten σ bestimmen:

$$\frac{(C)(A)}{(C)(B)} = \frac{\overline{Op}_{\infty\,(r_1 = 0)}}{\overline{Op}_{0\,(r_1 = 0)}} = \sigma; \tag{3}$$

ferner ist

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (P_0)\,O\,u = \frac{r_1}{x_{1\sigma} + x_m} = \operatorname{tg} \gamma_1. \tag{4}$$

Soll der Einfluß einer Veränderung des primären Widerstandes r_1 untersucht werden, welcher Fall z. B. bei der Bemessung längerer Motorzuleitungen eintreten kann, so ist die Konstruktion sinngemäß für die in Betracht kommenden Werte von

r_1 zu wiederholen. Es entspricht dabei aber jedem Werte des primären Widerstandes ein anderer Leitwertmaßstab.

Im folgenden soll nun eine einfache Konstruktion abgeleitet werden, welche die Bestimmung der genauen Leitwertkreise bei Verwendung eines einzigen Maßstabes ermöglicht. Wir denken uns zu diesem Behufe die in Bild 2 dargestellte Konstruktion des Kreises m durch Parallelverschiebung des Kreises $m_{(r_1=0)}$ um die Strecke r_1 in bezug auf den Pol O inversiert. Die Inversion des Kreises $m_{(r_1=0)}$ ergibt den in Bild 3 gezeichneten Leitwertkreis $M_{(r_1=0)}$ (Heylandkreis) über dem Durchmesser $\overline{P_{0(r_1=0)} P_{\infty(r_1=0)}}$, wobei

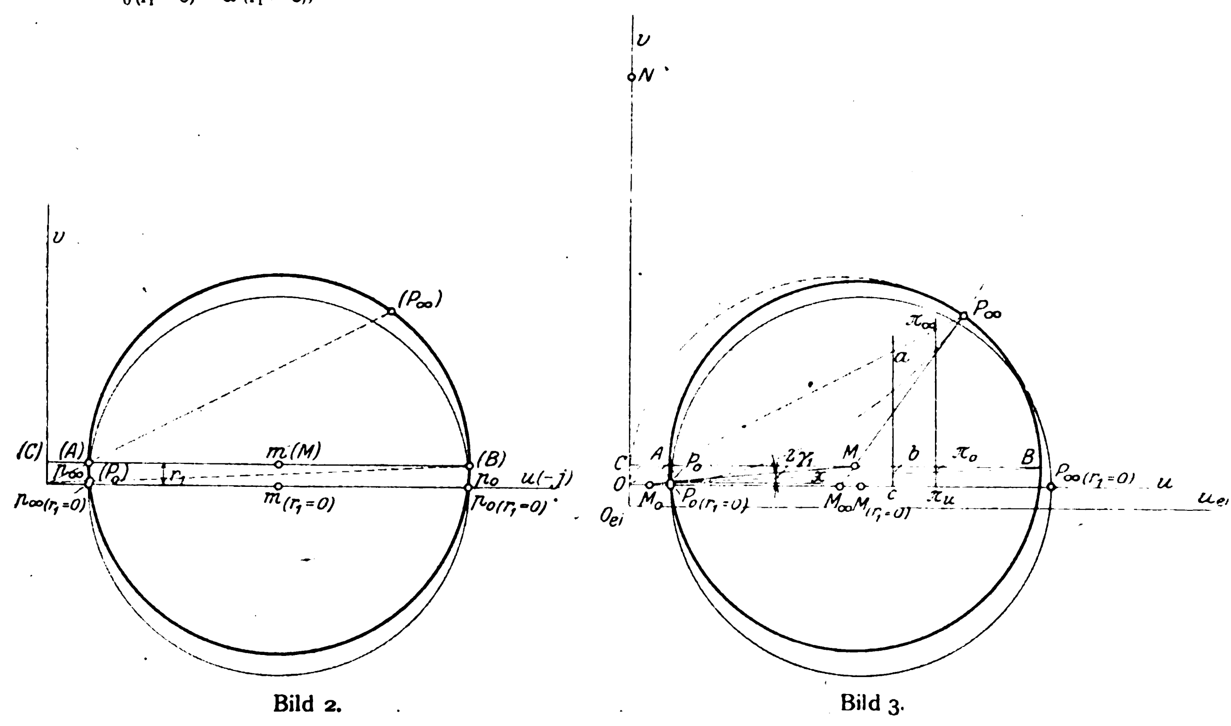


Bild 2. Bild 3.

$$\overline{OP}_{0(r_1=0)} = \frac{1}{\overline{Op}_{0(r_1=0)}} = -j\frac{1}{x_{1\sigma}+x_m} \tag{5}$$

und wegen (2)

$$\overline{OP}_{\infty(r_1=0)} = \frac{\overline{OP}_{0(r_1=0)}}{\sigma}. \tag{6}$$

Aus Bild 2 ist zu ersehen, daß die gleichen Schlüpfungswerten entsprechenden Punkte der Kreise $m_{(r_1=0)}$ und m auf Parallelen zur v-Achse liegen. Bei der Inversion gehen diese Parallelen in Kreise über, welche durch den Pol O gehen und deren Mittelpunkte auf der u-Achse liegen. Dementsprechend werden sich die Punkte $P_{0(r_1=0)}$ und $P_{\infty(r_1=0)}$ des Heylandkreises bei Berücksichtigung des primären Widerstandes auf Kreisen über den Durchmesser $\overline{OP}_{0(r_1=0)}$ (Mittelpunkt M_0) bezw. $\overline{OP}_{\infty(r_1=0)}$ (Mittelpunkt M_∞) bewegen.

Die Punkte p_0 und p_∞ in Bild 2 liegen andererseits auf einer im Abstande r_1 zur u-Achse gezogenen Parallelen. Die Inversion dieser Parallelen ergibt einen Kreis, welcher durch den Pol O geht und dessen Mittelpunkt N auf der v-Achse liegt. Sein Halbmesser ist

$$\overline{ON} = \frac{1}{2\,r_1}. \tag{7}$$

Im Schnitte des Kreises N mit den Kreisen M_0 und M_∞ ergeben sich die Punkte P_0 bzw. P_∞, welche inversionsgemäß den Punkten p_0 und p_∞ des Bildes 2 entsprechen. Da der gesuchte Leitwertkreis die Kreise M_0 und M_∞ in den Punkten P_0 bzw. P_∞ berührt, ist sein Mittelpunkt M durch den Schnitt der Verbindungsgeraden $M_0\,P_0$ und $M_\infty\,P_\infty$ festgelegt. Praktisch wird man den Mittelpunkt M durch den Schnitt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{P_0\,P_\infty}$ mit der Verbindungsgeraden $M_\infty\,P_\infty$ bestimmen. Einer Veränderung des primären Widerstandes r_1 wird demnach eine Schar von Leitwertkreisen entsprechen, welche von den Kreisen M_0 und M_∞ eingehüllt werden.

Da sich in praktischen Fällen für den Halbmesser $\overline{ON}$ ein großer Wert ergeben wird, können die Punkte P_0 und P_∞ in folgender Weise ermittelt werden. Wir tragen auf der u-Achse eine dem Halbmesser $\overline{ON} = \frac{1}{2\,r_1}$ proportionale Strecke $O\,\pi_u$ auf und senkrecht dazu die im gleichen Verhältnisse verkleinerten Halbmesser R_0 (Punkt π_0) und R_∞ (Punkt π_∞) der Kreise M_0 bzw. M_∞. Die Verbindungsgerade $O\,\pi_0$ schneidet den Kreis M_0 im Punkte P_0, die Verbindungsgerade $O\,\pi_\infty$ den Kreis M_∞ im Punkte P_∞.

Die im vorstehenden beschriebene Konstruktion der genauen Kreise aus dem gewöhnlichen Heylandkreis erscheint mir durchsichtiger als die von Ing. Stehr angegebene (siehe etwa Pichelmayer, Dynamobau, S. 306).

Da nach (4)

$$\sphericalangle\, P_0\,O\,u = \gamma_1,$$

ist

$$\sphericalangle\,(P_0\,M_0\,u) = \sphericalangle\,(M\,P_0\,x) = 2\,\gamma_1. \tag{8}$$

Aus dem Vergleiche mit dem Bild 2 geht ferner hervor, daß die zweiten Schnittpunkte A und B der Verbindungsgeraden OP_∞ bzw. OP_0 mit dem Kreise M auf dem zur u-Achse parallelen Kreisdurchmesser liegen, wobei

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ca}} = \sigma \tag{9}$$

(die Punkte a, b und c liegen auf einer beliebigen Parallelen zur v-Achse).

Ermittlung des Stillstandspunktes P_{St} $(s = 1)$. Nach früherem muß sich auch der Stillstandspunkt $P_{St\,(r_1 = 0)}$ des Heylandkreises bei veränderlichem r_1 auf einem Kreise bewegen, welcher durch O geht und dessen Mittelpunkt auf der u-Achse liegt. Im Schnitte dieses Kreises mit dem gefundenen Leitwertkreis M würde sich der Stillstandspunkt P_{St} des letzteren ergeben. Diese Konstruktion ist aber wegen der auftretenden schiefen Schnitte ungenau, und wollen wir daher nachstehend ein anderes Verfahren ableiten.

Der resultierende Leitwert des Ersatzstromkreises Bild 1 läßt sich wie folgt zerlegen:

$$[1]\ \mathfrak{Y}_s = \frac{\mathfrak{Z}_m + \mathfrak{Z}'_{2s}}{\mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{Z}_m + \mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{Z}'_{2s} + \mathfrak{Z}_m\,\mathfrak{Z}'_{2s}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_m} + \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Z}^*_1 + \mathfrak{Z}'_{2s}}; \tag{10}$$

dabei ist

$$\mathfrak{C}_1 = C_1\,e^{-j\gamma_1} = \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_m}{\mathfrak{Z}_m} \tag{11}$$

und

$$\mathfrak{Z}^*_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{C}_1}. \tag{12}$$

Die Bedeutung des vektoriellen Verhältnisses $\mathfrak{C}_1$ ist aus Bild 4 zu entnehmen. Der Betrag desselben ist

[1]) Vektorielle Größen sind mit deutschen, ihre Beträge mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

$$C_1 = \frac{\overline{O3}}{\overline{O1}} = \frac{\sqrt{r_1^2 + (x_{1\sigma} + x_m)^2}}{x_m}, \tag{11a}$$

ferner ist

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{r_1}{x_{1\sigma} + x_m}. \tag{13}$$

Die Multiplikation eines Vektors mit $\mathfrak{C}_1$ bedeutet eine Streckung desselben im Verhältnis C_1 bei gleichzeitiger Verdrehung um den Winkel γ_1 im Uhrzeigersinne.

Für die Komponenten des Scheinwiderstandes $\mathfrak{z}^*_1 = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{C}_1}$ ergibt eine einfache Rechnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} r^*_1 &= \frac{1}{C_1}(r_1 \cos\gamma_1 - x_{1\sigma} \sin\gamma_1) = \frac{r_1}{C_1^2} \\ x^*_{1\sigma} &= \frac{1}{C_1}(x_{1\sigma} \cos\gamma_1 + r_1 \sin\gamma_1) = \frac{1}{C_1^2}\left(x_{1\sigma} + \frac{z_1^2}{x_m}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

In (10) entspricht der erste Teil

$$\mathfrak{Y}_0 = \frac{1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_m} \tag{15}$$

dem Leitwert des Ersatzstromkreises Bild 1 für $s = 0$ (Synchronismus), welcher in Bild 3 durch den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ dargestellt wird. An $\mathfrak{Y}_0$ ist der mit der Schlüpfung s veränderliche Leitwert

$$\mathfrak{Y}'_s = \frac{1}{\mathfrak{C}_1^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{z}^*_1 + \mathfrak{z}'_{2s}} = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(r^*_1 + \frac{r'_2}{s}\right) + j(x^*_1 + x'_{2\sigma})\right] e^{-j2\gamma_1}} \tag{16}$$

anzuschließen. Der geometrische Ort des letzteren ist der bereits gefundene Leitwertkreis, welcher in Bild 5 nochmals gezeichnet ist. In Bild 5 ist

$$\overrightarrow{OP_0} = \mathfrak{Y}_0,$$
$$\overrightarrow{P_0P} = \mathfrak{Y}'_s$$

und

$$\overrightarrow{OP} = \mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Y}'_s = \mathfrak{Y}_s.$$

Wir können uns nun den Leitwertkreis M nach (16) auch durch Inversion des geometrischen Ortes für den Scheinwiderstand

Bild 4.

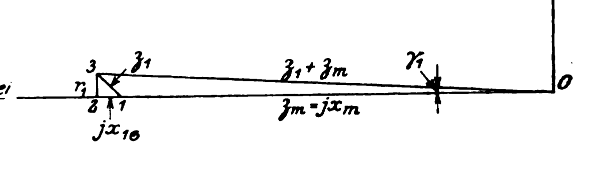


Bild 5.

$$\left[\left(r^*_1 + \frac{r'_2}{s}\right) + j\,(x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma})\right] e^{-j2\gamma_1}$$

in bezug auf den Pol P_0 entstanden denken; die dabei erhaltenen Leitwerte sind nach (16) noch durch C_1^2 zu dividieren. Der genannte geometrische Ort soll im Bild 5 spiegelbildlich eingetragen werden; wegen der Spiegelung sind die Scheinwiderstände um den Winkel $2\gamma_1 = \sphericalangle(M P_0 x)$ (siehe 8) entgegen dem Uhrzeigersinne zu verdrehen.

Wir tragen also auf dem Strahle $P_0 M$ in einem beliebigen Widerstandsmaßstabe die Strecke

$$\overline{P_0 p_M} = x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma} \tag{17}$$

auf und senkrecht dazu

$$\overline{p_M p_\infty} + \overline{p_\infty p_{St}} = r^*_1 + r'_2; \tag{18}$$

die im Punkte p_M auf dem Strahle $P_0 p_M$ senkrecht stehende Gerade g ist der auf (u v) bezogene geometrische Ort des gespiegelten Scheinwiderstandes $\left[\left(r^*_1 + \frac{r'_2}{s}\right) + j\,(x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma})\right] e^{-j2\gamma_1}$. Der Punkt p_∞ entspricht den Schlüpfungswerten $s = \pm\infty$ $\left(\frac{r'_2}{s} = 0\right)$, der Punkt p_{St} dem Stillstande $\left(s = 1, \frac{r'_2}{s} = r'_2\right)$; für einen beliebigen Punkt der Geraden g ist

$$\overline{p_\infty p} = \frac{r'_2}{s}. \tag{19}$$

Ihr unendlich ferner Punkt entspricht dem Synchronismus $\left(s = 0, \frac{r'_2}{s} = \infty\right)$.

Durch Inversion der Geraden g in bezug auf den Pol P_0 ergibt sich bei Berücksichtigung des Reduktionsverhältnisses $\frac{1}{C_1^2}$ der bereits auf einem anderen Wege gefundene Leitwertkreis M; der Durchmesser desselben ist

$$\overline{P_0 M} = \frac{1}{2\,C_1^2} \cdot \frac{1}{\overline{P_0 p_M}} = \frac{1}{2\,C_1^2} \cdot \frac{1}{x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma}}. \tag{20}$$

Die Verbindungsgeraden $P_0 p$ bestimmen in ihrem Schnitte mit dem Kreise M die den Schlüpfungswerten der Punkte p entsprechenden Kreispunkte P. Die Gerade $P_0 p_{St}$ schneidet daher den Kreis in dem gesuchten Stillstandspunkte P_{St}[1]), wobei nach Bild 5

$$^{2)}\ \operatorname{tg} \sphericalangle(P_{St} P_0 M) = \frac{r^*_1 + \frac{r'_2}{s}}{x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma}}. \tag{21}$$

Da die Verbindungsgerade $P_0 p_\infty$ den Kreis M in dem bereits gefundenen Punkte P_∞ schneidet, müssen bei richtiger Konstruktion die Punkte P_0, p_∞ und P_∞ auf einer Geraden liegen.

---

[1]) Der Mittelpunkt des durch die Punkte O, P_0 und P_{St} bestimmten Kreises liegt auf einem Strahle durch O, welcher mit der u-Achse den Winkel $\frac{\Pi}{2}$ asc tg $\frac{r'_2}{x_m + x'_{2\sigma}}$ einschließt; die Projektion des Kreishalbmessers auf die v-Achse hat die Länge $\frac{1}{2\left[r_1 + r'_2 \frac{1+\sigma_1}{1+\sigma_2}\right]}$.

[2]) Für den Heylandkreis ist $r_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $C_1 = \frac{x_{1\sigma} + x_m}{x_m} = 1 + \sigma_1$, $r^*_1 = 0$ und $x^*_1 = \frac{x_{1\sigma}}{1+\sigma_1}$, daher $\operatorname{tg} \sphericalangle(P_{St} P_0 M)_{(r_1 = 0)} = \frac{r'_2}{\frac{x_{1\sigma}}{1+\sigma_1} + x'_{2\sigma}}$.

Drehmoment- und Leistungsgerade. Der Vollständigkeit wegen soll ein einfacher Beweis für diese Geraden eingefügt werden. Wir betrachten dabei den Kreis M in Bild 5 als Stromdiagramm für konstante primäre Klemmenspannung P_1 pro Phase; es stellen dann die Vektoren

$$\overrightarrow{OP}_{(Strom)} = \mathfrak{J}_1$$

die primären Stromaufnahmen dar; ferner sind, wie sich leicht nachweisen läßt, die Vektoren

$$\overrightarrow{PP}_{0\,(Strom)} = \frac{\mathfrak{J}'_2}{\mathfrak{C}_1} \tag{22}$$

den auf primär reduzierten Sekundärströmen proportional.

Die dem Ersatzstromkreise Bild 1 entsprechende Wirkleistungsaufnahme pro Phase ist nun

$$W_1 = I_1^2 r_1 + I'^2_2 \cdot \frac{r'_2}{s}; \tag{23}$$

diese Leistung wird durch die auf (u v) bezogenen Ordinaten $\overline{Pw}_{1\,(Strom)}$ der Kreispunkte P im Maßstabe $\frac{W_1}{P_1}$ dargestellt. Die nach Abzug der primären Kupferverluste $I_1^2 r_1$ von W_1 übrigbleibende Leistung

$$W_d = W_1 - I_1^2 r_1 = I'^2_2 \cdot \frac{r'_2}{s} \tag{24}$$

wird auf das Drehfeld übertragen Es läßt sich nun zeigen, daß diese Drehfeldleistung (auch Drehmoment in synchronen Watt genannt) durch die senkrecht zum Strahle $P_0 M$ entnommenen Abstände $\overline{Pw}_{d\,(Strom)}$ der Kreispunkte P von der „Drehmomentgeraden“ $P_0 P_\infty$ in demselben Maßstabe dargestellt wird wie W_1 durch $\overline{Pw}_{1\,(Strom)}$[1].

Beweis: Nach Bild 5 verhält sich

$$\overline{Pw}_{d\,(Strom)} : \overline{PP}_{0\,(Strom)} = \overline{pp_\infty} : \overline{pP_0};$$

zwischen den Strecken $\overline{PP_0}$ und $\overline{pP_0}$ besteht nach früherem eine Inversionsbeziehung, welche sich durch die Gleichungen

$$\overline{PP}_0 = \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\overline{pP}_0} \quad \text{bzw.} \quad PP_{0\,(Strom)} = \frac{P_1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\overline{pP}_0}$$

ausdrücken läßt. Wenn wir den aus der letzten Gleichung folgenden Wert von $\overline{pP_0}$ in die frühere Proportion einsetzen und beachten, daß nach (22) $\overline{PP}_{0\,(Strom)} = \frac{I'_2}{C_1}$ und nach (19) $\overline{p_\infty p} = \frac{r'_2}{s}$ ist, ergibt sich schließlich

$$\overline{Pw}_{d\,(Strom)} = \frac{I'^2_2 \cdot \frac{r'_2}{s}}{P_1} = \frac{W_d}{P_1}. \tag{25}$$

Die mechanische Leistung pro Phase (inkl. Reibungsverluste) W_m wird durch Abzug der sekundären Kupferverluste $I'^2_2 r'_2$ von W_d erhalten:

$$W_m = W_d - I'^2_2 r'_2 = (1 - s) I'^2_2 \cdot \frac{r'_2}{s}. \tag{26}$$

Die Leistung W_m wird durch die senkrecht zum Strahle $P_0 M$ entnommenen Abstände $\overline{Pw}_{m\,(Strom)}$ der Kreispunkte P von der „Leistungsgeraden“ $P_0 P_{St}$ in dem uns schon bekannten Maßstabe dargestellt, d. h. es ist

[1]) Auf diesen Umstand hat bereits Dr. Krug in seiner Schrift „Das Kreisdiagramm der Induktionsmotoren“ (Springer, 1911) hingewiesen.

$$\overline{Pw}_{m\,(\mathrm{Strom})} = \frac{W_m}{P_1}. \tag{27}$$

Es sind also einfach bei einem Drehstrommotor die im Strommaßstabe gemessenen Abstände $\overline{Pw}_1$, $\overline{Pw}_d$ und $\overline{Pw}_m$ mit $3\,P_1$ zu multiplizieren, um die primäre elektrische Leistung, die Drehfeldleistung und die mechanische Leistung (inkl. Reibungsverluste) zu erhalten.

Wenn wir in den Gleichungen (24) und (26) den auf primär reduzierten Sekundärstrom I'_2 durch die Konstanten des Ersatzstromkreises ausdrücken, erhalten wir

$$W_d = \frac{P_1^2}{C_1^2} \cdot \frac{\dfrac{r'_2}{s}}{\left(r^*_1 + \dfrac{r'_2}{s}\right)^2 + (x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma})^2} \tag{24 a}$$

bzw.

$$W_m = \frac{P_1^2}{C_1^2} \cdot \frac{(1-s)\dfrac{r'_2}{s}}{\left(r_1^* + \dfrac{r'_2}{s}\right)^2 + (x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma})^2} \tag{26 a}$$

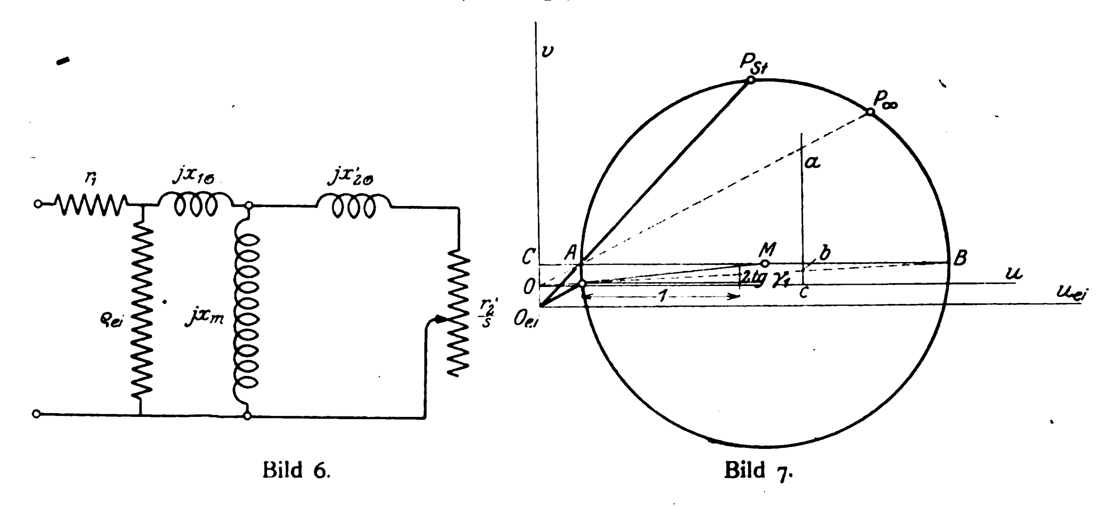


Bild 6. Bild 7.

Berücksichtigung der Ständereisenverluste. Für praktische Zwecke wird es genügen, die Ständereisenverluste als konstant anzunehmen und sie in den Bildern 3 und 5' durch eine Verschiebung des Ursprunges O nach O_{ei} um die Strecke

$$^{1)}\ \overline{OO}_{ei} = \frac{V_{ei}}{P_1^2} = \frac{1}{\rho_{ei}} \left(\text{im Strommaßstabe } \overline{OO}_{ei\,(\mathrm{Strom})} = \frac{V_{ei}}{P_1}\right) \tag{28}$$

zu berücksichtigen. Es stellen dann die Vektoren

$$\overline{O_{ei}\,P}_{(\mathrm{Strom})} = \mathfrak{J}_{1\,\mathrm{tot}}$$

die totalen Primärströme dar.

Sind längere Motorzuleitungen vorhanden, so ist es nicht mehr zulässig, die Ständereisenverluste konstant zu setzen. Wollte man dieselben in einer den wirklichen Verhältnissen nahekommenden Weise berücksichtigen, so könnte man den Ersatzstromkreis Bild 6 zugrunde legen. Einfacher ist es jedoch, sie in diesem Falle zu vernachlässigen.

[1]) Die Ständereisenverluste V_{ei} pro Phase sind dabei für die der Klemmenspannung P_1 entsprechenden Induktionswerte zu ermitteln. ρ_{ei} ist ein fiktiver Wirkwiderstand, dessen Leistungsaufnahme im Ersatzstromkreise den Verlusten V_{ei} gleich ist.

Zusammenfassung. Um den genauen Kreis für einen gegebenen Widerstand r_1 im Strommaßstabe zu ermitteln (siehe Bild 3 und 5), ziehen wir über den Durchmessern

$$\overline{OP}_{0(r_1=o)} = \frac{P_1}{x_{1\sigma} + x_m}$$

und

$$\overline{OP}_{\infty(r_1=o)} = \frac{\overline{OP}_{0(r_1=o)}}{\sigma}$$

die Kreise M_0 (Halbmesser R_0) bzw. M_∞ (Halbmesser R_∞). Ferner tragen wir auf der u-Achse eine dem Stromwerte $\frac{P_1}{2r_1}$ proportionale Strecke auf und senkrecht dazu die im gleichen Verhältnisse verkleinerten Halbmesser R_0 (Punkt π_0) und R_∞ (Punkt π_∞). Die Verbindungsgerade $O\pi_0$ schneidet den Kreis M_0 im Punkte P_0, die Gerade $O\pi_\infty$ den Kreis M_∞ im Punkte P_∞. Der Schnitt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{P_0 P_\infty}$ mit der Verbindungsgeraden $M_\infty P_\infty$ bestimmt den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises, welcher die Kreise M_0 und M_∞ in den Punkten P_0 bezw. P_∞ berührt.

Um den Stillstandspunkt P_{St} zu finden, tragen wir auf dem Strahle $P_0 M$ in einem beliebigen Widerstandsmaßstabe die Strecke

$$\overline{P_0 p_M} = x^*_{1\sigma} + x'_{2\sigma} = \frac{1}{C_1^2}\left(x_{1\sigma} + \frac{z_1^2}{x_m}\right) + x'_{2\sigma}$$

auf und senkrecht dazu

$$\overline{p_M p_\infty} + \overline{p_\infty p_{St}} = r^*_1 + r'_2 = \frac{r_1}{C_1^2} + r'_2; \quad \left[C_1^2 = \frac{r_1^2 + (x_{1\sigma} + x_m)^2}{x_m}\right].$$

Die Verbindungsgerade $P_0 p_{St}$ schneidet den Kreis M in dem Stillstandspunkte P_{St}, ferner müssen bei richtiger Konstruktion die Punke P_0, p_∞ und P_∞ auf einer Geraden liegen.

Zur angenäherten Berücksichtigung der Ständereisenverluste V_{ei} (pro Phase) ist die Abszissenachse um den Betrag

$$\overline{OO}_{ei} = \frac{V_{ei}}{P_1}$$

nach u_{ei} zu verschieben.

Konstruktion des genauen Kreises aus Versuchsdaten (siehe auch den Brief von Grob in ETZ. 1918, S. 123 sowie den Aufsatz von Prof. J. Sumec in ETZ. 1910, Heft 5.

In das Bezugssystem (u_{ei} v) des Bildes 7 wird der Synchronispunkt P_0 ($\overrightarrow{O_{ei} P_0} = I_{10\,tot}$) und der Stillstandspunkt P_{St} ($\overrightarrow{O_{ei} P_{St}} = I_{1\,St\,tot}$) eingetragen. Nach Bild 3 liegt der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises auf einem unter dem Winkel $2\gamma_1$ gegen die Abszissenachse geneigten Strahle durch P_0, wobei nach (4)

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{r_1}{x_{1\sigma} + x_m};$$

wenn wir Zähler und Nenner dieses Bruches mit der primären Phasen-Klemmenspannung P_1 multiplizieren und beachten, daß

$$\frac{P_1}{x_{1\sigma} + x_m} = I_{10} \doteq I_{10\,tot},$$

wird

$$\operatorname{tg}\gamma_1 \doteq \frac{I_{10\,tot}\, r_1}{P_1}. \tag{29}$$

Um den Winkel γ_1 bestimmen zu können, ist also die Kenntnis des primären Phasen-Widerstandes r_1 erforderlich.



Wir tragen nun auf dem Strahle $P_0 x \parallel u_{ei}$ in irgend einem Maßstabe die Strecke 1 und senkrecht dazu $\mathrm{tg}\, 2\gamma_1 \doteq 2\,\mathrm{tg}\,\gamma_1$ auf. Die Verbindungsgerade des so erhaltenen Punktes mit P_0 schneidet die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{P_0 P_{St}}$ im Punkte M. Damit ist der genaue Kreis bestimmt.

Die auf dem zur u_{ei}-Achse parallelen Durchmesser liegenden Kreispunkte A und B bestimmen nach (9) (siehe auch Bild 3) den gesamten Streukoeffizienten

$$\sigma = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \text{ (etwas abweichend von Grob).}$$

Ermittlung des Punktes P_∞. Nach Bild 3 schneidet die Verbindungsgerade BP_0 die v-Achse im Punkte O und die Gerade OA den Kreis M im Punkte P_∞. Wegen der in Wirklichkeit geringen Entfernung der Punkte O und A wäre diese Konstruktion ungenau. Wir gehen daher besser so vor, daß wir in einem entsprechenden Abstande eine Parallele zur v-Achse ziehen, die wir mit der durch O gezogenen u-Achse und der Verbindungsgeraden OB zum Schnitte bringen (Punkt c und b). Hierauf bestimmen wir auf der genannten Parallelen einen Punkt a derart, daß

$$\frac{\overline{cb}}{\overline{ca}} = \sigma \text{ (siehe (9) und Bild 3);}$$

die Verbindungsgerade Oa schneidet dann den Kreis M in dem gesuchten Punkte P_∞.

Die abgeleiteten Beziehungen gelten selbstredend nur bei Vernachlässigung der Eisensättigung. Ich werde gelegentlich auf ein Verfahren zurückkommen, welches in verhältnismäßig einfacher Weise eine Berücksichtigung der Eisensättigung ermöglicht.

Über Induktion in rotierenden Kugeln.

Ein Beitrag zur Theorie der Wirbelstrombremse.

Von

Richard Gans.

Das Problem der Induktionsströme in einer rotierenden Kugel, die sich in einem Magnetfelde befindet, wurde mittels sukzessiver Näherungen von Heinrich Hertz[1]), später von mir[2]) nach der Hertzschen Theorie der Elektrodynamik in bewegten Medien behandelt. Da ich mich damals aber nur auf so kleine Drehgeschwindigkeiten beschränkt habe, daß man die Wirkung des von den Induktionsströmen herrührenden Magnetfeldes vernachlässigen konnte, will ich die Aufgabe im folgenden noch einmal in aller Strenge behandeln, zumal dieselbe als ein Fall einer Wirbelstrombremse Interesse verdient.

1. Die Grundgleichungen. Die Grundgleichungen der Hertzschen Theorie lauten bekanntlich, wenn wir alle Größen im absoluten elektromagnetischen Maßsystem messen,

$$\mathrm{rot}\,\{\mathfrak{H} - [\varepsilon\,\mathfrak{E}, \mathfrak{v}]\} = \frac{\partial \varepsilon\,\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathfrak{E} + 4\pi\lambda\,\mathfrak{E} \qquad (1)$$

$$-\mathrm{rot}\,\{\mathfrak{E} + [\mu\,\mathfrak{H}, \mathfrak{v}]\} = \frac{\partial \mu\,\mathfrak{H}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mu\,\mathfrak{H}. \qquad (2)$$

---

[1]) H. Hertz, Über Induktion in rotierenden Kugeln 1880. Gesammelte Werke 1, S. 37, 1895. Die Arbeit ist mir hier nicht zugänglich, und da ich sie seit 18 Jahren nicht mehr gesehen habe, erinnere ich mich ihres Inhalts nicht mehr.

[2]) R. Gans, Über Induktion in rotierenden Leitern. Straßburger Diss. 1901; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 48, S. 1, 1902.

Beschränken wir uns auf den stationären Zustand $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ und vernachlässigen im Innern der metallischen Kugel die Konvektionsströme gegenüber den Leitungsströmen, was erlaubt ist, so lange die Körpergeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist $\left(\mathfrak{v}^2 \ll \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)$, so nehmen die Gleichungen die einfache Form an

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\lambda\mathfrak{E} \tag{3}$$
$$\operatorname{rot}\{\mathfrak{E} + [\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{v}]\} = 0. \tag{4}$$

Diese Beziehungen gelten auch im Außenraum, wenn man in ihnen $\lambda = 0$; $\mathfrak{v} = 0$ setzt.

Um die Gleichungen für den Innenraum zu integrieren, verwenden wir den Kunstgriff, anzunehmen, daß die Kugel in Ruhe ist, das Magnetfeld sich dagegen mit der entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ dreht. Für diesen Fall gilt in der Kugel

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\lambda\mathfrak{E} \tag{5}$$
$$-\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{6}$$

und die Bedingung des stationären Zustandes lautet

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \omega\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi}. \tag{7}$$

Denken wir uns $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ als Funktionen von φ in eine Fouriersche Reihe entwickelt, d. h.

$$\mathfrak{E} = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu e^{i\nu\varphi}; \quad \mathfrak{H} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu e^{i\nu\varphi},$$

so gilt, wenn wir den Index ν unterdrücken,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= 4\pi\lambda E \\ -\operatorname{rot} E &= \mu\omega\nu i H. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Eine Lösung der Gleichung (8) in Kugelkoordinaten ist [1])

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \frac{\partial^2 r\Pi}{\partial r^2} + k^2 r\Pi & E_r &= 0 \\ H_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\Pi}{\partial\vartheta\partial r} & E_\vartheta &= \frac{k^2}{4\pi\lambda}\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial r\Pi}{\partial\varphi} \\ H_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2 r\Pi}{\partial\varphi\partial r} & E_\varphi &= -\frac{k^2}{4\pi\lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial r\Pi}{\partial\vartheta}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

in der Π irgend eine Funktion ist, die der Gleichung

$$\Delta\Pi + k_\nu^2\Pi = 0 \tag{10}$$

gehorcht, wobei ihre Abhängigkeit von φ sich durch den Faktor $e^{i\nu\varphi}$ auszudrücken hat, und

$$k_\nu^2 = -4\pi\lambda\mu\omega\nu i \tag{11}$$

ist.

Dieses System genügt bereits der Grenzbedingung, daß an der Kugeloberfläche, d. h. für $r = a$ die radiale Strömungskomponente, also auch $E_r = 0$ sein muß.

Außer dem in (9) angegebenen Lösungssystem gibt es nach Debye (loc. cit.) noch ein anderes, welches sich jenem im allgemeinsten Falle überlagern würde, und das dadurch gekennzeichnet ist, daß $H_r = 0$ ist, aber E_r in keinem Punkte der Kugel, also auch nicht auf seiner Oberfläche, verschwinden kann [2]), das somit unserer Grenz-

[1]) P. Debye, Der Lichtdruck auf Kugeln mit beliebigem Material. Münchener Diss. S. 4, 1908.

[2]) Das liegt daran, daß dieses E_r der Besselschen Funktion $I_{n+\frac{1}{2}}(k_\nu r)$ proportional ist, die nur reelle Wurzeln hat, während ihr Argument $k_\nu r$ nach (11) komplex ist.

bedingung $E_r = 0$ für $r = a$ widerspricht. Somit stellen die Gleichungen (9), (10), (11) die allgemeinste Lösung für unseren Fall dar.

Wir haben jetzt zu beweisen, daß die Lösungen (9), die die Gleichungen (8) befriedigen, auch Lösungen der Gleichung (3) und (4) sind. Da die erste Gleichung (8) mit (3) identisch ist, erledigt sich dieser Teil des Beweises selbst. Gleichung (4) ist gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V_i + [\mathfrak{v}, \mu \mathfrak{H}], \tag{12}$$

wo V_i eine beliebige Funktion ist. Es fragt sich, ob wir V_i so bestimmen können, daß (12) befriedigt ist, wenn wir die Werte (9) in sie einsetzen.

Es läßt sich leicht durch Ausrechnen zeigen, daß das der Fall ist, wenn wir

$$V_i = -\mu \omega \sin \vartheta \frac{\partial r \Pi}{\partial \vartheta} \tag{13}$$

setzen.

Im Außenraum in dem wir keine Leitermassen in endlicher Entfernung von der Kugel annehmen, gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \tag{14}$$

und außerdem muß nach (4)

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V_a \tag{15}$$

sein. Ferner ist

für $r = \infty$ $\qquad V_a = 0.$

V_a hat also den Gleichungun zu genügen

$$\Delta V_a = 0 \tag{16}$$

für $r = a$:

$$V_a = -\mu \omega a \sin \vartheta \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} \tag{17}$$

für $r = \infty$:

$$V_a = 0. \tag{18}$$

V_a ist also als äußeres Dirichletsches Problem leicht zu bestimmen. Da die elektrische Energie gegen die magnetische zu vernachlässigen ist, verzichten wir auf die Berechnung jener, wohl aber interessiert uns im Außenraum das Magnetfeld. Dieses setzt sich additiv zusammen aus dem Felde $\mathfrak{H}_0$, das schon ohne Drehung der Kugel existiert, und das als bekannt anzusehen ist, und dem Felde $\mathfrak{H}'$, welches sich infolge der Rotation dem statischen Felde $\mathfrak{H}_0$ überlagert.

Für $\mathfrak{H}'$ gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}_a' = 0; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H}_a' = 0. \tag{18'}$$

$\mathfrak{H}_a'$ leitet sich also aus einem Potential χ' gemäß der Gleichung

$$\mathfrak{H}'_a = \operatorname{grad} \chi' \tag{19}$$

ab, wo χ' der Gleichung

$$\Delta \chi' = 0 \tag{20}$$

zu genügen hat.

Das statische Feld $\mathfrak{H}_0$ hat im Innenraum, unabhängig von seiner Erzeugung, ein Potential χ_0', genügt also der Gleichung

$$\mathfrak{H}_0 = \operatorname{grad} \chi_0. \tag{21}$$

Die Grenzbedingungen für $r = a$ sind bekanntlich

$$\begin{gathered} \mu \mathfrak{H}_{r'i} = \mathfrak{H}_{r'a} \\ \mathfrak{H}_{\vartheta i} = \mathfrak{H}_{\vartheta' a}; \quad \mathfrak{H}_{\varphi' i} = \mathfrak{H}_{\varphi' a} \end{gathered} \tag{22}$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (9), (19) und (21)

$$\begin{gathered} \mu \left(\frac{\partial^2 r \Pi}{\partial r^2} + k_i^2 r \Pi - \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \right) = \frac{\partial \chi'}{\partial r} \\ \frac{\partial r \Pi}{\partial r} - \chi_0 = \chi'. \end{gathered} \tag{23}$$

In diesen Gleichungen ist χ_0, das Potential des statischen Feldes im Innern der Kugel, als bekannt anzusehen, während die Konstanten, die in Π und χ' enthalten sind, sich daraus berechnen.

2. Lösung der Gleichungen. Da χ_0 eine harmonische Funktion ist, können wir es in der Form darstellen

$$\chi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} C_{n\nu} P_{n\nu} (\cos \vartheta) e^{i\nu\varphi} \left(\frac{r}{a}\right)^n. \tag{24}$$

In dieser Gleichung sind die $P_{n\nu}$ zugeordnete Kugelfunktionen, die $C_{n\nu}$ gegebene komplexe Konstanten.

Ferner ist wegen (10) und (20)

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n\nu}}{n+1} C_{n\nu} P_{n\nu} (\cos \vartheta) e^{i\nu\varphi} R_n(k_\nu r) \tag{25}$$

$$\chi' = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} n \frac{b_{n\nu}}{n+1} C_{n\nu} P_n (\cos \vartheta) e^{i\nu\varphi} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}. \tag{26}$$

In diesen Gleichungen sind $a_{n\nu}$ und $b_{n\nu}$ unbekannte Koeffizienten, die sich mittels der Grenzbedingungen (23) berechnen lassen, $R_n(x)$ ist eine Funktion, die der Gleichung

$$\frac{d^2 x R_n}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) x R_n = 0 \tag{27}$$

gehorcht, und die deshalb folgenden Wert hat[1])

$$R_n(x) = x^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{\sin x}{x}\right), \tag{28}$$

wo

$$2z = x^2. \tag{29}$$

Aus (23) folgt

$$\begin{gathered} \mu \left[a_{n\nu} \left(\frac{d^2 r R_n}{dr^2} + k_\nu^2 r R_n \right)_{r=a} - \frac{n(n+1)}{a} \right] = b_{n\nu} \frac{n(n+1)}{a} \\ a_{n\nu} \left(\frac{d r R_n}{dr} \right)_{r=a} - (n+1) = -b_{n\nu} n. \end{gathered} \tag{30}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen vereinfacht sich, weil R der Gleichung (27) genügt, so daß wir erhalten

$$\begin{gathered} \mu a_{n\nu} R_n(\alpha) = b_{n\nu} = +\mu \\ a_{n\nu} \frac{d\alpha R_n(\alpha)}{d\alpha} = -n b_{n\nu} + n + 1, \end{gathered} \tag{31}$$

wo α eine Abkürzung für $k_\nu a$ bedeutet, d. h.

$$\begin{gathered} \alpha = k_\nu a = \sqrt{2\pi\lambda\mu\omega\nu a^2}\,(1-i) = \beta(1-i); \\ \beta = \sqrt{2\pi\lambda\mu\omega\nu a^2}. \end{gathered} \tag{32}$$

So folgt

$$a_{n\nu} \frac{\mu n + n + 1}{\frac{d\alpha R_n(\alpha)}{d\alpha} + n\mu R_n(\alpha)}; \quad b_{n\nu} = \mu \left[\frac{(\mu n + n + 1) R_n(\alpha)}{\frac{d\alpha R_n(\alpha)}{d\alpha} + n\mu R_n(\alpha)} - 1 \right]. \tag{33}$$

3. Eine unmagnetische Kugel im gleichförmigen Felde. Der einfachste Fall ist der einer unmagnetischen Kugel ($\mu = 1$) im gleichförmigen Felde, d. h. es ist $n = 1$; $\nu = 1$: $P_{11} = \sin \vartheta$; $C_{11} = H_0 a$, und es folgt in reeller Form

[1]) Siehe z. B. H. Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. 2. Braunschweig 1912, S. 142.

$$\chi_0 = H_0 \, r \sin \vartheta \cos \varphi. \tag{34}$$

Aus (28) ergibt sich

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right); \\ \frac{d\,x R_1(x)}{dx} &= \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right) - \sin x, \end{aligned} \tag{35}$$

so daß

$$a_{11} = -\frac{3}{\sin\alpha}; \quad b_{11} = \frac{3}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right) - 1. \tag{36}$$

Vor allem interessiert uns die Verteilung der elektrischen Strömung und somit der Vektor $\mathfrak{E}$, der sich nach den Gleichungen (9) und (25) berechnet. Es ist

$$\frac{k^2}{4\pi\lambda}\Pi = \frac{3\,\omega i}{\sin\alpha}\,\frac{H_0 a}{2}\sin\vartheta\, e^{i\varphi} R_1(k_1 r). \tag{37}$$

Setzt man

$$R_1 = S + iT; \quad -\frac{3}{\sin\alpha} = A + iB, \tag{38}$$

so wird der reelle Teil von (37)

$$\frac{k^2}{4\pi\lambda}\Pi = \frac{\omega H_0 a}{2}\sin\vartheta\left[(A\sin\varphi + B\cos\varphi)S + (A\cos\varphi - B\sin\varphi)T\right] \tag{39}$$

und somit

$$\begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\vartheta &= \frac{\omega H_0 a}{2}\left[(A\cos\varphi - B\sin\varphi)S - (A\sin\varphi + B\cos\varphi)T\right] \\ E_\varphi &= -\frac{\omega H_0 a}{2}\cos\vartheta\left[(A\sin\varphi + B\cos\varphi)S + (A\cos\varphi - B\sin\varphi)T\right]. \end{aligned} \tag{40}$$

Um die Stromkurven genauer zu übersehen, berechnen wir die Komponenten in einem kartesischen System und erhalten

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\omega H_0 a}{2}\cos\vartheta\,(AS - BT) = K_1 z \\ E_y &= -\frac{\omega H_0 a}{2}\cos\vartheta\,(BS + AT) = -K_2 z \\ E_z &= -\frac{\omega H_0 a}{2}\sin\vartheta\left[(AS - BT)\cos\varphi - (BS + AT)\sin\varphi\right] = K_2 y - K_1 z, \end{aligned} \tag{41}$$

wenn

$$K_1 = \frac{\omega H_0 a}{2r}(AS - BT); \quad K_2 = \frac{\omega H_0 a}{2r}(BS + AT) \tag{42}$$

bedeuten.

Drehen wir das Koordinatensystem um die z-Achse um den Winkel ε (siehe Bild 1), so gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \\ \eta &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

und bestimmen wir ε eindeutig durch die Relationen

$$\cos\varepsilon = \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}; \quad \sin\varepsilon = \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}, \tag{43}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\,\zeta \\ \varepsilon_\eta &= 0 \\ \varepsilon_\zeta &= -\sqrt{K_1^2 + K_2^2}\,\xi. \end{aligned} \tag{44}$$

Die Stromlinien sind also Kreise, deren Ebenen parallel der Rotationsachse sind. Der Winkel ε, den diese Kreise mit der durch die Rotationsachse und die Feldrichtung gegebenen Ebene bilden, berechnet sich mittels

$$\cos\varepsilon = \frac{AS - BT}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{S^2+T^2}}; \quad \sin\varepsilon = \frac{BS + AT}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{S^2+T^2}} \tag{45}$$

und die Intensität mittels der Gleichungen (44) und der Beziehung

$$\sqrt{K_1^2+K_2^2} = \frac{\omega H_0 a}{2}\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{S^2+T^2}. \tag{46}$$

Wir wollen diese Resultate etwas genauer für sehr kleine und sehr große Geschwindigkeiten diskutieren.

Für sehr kleine ω gilt nach (38) und (32)

$$A = -\frac{3}{2\beta}; \quad B = -\frac{3}{2\beta}, \tag{47}$$

und setzt man

$$x = kr = \varrho(1 - i), \tag{48}$$

und berücksichtigt die für $|x| < \pi$ gültige Reihenentwicklung[1])

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right) = 2\left(\frac{s_2}{\pi^2} + \frac{s_4}{\pi^4}x^2 + \frac{s_6}{\pi^6}x^4 + \cdots\right), \tag{49}$$

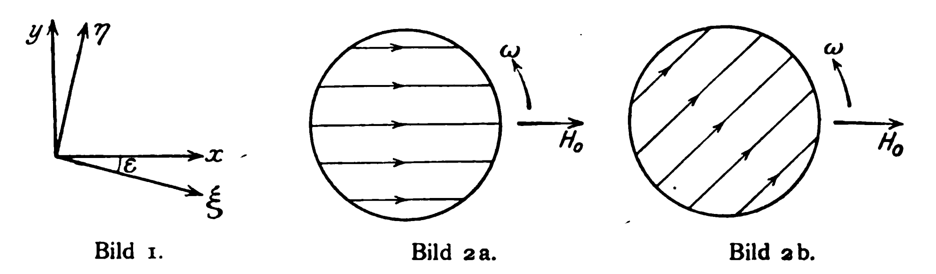


Bild 1. Bild 2a. Bild 2b.

wo

$$s_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots,$$

also nach der Theorie der Bernoullischen Zahlen

$$\frac{s_2}{\pi^2} = \frac{1}{6}; \quad \frac{s_4}{\pi^4} = \frac{1}{90}; \quad \frac{s_6}{\pi^6} = \frac{1}{945}; \quad \frac{s_8}{\pi^8} = \frac{1}{9450}; \ldots$$

bedeutet, so erhält man nach (35), (38) und (48)

$$S = -\frac{\varrho}{3}; \quad T = +\frac{\varrho}{3}. \tag{50}$$

Auf diese Weise ergibt (45)

$$\cos\varepsilon = 1; \quad \sin\varepsilon = 0,$$

d. h. die Kreise sind parallel dem Magnetfelde und der Rotationsachse. Dieses Resultat habe ich schon in meiner Dissertation abgeleitet.

Für sehr große Werte von ω gilt

$$S + iT = \frac{\cos x}{x} = \frac{e^{\varrho} e^{i\varrho}(1 + i)}{4\varrho},$$

also

$$S = \frac{e^{\varrho}\sqrt{2}}{4\varrho}\cos\left(\varrho + \frac{\pi}{4}\right); \quad T = \frac{e^{\varrho}\sqrt{2}}{4\varrho}\sin\left(\varrho + \frac{\pi}{4}\right) \tag{51}$$

und

$$A = -6e^{-\beta}\sin\beta; \quad B = -6e^{-\beta}\cos\beta. \tag{52}$$

[1]) siehe z. B. O. Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis, 1, Braunschweig 1868. S. 241.

Nach (46) ergibt sich demnach

$$\sqrt{K_1^2 + K_2^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,\omega\,H_0\,\frac{a}{r}\,\frac{e^{-(\beta-\varrho)}}{\varrho}.$$

Dieser Ausdruck wird sehr klein, sobald $\beta - \varrho$ größere Werte hat, d. h. sobald $r \neq a$. Die Ströme befinden sich also merklich nur auf der Oberfläche.

Für $r = a$ gilt

$$\sqrt{K_1^2 + K_2^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,\frac{\omega H_0}{\beta} \tag{53}$$

und nach (45)

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}};\quad \sin\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{54}$$

Für sehr große Geschwindigkeiten bilden die Kreise der Stromlinien also Winkel von 45^0 mit der Ebene, die durch die Rotationsachse und das Magnetfeld bestimmt ist.

Die Bilder 2a und 2b stellen die Kugeln von oben gesehen in einem horizontalen Magnetfelde für kleine resp. große Drehgeschwindigkeiten dar und zeigen durch die Pfeile die Stromrichtung in der oberen Halbkugel.

4. Die Joulesche Wärme. Die Joulesche Wärme, die sich in der Zeiteinheit in der Kugel entwickelt, d. h. die abgebremste Leistung, berechnet sich nach der Formel

$$Q = \int \lambda\,\mathfrak{E}^2\,dS. \tag{55}$$

Um aber nicht bezüglich des Radius r integrieren zu müssen, ziehen wir die Formel

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_r\,d\sigma \tag{56}$$

vor, bei der sich die Integration auf die Kugeloberfläche bezieht, und die nach dem Poyntingschen Theorem der Gleichung (55) gleichwertig ist.

In Kugelkoordinaten schreibt sich (56)

$$Q = \frac{a^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{E}_\varphi\,\mathfrak{H}_\vartheta - \mathfrak{E}_\vartheta\,\mathfrak{H}_\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{57}$$

Ersetzt man in dem Ausdruck (25) für $\pi\, a_{n\nu}\, C_{n\nu}$ durch

$$a_{n\nu}\,C_{n\nu} = L_{n\nu} + i\,M_{n\nu}, \tag{58}$$

so wird gemäß (9) in reeller Form, wenn wir auch noch

$$\begin{aligned} R_n(k_\nu a) &= S_{n\nu} + i\,T_{n\nu} \\ \frac{d}{da}\,a\,R_n(k_\nu a) &= S'_{n\nu} + i\,T'_{n\nu} \end{aligned} \tag{59}$$

setzen,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\varphi &= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mu\omega\nu}{n+1}\frac{dP_{n\nu}}{d\vartheta}\left[(L_{n\nu}\sin\nu\varphi + M_{n\nu}\cos\nu\varphi)S_{n\nu} + (L_{n\nu}\cos\nu\varphi - M_{n\nu}\sin\nu\varphi)T_{n\nu}\right]\\
\varepsilon_\vartheta &= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mu\omega\nu^2}{n+1}\frac{P_{n\nu}}{\sin\vartheta}\left[(L_{n\nu}\sin\nu\varphi + M_{n\nu}\cos\nu\varphi)T_{n\nu} - (L_{n\nu}\cos\nu\varphi - M_{n\nu}\sin\nu\varphi)S_{n\nu}\right]\\
H_\varphi &= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu}{(n+1)a}\frac{P_{n\nu}}{\sin\vartheta}\left[(L_{n\nu}\sin\nu\varphi + M_{n\nu}\cos\nu\varphi)S'_{n\nu} + (L_{n\nu}\cos\nu\varphi - M_{n\nu}\sin\nu\varphi)T'_{n\nu}\right]\\
H_\vartheta &= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(n+1)a}\frac{dP_{n\nu}}{d\vartheta}\left[(L_{n\nu}\sin\nu\varphi + M_{n\nu}\cos\nu\varphi)T'_{n\nu} - (L_{n\nu}\cos\nu\varphi - M_{n\nu}\sin\nu\varphi)S'_{n\nu}\right].
\end{aligned} \tag{60}$$

Berücksichtigt man bei der Quadratur die Integraleigenschaften der goniometrischen Funktionen und die folgende Integraleigenschaft der Kugelfunktionen

$$\int_0^\pi \left\{\left(\frac{d P_{n\nu}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\nu^2 P_{n\nu}^2}{\sin^2\vartheta}\right\} \sin\vartheta\, d\vartheta = n(n+1)\int_0^\pi P_{n\nu}^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2n(n+1)(n+\nu)!}{(2n+1)(n-\nu)!}, \quad (60')$$

so ergibt sich

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha\mu\omega\nu n}{2(n+1)(2n+1)} \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!} (L_{n\nu}^2 + M_{n\nu}^2)\, S_{n\nu} T'_{n\nu} - S'_{n\nu} T_{n\nu}) \quad (61)$$

Diese Formel vereinfacht sich bedeutend für unmagnetisches Material ($\mu = 1$) und ein gleichförmiges Feld ($n = 1$; $\nu = 1$). Dann wird nämlich

$$L_{11} + i M_{11} = -\frac{3 H_0 a}{\sin\alpha}; \quad S_{11} + i T_{11} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$
$$S'_{11} + i T'_{11} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right) - \sin\alpha = -(S_{11} + i T_{11}) - \sin\alpha. \quad (62)$$

Setzen wir

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right) = p - q i, \quad (62')$$

so wird

$$Q = \frac{3 a^3 \omega H_0^2}{2} q. \quad (63)$$

Führen wir die Größen ein

$$\gamma = 4\pi\lambda a^2 \omega, \quad (64)$$

so daß

$$\alpha = \sqrt{\frac{8}{2}}(1 - i), \text{ so ergibt sich für } \gamma < \pi^2$$

$$p = 2\left(\frac{s_2}{\pi^2} - \frac{s_6}{\pi^6}\gamma^2 + \frac{s_{10}}{\pi^{10}}\gamma^4 - \frac{s_{14}}{\pi^{14}}\gamma^6 + \ldots\right)$$
$$q = 2\gamma\left(\frac{s_4}{\pi^4} - \frac{s_8}{\pi^8}\gamma^2 + \frac{s_{12}}{\pi^{12}}\gamma^4 - \frac{s_{16}}{\pi^{16}}\gamma^6 + \ldots\right). \quad (65)$$

Hier sind

$$\frac{s_2}{\pi^2} = 0{,}1667 = \frac{1}{6} \qquad \frac{s_4}{\pi^4} = 1{,}111 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{s_6}{\pi^6} = 1{,}058 \cdot 10^{-3} \qquad \frac{s_8}{\pi^8} = 1{,}058 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{s_{10}}{\pi^{10}} = 1{,}069 \cdot 10^{-5} \qquad \frac{s_{12}}{\pi^{12}} = 1{,}081 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{s_{14}}{\pi^{14}} = 1{,}096 \cdot 10^{-7} \qquad \frac{s_{16}}{\pi^{16}} = 1{,}111 \cdot 10^{-8}.$$

Für größere Werte von γ sind die Reihen (65) unbequem, dann bedienen wir uns der Beziehungen

$$p = \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{Sin}\delta - \sin\delta}{\operatorname{Cos}\delta - \cos\delta}; \qquad q = \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{Sin}\delta + \sin\delta}{\operatorname{Cos}\delta - \cos\delta} - \frac{2}{\delta^2} \quad (66)$$

wo

$$\delta + \sqrt{2\gamma} = \sqrt{8\pi\lambda a^2 \omega} \quad (67)$$

ist. So ergibt sich aus (63), (64) und (65)

$$Q = 4C\left[\frac{s_4}{\pi^4}\gamma^2 - \frac{s_8}{\pi^8}\gamma^4 + \frac{s_{12}}{\pi^{12}}\gamma^6 - \frac{s_{16}}{\pi^{16}}\gamma^8 + \ldots\right], \quad (68)$$

wo

$$C = \frac{3 a H_0^2}{16 \pi \lambda} \tag{69}$$

bedeutet. Für größere ω schreiben wir nach (66) besser

$$Q = C \left[\delta \frac{\mathfrak{Sin}\,\delta + \sin\delta}{\mathfrak{Cof}\,\delta - \cos\delta} - 2 \right] = C\,\Phi(\delta). \tag{70}$$

Tabelle 1.

δ	γ	Φ	$\frac{\Phi}{\delta^2}$
0	0	0,00000	0,00900
0,6325	0,2	0,001780	0,00444
1	0,5	0,01108	0,01108
1,414	1	0,04403	0,02202
2	2	0,1713	0,04282
3	4,5	0,756	0,0839
4	8	1,795	0.1122
4,2	8,82	—	0,1150
4,5	10,12	2,381	0,1176
4,82	11,61	2,749	0,1183
4,83	11,66	2,762	0,1183
5	12,5	2,954	0,1182
6	18	4,018	0,1116
8	32	6,008	0,09389
10	50	8,000	0.0800
12	72	10,000	—
14	98	12,00	0,06123
20	200	18,00	0,0450

Für sehr große Werte von δ ist

$$\Phi = \delta - 2 = \sqrt{2\gamma} - 2. \tag{71}$$

Die Joulesche Wärme ist für kleine Geschwindigkeiten dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω proportional, während sie für sehr große Winkelgeschwindigkeiten $\sqrt{\omega}$ proportional ist.

Tabelle 1 enthält $\Phi = \frac{Q}{C}$ in seiner Abhängigkeit von $\delta = \sqrt{8 \pi \lambda a^2 \omega}$ und $\gamma = 4 \pi \lambda a^2 \omega$. Bild 3 stellt Φ als Funktion von γ dar.

Für Kupfer ist $\frac{1}{\lambda} = 0{,}0175 \cdot 10^5$, so daß $\gamma = 0{,}007181\, a^2 = 0{,}04511\, N a^2$ wird, unter $N = \frac{\omega}{2\pi}$ die Zahl der Umdrehungen pro Sekunde verstanden.

Die Konstante C nimmt für Kupfer den Wert an

$$C = 104{,}5\, a H_0^2.$$

5. Das Bremsmoment. Nach dem Energieprinzip besteht zwischen der Jouleschen Wärme Q und dem Drehmoment P, welches auf die rotierende Kugel im Magnetfelde wirkt, die Beziehung

$$Q = P \omega,$$

so daß

$$P = D \frac{\Phi(\delta)}{\delta^2} \tag{72}$$

wird, wo

$$D = \frac{3 a^3 H_0^2}{2} \tag{72'}$$

ist. Für sehr kleine Geschwindigkeiten ergibt sich

$$\frac{\Phi}{\delta^2} = 0{,}02222\,\gamma\,(1 - 0{,}009524\,\gamma^2), \tag{73}$$

für sehr große Geschwindigkeiten

$$\frac{\Phi}{\delta^2} = \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta^2} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} - \frac{1}{\gamma}. \tag{73'}$$

In Worten: für kleine Geschwindigkeiten ist das Bremsmoment der Geschwindigkeit direkt, für große der Quadratwurzel aus der Geschwindigkeit umgekehrt proportional.

Die letzte Kolonne der Tabelle 1 enthält $\frac{P}{D} = \frac{\Phi}{\delta^2}$. Bild 4 stellt $\frac{P}{D}$ als Funktion von γ dar.

Aus diesem Bild oder aus der Tabelle ersieht man, daß das Bremsmoment für eine bestimmte Geschwindigkeit ein Maximum besitzt. Diese sogenannte kritische Rotationgeschwindigkeit ω_c ergibt sich aus $\delta_c = 4{,}82$ oder $\gamma_c = 11{,}61$; der kritische Wert ist $\frac{\Phi}{\delta^2} = \frac{P_{max}}{D} = 0{,}1183$. So berechnet sich

$$P_{max} = 0{,}1774\, a^3 H_0^2$$

für

$$\omega_c = 2\pi N_c = \frac{\gamma_c}{4\pi\lambda a^2} = \frac{0{,}9241}{\lambda a^2}.$$

Für Kupfer wird

$$\omega_c = \frac{1617}{a^2}; \qquad N_c = \frac{257{,}4}{a^2}.$$

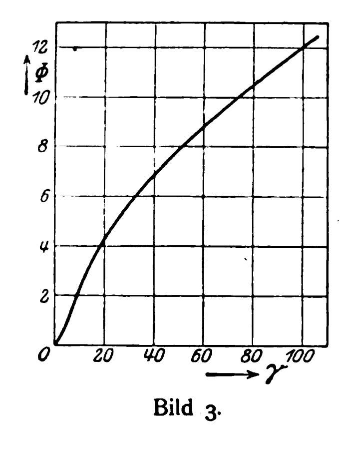


Bild 3.

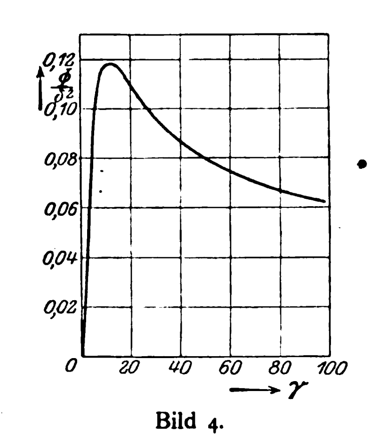


Bild 4.

Die kritische Umdrehungszahl ist also von der Feldstärke unabhängig. Die Existenz eines Maximums des Bremsmoments gilt allgemeiner und ist für die Praxis von Bedeutung, denn eine Kolbenkraftmaschine, deren Regulator zu Versuchszwecken fortgenommen ist, und der mit einer Wirbelstrombremse versehen ist, wird sich ganz verschieden verhalten, je nachdem das System eine größere oder kleinere Umdrehungsgeschwindigkeit als die kritische hat[1]).

Wenn nämlich im ersten Falle die Umdrehungszahl durch einen Zufall wächst, so nimmt das Bremsmoment ab, und infolgedessen nimmt die Geschwindigkeit noch mehr zu, der Zustand ist also labil, und die Maschine geht durch. Ist umgekehrt die Geschwindigkeit kleiner als die kritische, so wirkt die Wirbelstrombremse regulierend gegen jede Schwankung.

6. Energie der Wirbelströme. Das scheinbare Trägheitsmoment. Zur Berechnung der magnetischen Energie W_i, soweit sie im Innern der Kugel lokalisiert ist, brauchen wir die magnetischen Feldkomponenten im Innern. H_ϑ und H_φ sind bereits in (60) angegeben. H_r berechnet sich nach (9), (25) und (58) zu

$$H_r = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{n P_{n\nu}}{r} [(L_{n\nu}\cos\nu\varphi - M_{n\nu}\sin\nu\varphi) S_{n\nu} - (L_{n\nu}\sin\nu\varphi + M_{n\nu}\cos\nu\varphi) T_{n\nu}]. \quad (74)$$

[1]) Siehe R. Rüdenberg, Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen. Stuttgart 1906, S. 60.

So erhalten wir

$$W_i = \frac{\mu}{8\pi}\int H^2 dS_i = \frac{\mu}{8\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}(L_{n\nu}^2 + M_{n\nu}^2)\,\pi\int_0^{\pi}\int_0^{a}\Big[n^2 P_{n\nu}^2 (S_{n\nu}^2 + T_{n\nu}^2) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2}\left\{\left(\frac{d P_{n\nu}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\nu^2 P_{n\nu}^2}{\sin^2\vartheta}\right\} \times (S_{n\nu}'^2 + T_{n\nu}'^2)\Big] \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr$$

und mit Anwendung der Beziehung (60')

$$W_i = \mu\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{L_{n\nu}^2 + M_{n\nu}^2}{4}\,\frac{n(n+\nu)!}{(n+1)(2n+1)(n-\nu)!}\int_0^a [n(n+1)(S_{n\nu}^2 + T_{n\nu}^2) + \tag{75}$$

$$+ (S_{n\nu}'^2 + T_{n\nu}'^2)]\, dr.$$

Das Integral dieser Formel läßt sich wesentlich vereinfachen, denn $R_n(k_\nu r)$ gehorcht ja der Gleichung

$$\frac{d^2 r R_n}{dr^2} + \left[k_\nu^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] r R_n = 0,$$

und da k_ν^2 nach (11) die Form $k_\nu^2 = -ci$ hat, ergibt sich durch Zerlegung dieser Gleichung in reellen und imaginären Teil

$$\frac{d^2 r S_{n\nu}}{dr^2} + c r T_{n\nu} - \frac{n(n+1)}{r} S_{n\nu} = 0$$

$$\frac{d^2 r T_{n\nu}}{dr^2} - c r S_{n\nu} - \frac{n(n+1)}{r} T_{n\nu} = 0.$$

Multipliziert man nun die erste mit $S_{n\nu} r\,dr$, die zweite mit $T_{n\nu} r\,dr$, addiert sie und integriert zwischen 0 und a, so ergibt sich

$$\int_0^a\left(r S_{n\nu}\frac{d^2 r S_{n\nu}}{dr^2} + r T_{n\nu}\frac{d^2 r T_{n\nu}}{dr^2}\right) dr = n(n+1)\int_0^a (S_{n\nu}^2 + T_{n\nu}^2)\, dr,$$

und mittels partieller Integration der linken Seite

$$a(S_{n\nu} S_{n\nu}' + T_{n\nu} T_{n\nu}')_{r=a} = \int_0^a [n(n+1)(S_{n\nu}^2 + T_{n\nu}^2) + (S_{n\nu}'^2 + T_{n\nu}'^2)]\, dr,$$

so daß (75) sich in

$$W_i = \frac{\mu}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}(L_{n\nu}^2 + M_{n\nu}^2)\, a\,\frac{n(n+\nu)!}{(n+1)(2n+1)(n-\nu)!}(S_{n\nu} S_{n\nu}' + T_{n\nu} T_{n\nu}')_{r=a} \tag{76}$$

verwandelt.

Für unmagnetisches Material und ein gleichförmiges Feld vereinfacht sich dieser Ausdruck mittels der Gleichungen (62) und (62'), so daß sich

$$W_i = \frac{3 H_0^2 a^3}{4 \sin\alpha^2}(S_{11} S_{11}' + T_{11} T_{11}') = -\frac{3 H_0^2 a^3}{4}(p^2 + q^2 - p) \tag{77}$$

ergibt.

Bedenkt man, daß der im Innern der Kugel lokalisierte Teil der Energie des statischen Feldes $W_{i0} = \frac{1}{8\pi} H_0^2 \cdot \frac{4\pi}{3} a^3$ ist, so läßt sich (77) auch in der Form

$$W_i = W_{i0} - \frac{3 H_0^2 a^3}{4}\left(p^2 + q^2 - p + \frac{2}{9}\right) \tag{78}$$

schreiben.

Im Außenraum setzt sich das Feld $\mathfrak{H}$ additiv aus dem statischen Felde $\mathfrak{H}_0$ und dem Zusatzfelde $\mathfrak{H}'$ zusammen. Wir können annehmen, daß das ursprüngliche Feld von permanenten Magneten erzeugt ist. Dann leitet sich H_0 auch im Außenraum von einem Potential ab, d. h. es gilt

$$\mathfrak{H}_0 = \operatorname{grad}\chi_0; \qquad \mathfrak{H}' = \operatorname{grad}\chi'$$

und

$$W_a = \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{grad}^2 \chi_0 \, d S_a + \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{grad}^2 \chi' \, d S_a + \frac{1}{4\pi}\int (\operatorname{grad} \chi_0 \operatorname{grad} \chi') \, d S_a.$$

Bezeichnet man das erste Glied rechts, welches von der Geschwindigkeit unabhängig ist, durch W_{oa} und formt die anderen beiden Terme durch partielle Integration um, so erhält man

$$W_a = W_{oa} = \frac{1}{8\pi}\int \chi' \frac{\partial \chi'}{\partial r} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int \chi_0 \frac{\partial \chi'}{\partial r} d\sigma. \tag{79}$$

Wir setzen in (26)

$$b_{n\nu} C_{n\nu} = \Gamma_{n\nu} e^{i\gamma_{n\nu}} \tag{80}$$

und erhalten χ' in reeller Form

$$\chi' = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{n}{n+1} \Gamma_{n\nu} P_n(\cos\vartheta) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos(\nu\varphi + \gamma). \tag{81}$$

So ergibt sich

$$-\frac{1}{8\pi}\int \chi' \frac{\partial \chi'}{\partial r} . d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma_{n\nu}^2 n^2 a}{8(n+1)} \int_0^{\pi} P_{n\nu}^2 \sin\vartheta \, d\vartheta$$

oder nach (60')

$$-\frac{1}{8\pi}\int \chi' \frac{\partial \chi'}{\partial r} d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma_{n\nu}^2 n^2 a (n+\nu)!}{4(n+1)(2n+1)(n-\nu)!}. \tag{82}$$

Schließlich ist noch der letzte Term der Gleichung (79) auszuwerten. Setzen wir $C_{n\nu} = \mathfrak{G}_{n\nu} e^{i g_{n\nu}}$, so wird in reeller Form

$$\chi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{G}_{n\nu} P_{n\nu}(\cos\vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(\nu\varphi + g_{n\nu}), \tag{83}$$

so daß mittels (60')

$$-\frac{1}{4\pi}\int \chi_0 \frac{\partial \chi'}{\partial r} d\sigma = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{G}_{n\nu} \Gamma_{n\nu} \cos(g_{n\nu} - \gamma_{n\nu}) \, a \, \frac{n(n+\nu)!}{2(2n+1)(n-\nu)!}. \tag{84}$$

Würde man annehmen, daß das ursprüngliche Magnetfeld im ganzen Raume gleichförmig ist, würde die magnetische Energie unendlich groß sein. Wir brauchen jedoch nur vorauszusetzen, daß es im Bereiche der Kugel homogen ist, weil das Integral (84) sich nur auf die Oberfläche derselben bezieht.

Tun wir dies, setzen wir also $n = \nu = 1$; $C_{11} = H_0 a$, also $\mathfrak{G}_{11} = H_0 a$; $\gamma_{11} = 0$, und berücksichtigen, daß nach (36) und (62')

$$\Gamma_{11} e^{i\gamma_{11}} = H_0 a [3(p - q i) - 1] \tag{85}$$

ist, so folgt aus (79), (82) und (84)

$$W_a = W_{oa} + \frac{3 H_0^2 a^3}{4}\left((p^2 + q^2 - 2p + \frac{5}{9}\right) \tag{86}$$

Summiert man (78) und (86), so ergibt sich

$$W = W_0 + \frac{3}{4} H_0^2 a^3 \left(\frac{1}{3} - p\right), \tag{87}$$

wo W_0 die von der Umdrehungszahl unabhängige Energie des statischen Feldes ist. Was uns interessiert, ist also der variable Teil der magnetischen Energie

$$W' = \frac{3}{4} H_0^2 a^3 \left(\frac{1}{3} - p\right) = \frac{3}{4} H_0^2 a^3 Y; \tag{88}$$

hier bedeutet nach (66)

$$Y = \frac{1}{3} - \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{Sin}\delta - \sin\delta}{\operatorname{Cos}\delta - \cos\delta}. \tag{89}$$

Für kleine Werte von ω ergibt sich nach (65)

$$Y = 2\left(\frac{s_6}{\pi^6}\gamma^2 - \frac{s_{10}}{\pi^{10}}\gamma^4 + \frac{s_{14}}{\pi^{14}}\gamma^6 - \ldots\right), \tag{90}$$

für große Werte von ω gilt

$$Y = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}. \tag{91}$$

Tabelle 2.

δ	γ	Y	M
0	0	0,00000	0,004232
1,414	1	0,002094	0,004148
2	2	—	0,003904
2,828	4	0,02914	—
3	4,5	0,0355	0,002926
4	8	0,0826	0,001582
5	12,5	0,1301	0,000674
6	18	0,1655	—
8	32	0,2084	—
10	50	0,2333	0,000020
12	72	0,2500	—
14	98	0,2619	
20	200	0,2833	—
∞	∞	0,3333	0,000000

Der veränderliche Teil der magnetischen Energie ist also für kleine Winkelgeschwindigkeiten dem Quadrat von ω proportional und nähert sich für große Geschwindigkeiten der Konstanten $\frac{H_0^2 a^3}{4}$.

Tabelle 2 gibt die Werte von Y in iher Abhängigkeit von δ und γ, und Bild 5 stellt Y als Funktion von γ dar.

Ist die Winkelgeschwindigkeit veränderlich, aber ihre Beschleunigung so klein, daß man den elektromagnetischen Zustand in jedem Augenblick als quasistationär ansehen kann, so leitet sich die Bewegungsgleichung folgendermaßen aus dem Energieprinzip ab.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J}{2}\omega^2 + W'\right) = P\,\omega, \tag{92}$$

wo J das Trägheitsmoment des rotierenden Systems, P das Drehmoment ist, welches die Geschwindigkeit zu vermindern sucht, so daß

$$\left(J + \frac{1}{\omega}\frac{dW'}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} = P. \tag{93}$$

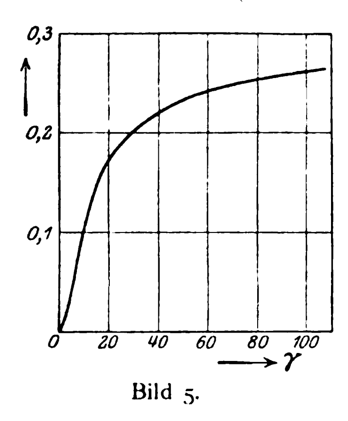


Bild 5.

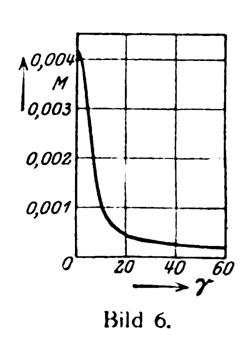


Bild 6.

Man muß also dem wahren Trägheitsmoment J das scheinbare

$$J' = \frac{1}{\omega}\frac{dW'}{d\omega} = \frac{3}{4}H_0^2 a^3 (4\pi\lambda a^2)^2 \frac{1}{\gamma}\frac{dY}{d\gamma}$$

hinzufügen, d. h.

$$J' = 12\pi^2\lambda^2 H_0^2 a^7 \frac{1}{\gamma}\frac{dY}{d\gamma} = 12\pi^2\lambda^2 H_0^2 a^7 M. \tag{94}$$

Schon in meiner Doktorarbeit habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß das wahre Trägheitsmoment infolge der magnetischen Energie vergrößert wird.

Nach den Gleichungen (94) und (89) gilt

$$M = \frac{2}{\delta^4}\left[\frac{1}{\delta}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\delta - \sin\delta}{\mathfrak{Cof}\,\delta - \cos\delta} + 2\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\delta - \cos\delta - 1}{(\mathfrak{Cof}\,\delta - \cos\delta)^2}\right]. \tag{95}$$

Für kleine Geschwindigkeiten ergibt sich

$$M = 4\left[1\,\frac{S_6}{\pi^6} - 2\,\frac{S_{10}}{\pi^{10}}\gamma^2 + 3\,\frac{S_{14}}{\pi^{14}}\gamma^4 - \ldots\right]. \tag{96}$$

Ist γ sehr klein, können wir uns auf

$$M = 4{,}232 \cdot 10^{-3}$$

beschränken, so daß nach (94) für Kupfer folgt

$$J' = 1{,}637 \cdot 10^{-7}\, H_0^2\, a^7.$$

Für große Geschwindigkeiten verschwindet M gemäß der Formel

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\gamma^{-\frac{5}{2}} = 0{,}3535\,\gamma^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{\delta^5}. \tag{97}$$

Die letzte Kolonne der Tabelle 2 gibt M als Funktion von γ und δ, und Bild 6 stellt M in seiner Abhängigkeit von γ dar.

7. Schlußbemerkungen. Hiermit haben wir das Problem in aller Strenge behandelt unter der einzigen Voraussetzung, daß sich im Außenraum kein Eisen befindet, durch welches der Kraftlinienverlauf deformiert würde. Unsere Formeln gelten also unter der Annahme, daß das statische Magnetfeld durch elektrische Ströme hervorgerufen wird, oder daß die Eisenmassen der Elektromagnete sich in so großer Entfernung von der Kugel befinden, daß sie das Feld der induzierten Ströme nicht mehr wesentlich beeinflussen können.

Die eben erwähnte Deformation der Kraftlinien durch die Eisenmassen der Elektromagnetkerne scheint mir die größte Schwierigkeit für eine strenge Theorie der Wirbelstrombremsen zu bilden. Ich werde auf diesen Punkt demnächst zurückkommen, wenn ich eine Anordnung behandle, die sich der Praxis wesentlich mehr nähert als das oben gelöste Problem. Indessen glaube ich doch, daß letzteres nicht ohne Wert ist, weil es alle Phänomene zum Ausdruck bringt, die man an elektromagnetischen Bremsen tatsächlich beobachtet, und weil es erwünscht schien, an einem wenn auch etwas idealisierten Beispiel mittels der Maxwell-Hertzschen Theorie einmal in Strenge alle Einzelheiten quantitativ durchzurechnen.

La Plata, 28. Juni 1919.

Instituto de Física.

Die stationären Schwingungen der wechselstromgespeisten Spule.

Berichtigung.

Die Unterschriften der Bilder 10 und 11 meiner Arbeit (Seite 353 dieses Bandes) enthalten leider eine Verwechselung. Es bedeutet in beiden Spektren

die Eigenfrequenzen des gestreckten Drahtes,
——— die Eigenfrequenzen der Spule.

Böhm.



Archiv für Elektrotechnik

IX. Band. 11. u. 12. Heft. 1921.

Die Dämpfungen zweier induktiv gekoppelter Schwingungskreise.
I. Vorherrschende Kopplung.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Geschichtliche Übersicht und Ziel. Den Eigenfrequenzen und Dämpfungen zweier induktiv gekoppelter Schwingungskreise wird augenblicklich in der drahtlosen Telegraphie wieder besonderes Interesse entgegengebracht. Beide muß man kennen, will man die Eigenschaften eines heutigen Zwischenkreisröhrensenders richtig verstehen

Über die Eigenfrequenzen sind wir gut unterrichtet. In allen praktischen Fällen sind sie unabhängig vom Widerstande. Unter dieser Vereinfachung haben Oberbeck[1]) und M. Wien[2]) für sie einen allgemein gültigen Ausdruck aufgestellt, den sie durch einfache Nährungsformeln für die praktische Auswertung zuschnitten.

Nicht ganz so gut kennen wir die Dämpfungen. Oberbeck[3]) hat zuerst einen Näherungswert für sie zu ermitteln gesucht. Sein Ergebnis ist indessen so verwickelt gebaut, daß es vielleicht dort, wo Zeit keine Rolle spielt, zur Ermittlung eines Einzelwertes benutzt werden kann. Für die praktische Auswertung und vollends für den Überblick über das Verhalten der Dämpfungen kommt es in der vorliegenden Fassung nicht in Betracht. Brauchbare Näherungswerte finden wir dagegen in der Arbeit vom M. Wien, die uns zuerst den großen Zügen nach mit den Eigenschaften schwingender gekoppelter Systeme bekannt gemacht hat und mit Recht in der Literatur als Hauptquelle vielfach zitiert worden ist. Aber bei den Wienschen Nährungsformeln für die Koppeldämpfungen muß man im Auge behalten, daß sie nur für Resonanz mit ihrer unmittelbaren Umgebung und nur für sehr lose kapazitive Koppelungen gelten. Zwar sind sie später von Drude[4]) für beliebig feste induktive Koppelungen erweitert worden, doch sind Drudes Formeln für die praktische Rechnung ebenso wenig, wenn nicht gar noch weniger geeignet wie die Oberbeckschen. So sind heute unsere Kenntnisse über die Koppeldämpfungen induktiv erregter Kreise noch recht lückenhaft[5]). Der augenblickliche Stand des Problems des Zwischenkreisröhrensenders verlangt hier gebieterisch Abhilfe. Diese soll in der folgenden Arbeit gegeben werden. Als Voraussetzung geht lediglich die Annahme ein, daß der Ohmsche Widerstand klein gegen den induktiven ist. Die Koppelung kann beliebig fest oder lose sein. Die Widerstände sollen nur nicht eine gewisse (von der Koppelung abhängige) Größe überschreiten. Unsere Arbeit ist somit auf das Gebiet vorherrschender Kopplung zugeschnitten. Der andere Hauptfall vorherrschender Dämpfung soll später behandelt werden. Die Ergebnisse der Theorie habe ich, um

[1]) A. Oberbeck, Wied. Annalen **55**, 623, 1895.
[2]) M. Wien, Wied. Annalen **61**, 151, 1897.
[3]) A. a. O.
[4]) Drude, Annalen der Physik **13**, 1904, 512.
[5]) Man vergleiche auch die Arbeit Kiebitz, Annalen der Physik **40**, 138, 1913. Man kann zwar für den Einzelfall unter Aufwand recht erheblicher Mühe die Dämpfungen berechnen. Für den praktischen Rechner ist damit etwas, aber nicht alles gewonnen. Er braucht eine bequeme Rechenvorschrift, die ihm klaren Einblick in das Spiel ihrer Veränderungen erlaubt. Eine bequeme Näherungslösung ist ihm daher wertvoller als eine verwickelte schwer übersichtliche Lösung, die auf den genauen Wert führt.

ihre Anwendung zu erleichtern, in Bildern aufgetragen. Ich hoffe, daß diese dem Ingenieur, wenn er sich rasch einen Überblick verschaffen muß, wie sich die Koppeldämpfungen mit den Konstanten der Stromkreise ändern, seine Aufgabe erleichtern. Der Vollständigkeit wegen sind die bereits bekannten Resultate von Oberbeck und M. Wien über die Koppelfrequenzen aufgenommen werden.

Wie die vorliegenden Ergebnisse für die Erklärung des sogenannten „Ziehens" des Zwischenkreisröhrensenders nutzbar zu machen sind, will ich in einer späteren Arbeit zeigen.

I. Koppelfrequenzen. Vernachlässigung der Dämpfung. Bezeichnen wir die Ströme mit i_1 und i_2, die Kapazitäten mit C_1 und C_2, die Induktivitäten mit L_1, L_2, M (Bild 1), so lauten bei Vernachlässigung der Dämpfung (der Widerstände) die Differentialgleichungen für die Ströme:

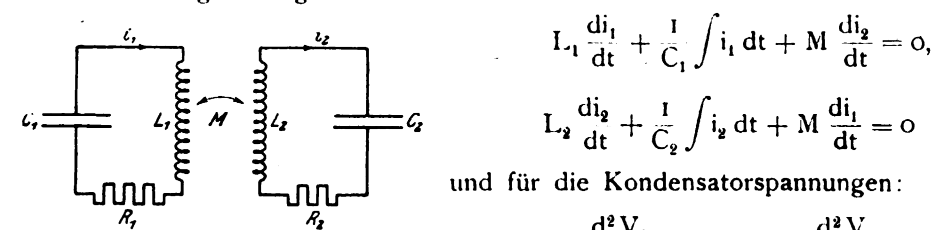


Bild 1. Behandelte Schaltung.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt + M\frac{di_2}{dt} = 0, \tag{1}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt + M\frac{di_1}{dt} = 0 \tag{2}$$

und für die Kondensatorspannungen:

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + V_1 + M C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} = 0, \tag{3}$$

$$L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + V_2 + M C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} = 0. \tag{4}$$

Bei letzteren Gleichungen ist von den Beziehungen Gebrauch gemacht:

$$\frac{1}{C_1}\int i_1\,dt = V_1; \qquad i_1 = C_1\frac{dV_1}{dt}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = V_2; \qquad i_2 = C_2\frac{dV_2}{dt}. \tag{6}$$

Wir differenzieren die Gleichung (4) zweimal nach der Zeit t und setzen für die Werte $\frac{d^2 V_2}{dt^2}$, und $\frac{d^4 V_2}{dt^4}$ aus (3) berechenbare Ausdrücke ein.

Wir erhalten so:

$$L_1 C_1 \cdot L_2 C_2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \cdot \frac{d^4 V_1}{dt^4} + \left(L_1 C_1 + L_2 C_2\right)\frac{d^2 V_1}{dt^2} + V_1 = 0. \tag{7}$$

Es liegt nahe einzuführen:

$$L_1 C_1 = \frac{1}{\omega_1^2}; \qquad L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_2^2}; \qquad \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = \sigma. \tag{8}$$

Die Werte ω_1 und ω_2 geben die Kreisfrequenzen jedes Einzelsystems im ungekoppelten Zustand an; σ ist der aus der Transformatortheorie bekannte Streukoeffizient. An seiner Stelle wird häufig, namentlich von Physikern, mit dem Kopplungskoeffizienten

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{9}$$

gerechnet. Es besteht die Beziehung:

$$\sigma = 1 - k^2.$$

Ist die Streuung sehr klein, die Kopplung sehr fest, dann ist es im allgemeinen zweckmäßig, den Streukoeffizienten in die Formeln einzuführen. Im umgekehrten Falle empfiehlt es sich, den Kopplungskoeffizienten zu benutzen. In Zwischenfällen



kann die Vorliebe für den einen und anderen Koeffizienten nur durch die Gewohnheit begründet werden. Im folgenden wollen wir im allgemeinen den Streukoeffizienten beibehalten. In den Bildern sind die Hauptergebnisse auch auf den Kopplungskoeffizienten bezogen.

Wir dividieren die Gleichung (7) durch den Koeffizienten $L_1 C_1 L_2 C_2 \cdot \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$ und erhalten mit unsern Bezeichnungen (8) die Enddifferentialgleichung:

$$\frac{d^4 V_1}{dt^4} + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\sigma} \cdot \frac{d^2 V_1}{dt^2} + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\sigma} \cdot V_1 = 0. \tag{10}$$

Mit dem bekannten Ansatz:

$$V_1 = A \cdot e^{i \Omega t}$$

ergibt sich die Bestimmungsgleichung:

$$\Omega^4 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\sigma} \cdot \Omega^2 + \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\sigma} = 0. \tag{11}$$

Aus ihr folgt:

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\sigma} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}}\right]. \tag{12}$$

Unter Ω ist die Kreisfrequenz der Eigenschwingung der gekoppelten Systeme zu verstehen. Es gibt zwei Koppelfrequenzen. Ihre Kreisfrequenzen seien mit Ω_1 und Ω_2 bezeichnet. Es ist zweckmäßig, als Einheit der Kreisfrequenz nicht die gewöhnliche Einheit $1\,\mathrm{sec}^{-1}$, sondern eine der vorkommenden Kreisfrequenzen, sagen wir die Kreisfrequenz ω_1, zu wählen. Dies läuft darauf hinaus, daß wir einführen:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = x; \qquad \frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1; \qquad \frac{\Omega_2}{\omega_1} = O_2. \tag{13}$$

Wir erhalten dann:

$$\frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1 = \sqrt{\frac{1 + x^2}{2\sigma}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]}. \tag{14}$$

$$\frac{\Omega_2}{\omega_1} = O_2 = \sqrt{\frac{1 + x^2}{2\sigma}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]}. \tag{15}$$

Durch die Formeln (13)—(15) sind wir imstande, die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen für die gekoppelten Systeme aus denen der ungekoppelten und aus der Stärke der Kopplung bzw. aus der Größe der Streuung zu berechnen. Wir wollen, um über ihren Inhalt Klarheit zu bekommen, zunächst Näherungsformeln angeben. Das Verhältnis x der Kreisfrequenzen der ungekoppelten Systeme setzen wir dabei als veränderlich von 0 bis ∞ voraus, wie es etwa der Fall sein würde, wenn wir bei sonst festen Werten die sekundäre Kapazität C_2 von ∞ bis 0 abnehmen lassen.

Wir unterscheiden 3 Unterfälle.

1. x liege nahe bei 0 (sei kleiner als 1).

Dann ist:

$$\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 - x^2)^2}} = 1 - \frac{2\sigma x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{2\sigma^2 x^4}{(1 + x^2)^4}. \tag{16}$$

$$\frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1 = \sqrt{\frac{1 + x^2}{2\sigma}\left(2 - \frac{2\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}\right)}. \tag{17}$$

$$O_1 = \frac{1 + \frac{1}{2} x^2}{\sqrt{\sigma}}\left[1 - \frac{\sigma}{2} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\right] = \frac{1 + x^2 \frac{1 - \sigma}{2}}{\sqrt{\sigma}}. \tag{18}$$

$$O_2 = \sqrt{\frac{1+x^2}{2\sigma}\left[\frac{2\sigma x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2\sigma^2 x^4}{(1+x^2)^4}\right]} = x\left(1-\frac{x^2[1-\sigma]}{2}\right). \tag{19}$$

2. Es liege x nahe bei 1.

Wir setzen $x = 1 + \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

Dann ist

$$\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{1-\sigma} = k. \tag{20}$$

$$O_1 = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\sigma}[1+k]} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)(1+k)}{1-k^2}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-k}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\sqrt{1-\sigma}}}. \tag{21}$$

$$O_2 = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\sigma}[1-k]} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)(1-k)}{1-k^2}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1+k}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1+\sqrt{1-\sigma}}}. \tag{22}$$

3. x sei groß gegen 1: $1 \ll x < \infty$.

Wir schreiben dann wieder angenähert, indem wir die Glieder $\frac{x^4}{(1+x^2)^4}$ und höhere gegen 1 vernachlässigen:

$$\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}} = 1-\frac{2\sigma x^2}{(1+x^2)^2}. \tag{23}$$

$$O_1 = \sqrt{\frac{1+x^2}{\sigma}\left(1-\frac{\sigma x^2}{(1+x^2)^2}\right)} = \frac{x}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{\sigma x^2}{(1+x^2)^2}\right)}. \tag{24}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{\sigma}{x^2}}. \tag{25}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\sigma}}\left(1+\frac{1-\sigma}{2x^2}\right). \tag{26}$$

$$O_2 = \sqrt{\frac{1+x^2}{2\sigma}\cdot\left[\frac{2\sigma x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2\sigma^2 x^4}{(1+x^2)^4}\right]} = 1-\frac{(1-\sigma)}{2x^2}. \tag{27}$$

Die langsame Koppelschwingung $\frac{\Omega_2}{\omega_1} = O_2$ ist stets kleiner als 1 und auch stets kleiner als x. Von den vier Kreisfrequenzen ω_1, ω_2, Ω_1, Ω_2 hat sie den kleinsten Wert. Sie steigt zunächst mit x proportional, dann langsamer an. Bei Resonanz ($x = 1$) liegt sie bei dem Werte $\frac{1}{\sqrt{1+k}}$, bei höheren Werten von x schmiegt sie sich asymtotisch dem Wert 1 an. Sowohl bei kleinen wie bei großen Werten ist sie praktisch unabhängig von der Streuung. Nur in Resonanznähe erweist sie sich abhängig von ihr, und zwar liegt sie dort um so tiefer, je geringer die Streuung (je fester die Kopplung) ist. Doch ist im ganzen genommen diese Abhängigkeit nicht groß. Die Gesamtheit der O_2-Werte liegt zwischen dem geknickten für $\sigma = 1$ gültigen Linienzug (Bild 2, oberste der gestrichelten Kurven) und der Kurve

$$O_2 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

die sich für $\sigma = 0$ ergibt.

Die rasche Koppelschwingung $\frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1$ ist stets höher als 1 und auch stets höher als x. Von den vier Kreisfrequenzen ω_1, ω_2, Ω_1, Ω_2 hat sie immer den größten Wert. Sie liegt bei kleinen Werten von x bei $O_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$. Anfänglich ändert

sie sich mit x so gut wie gar nicht, später wächst sie mit x. Bei Resonanz ($x = 1$) ist ihr Wert $O_1 = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$. Bei großen Werten von x schmiegt sie sich den aufsteigenden Graden $\frac{x}{\sqrt{\sigma}}$ an. Die rasche Koppelschwingung ist stark abhängig von der Streuung, und zwar wächst sie bis auf das Gebiet der Resonanznähe umgekehrt mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ an. In Resonanznähe ist die Änderung proportional mit

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-\sigma}}} = \frac{1}{\sqrt{1-k}}.$$

Bild 2 ergibt nun auch zahlenmäßig die Werte der Koppelschwingungen. Der Gebrauch wird durch das daselbst angegebene Beispiel verständlich gemacht.

II. Die Koppeldämpfungen. In diesem Abschnitt wollen wir nun in erster Annäherung die vorhin ganz vernachlässigten Widerstände berücksichtigen. Es wird sich zeigen, daß dann an den vorhin berechneten Koppelfrequenzen keine Verbesserung anzubringen ist. Dagegen werden sich die ungedämpften Schwingungen von vorhin nunmehr als gedämpft ergeben. Die Größe der Dämpfung ist unser Ziel.

Die Differentialgleichungen für die Ströme lauten nun:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 \, dt + M \frac{di_2}{dt} = 0, \tag{28}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt + M \frac{di_1}{dt} = 0, \tag{29}$$

oder indem wir die Kondensatorspannungen V_1 und V_2 einführen:

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{d V_1}{dt} + V_1 + M C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} = 0, \tag{30}$$

$$L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + R_2 C_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 + M C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} = 0. \tag{31}$$

Wie früher beseitigen wir aus der Gleichung (31) V_2 und erhalten bei Einführung der Beziehungen (8) die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 V_1}{dt^4} + \frac{d^2 V_1}{dt^2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\sigma} + V_1 \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\sigma}$$
$$= -\frac{d^3 V_1}{dt^3} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right] - \frac{d^2 V_1}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} - \frac{d V_1}{dt} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{R_1}{L_1} \omega_2^2 + \frac{R_2}{L_2} \omega_1^2\right]. \tag{32}$$

Links steht der schon aus Gleichung (10) bekannte Ausdruck. Früher war die rechte Seite Null. Jetzt enthält sie Werte, die bei kleinen Widerständen als Berichtigungsgrößen aufzufassen sind. Es liegt nahe, den Ansatz zu machen:

$$V_1 = A e^{i \Omega' t} \text{ und } \Omega' = \Omega (1 + \xi) \tag{33}$$

zu setzen, unter ξ eine gegen eins kleine Größe verstanden. Für Ω' ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$\Omega'^4 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\sigma} \Omega'^2 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\sigma} =$$
$$= i \frac{1}{\sigma} \left[\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right] \Omega'^3 + \frac{1}{\sigma} \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \Omega'^2 - i \frac{1}{\sigma} \left[\frac{R_1}{L_1} \omega_2^2 + \frac{R_2}{L_2} \omega_1^2\right] \Omega'. \tag{34}$$

Setzen wir nun für Ω' den Wert $\Omega (1 + \xi)$ ein und entwickeln wir dann alle Potenzen von $(1 + \xi)$, wobei wir alle höheren als ersten Glieder vernachlässigen, so müssen wir folgerichtig das zweite Glied rechts ebenfalls streichen und in den beiden anderen Gliedern Ω' durch Ω ersetzen. Dies Verfahren ist nur dann gestattet, wenn wir es mit vorherrschender Kopplung zu tun haben.



Bild 2. Die Koppelfrequenzen: ——— rasche Schwingung,
– – – – langsame Schwingung.

Beispiel: Ungekoppelte Eigenfrequenzen $\omega_1 = 10^5 \text{ sec}^{-1}$, $\omega_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$. Koppelung: $k^2 = 0{,}2$ (Streuungskoeffizient $\sigma = 0{,}8$); $x = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$; $O_1 = 2{,}3$; $O_2 = 0{,}97$; $A_1 = 2{,}3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$; $\Omega_2 = 0{,}97 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$.

Wir erhalten:

$$\Omega^4(1+4\xi) - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\sigma}\Omega^2(1+2\xi) + \frac{\omega_1^2\cdot\omega_2^2}{\sigma}$$

$$= i\frac{1}{\sigma}\left[\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right]\Omega^3 - i\frac{1}{\sigma}\left[\frac{R_1}{L_1}\omega_2^2+\frac{R_2}{L_2}\omega_1^2\right]\Omega. \quad (35)$$

Da $\Omega^4 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\sigma}\Omega^2 + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\sigma} = 0,$

so ergibt sich:

$$\Omega\xi = i\frac{\Omega^2\left\{\frac{R_1}{2L_1}+\frac{R_2}{2L_2}\right\} - \left\{\frac{R_1}{2L_1}\omega_2^2+\frac{R_2}{2L_2}\omega_1^2\right\}}{2\sigma\Omega^2-(\omega_1^2+\omega_2^2)}. \quad (36)$$

Nun ist

$$2\sigma\Omega^2 - (\omega_1^2+\omega_2^2) = \pm(\omega_1^2+\omega_2^2)\cdot\sqrt{1-4\sigma\frac{\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}{\left(1+\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)^2}}. \quad (37)$$

Ferner setzen wir im Zähler für Ω^2 seinen Wert

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\sigma} \pm \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\sigma}\sqrt{1-4\sigma\frac{\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}{\left(1+\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)^2}}. \quad (38)$$

ein.

Wir erhalten dann nach einer kleinen Umrechnung:

$$\alpha = \frac{\Omega\xi}{i} = \frac{R_1}{2L_1}\frac{1}{2\sigma}\left[1 \pm \frac{1-\frac{2\sigma x^2}{1+x^2}}{\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right] + \frac{R_2}{2L_2}\frac{1}{2\sigma}\left[1 \pm \frac{1-\frac{2\sigma}{1+x^2}}{\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right]. \quad (39)$$

Unter x wieder $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ verstanden.

Nach unserem Ansatz ist $V_1 = A\cdot e^{i\Omega' t} = A e^{i\Omega t}\cdot e^{i\xi\Omega t} = A\cdot e^{i\Omega t}\cdot e^{-\alpha t}$. Es ist also α nichts anderes als der Dämpfungsexponent unserer Koppelschwingungen. Wir sehen, das Ergebnis unserer zweiten Annäherung bedeutet lediglich eine Dämpfung. Die Kreisfrequenz Ω hat sich gegen früher nicht geändert, wenn wir quadratische Glieder der Dämpfung, wie oben geschehen, vernachlässigen.

Setzen wir für Ω den Wert Ω_1 für die rasche Koppelschwingung ein und wählen dementsprechend das obere der doppelten Vorzeichen, so erhalten wir auch die Dämpfung der rascheren Koppelschwingung. Bei Berechnung der Dämpfung der langsamen Koppelschwingung haben wir für Ω den Wert Ω_2 und das untere der doppelten Vorzeichen zu wählen. Wir finden somit, indem wir für die Faktoren von $\frac{R_1}{2L_1}$ und $\frac{R_2}{2L_2}$ naheliegende Abkürzungen einführen als Dämpfung der raschen Koppelschwingung:

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{2L_1}U_1 + \frac{R_2}{2L_2}U_2, \quad (40)$$

als Dämpfung der langsamen Koppelschwingung:

$$\alpha_2 = \frac{R_1}{2L_1}u_1 + \frac{R_2}{2L_2}u_2. \quad (41)$$

Die Dämpfung einer Koppelschwingung besteht also aus einer Mischung der Dämpfungen der ungekoppelten Systeme, wobei die „ungekoppelten" Dämpfungen mit den Gewichten U_1, U_2, u_1 und u_2 behaftet werden müssen Auf diese Gewichte müssen wir jetzt unser Augenmerk richten.

Wir haben zu schreiben [vgl. (39) und (40), (41)],

$$\left.\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1+x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right],\\
U_2 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma}{1+x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right].\\
u_1 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1+x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right],\\
u_2 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma}{1+x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Ferner besteht die Beziehung

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{\sigma} - U_1\\
u_2 &= \frac{1}{\sigma} - U_2
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

die die Gewichte U_1 und U_2 bequem aus den Gewichten u_1 und u_2 und umgekehrt berechnen läßt.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Gewicht u_2. Für $\sigma = 1$ (außergewöhnlich schwache Kopplung) ist

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2)^2}}\right]. \qquad (44)$$

Für die Wurzel ist stets das positive Vorzeichen zu wählen. Infolgedessen ist

für $\sigma = 1$ und $x < 1$

$u_2 = 1$

und für $\sigma = 1$ und $x > 1$

$u_2 = 0.$

Für $\sigma = 1$ und $x = 1$ springt u_2 vom Werte 1 auf Null.

Wir verfolgen sofort das Verhalten von u_1 für $\sigma = 1$. Durch Vergleich der Ausdrücke (42) stellt man leicht fest

$$u_1(x) = u_2\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (45)$$

Nach dem Vorigen muß daher für $\sigma = 1$ und $x < 1$ das Gewicht u_1 den Wert Null haben. Für $\sigma = 1$ und $x > 1$ bleibt der Wert bei Eins. Bei $x = 1$ steigt u_1 sprunghaft von Null auf Eins.

Infolge der Beziehungen (42) muß für $\sigma = 1$ das Gewicht U_1 genau mit u_2 und ebenso U_2 mit u_1 übereinstimmen. Unsere Werte für die Dämpfungen ent-

sprechen somit für $\sigma = 1$, ganz wie es sein muß, den Dämpfungen zweier getrennter Stromkreise.

Wir berechnen nun das Gewicht u_2 für den andern Grenzfall außergewöhnlich fester Kopplung ($\sigma = 0$). Es geht dann in den Wert

$$u_{2\,\sigma=0} = \frac{1}{(1+x^2)^2} \tag{46}$$

über.

Auch diese Kurve ist im Bild 3 gestrichelt eingetragen. Zwischen ihr und dem geknickten Linienzug für $\sigma = 1$ müssen die Kurven für Zwischenwerte der Streuung und Kopplung liegen. Eingetragen sind im Bild noch die Kurven für $\sigma = 0{,}5$ und $\sigma = 0{,}9$. Wir sehen, das Gewicht u_2 ist nur wenig von der Kopplung abhängig. Es sinkt mit wachsenden Werten x rasch von Eins auf Null herab.

Das umgekehrte Verhalten muß u_1 zeigen. Wir können nach Beziehung (45) die u_1-Kurven aus den u_2-Kurven dadurch ermitteln, indem wir eine Ordinate zur Abszisse x aus der u_2-Kurve, als solche zur Abszisse $\frac{1}{x}$ bei der u_1-Kurve auftragen. Im Resonanzpunkt ($x = 1$) fallen somit u_1 und u_2 gleich groß aus.

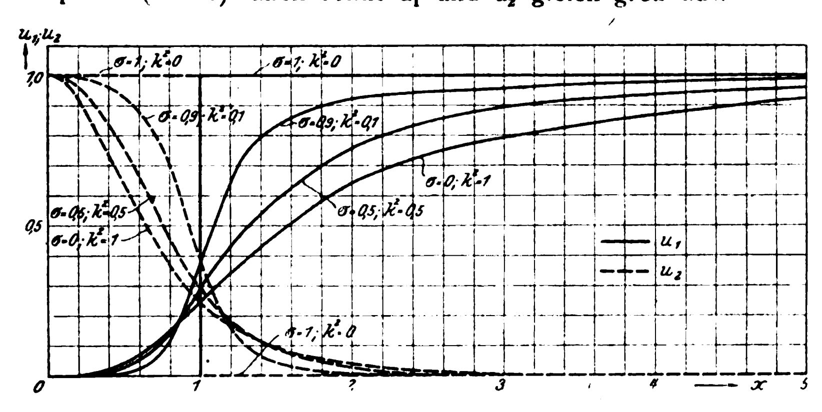


Bild 3. $\left.\begin{matrix}u_1\\u_2\end{matrix}\right\}$ Dämpfungsgewicht für die langsame Koppelschwingung.

Beispiel: $\frac{R_1}{2L_1} = 100\,\text{sec}^{-1}$; $\frac{R_2}{2L_2} = 100\,\text{sec}^{-1}$; $k^2 = 0{,}1$; $\sigma = 0{,}9$; $\omega_1 = 10^5\,\text{sec}^{-1}$; $x = 1{,}2$; $u_1 = 0{,}64$; $u_2 = 0{,}16$.

Dämpfung der langsamen Koppelschwingung: $0{,}64 \cdot 100 + 0{,}16 \cdot 100 = 80\,\text{sec}^{-1}$.

Folgende Näherungswerte können zum Vorteil sein[1]).

x klein gegen 1:

$$u_1 = \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\left[1 - \frac{\sigma}{1+x^2}\right]. \tag{47}$$

$$u_2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{2\sigma x^2}{1+x^2}\right]. \tag{48}$$

x nahe bei 1:

$$u_1 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1-\sigma x}{\sqrt{1-\sigma}}\right]. \tag{49}$$

[1]) Eine Näherungsformel, die kleine und große Werte von x umfaßt und nur in der Nähe der Resonanz versagt, ist die folgende:

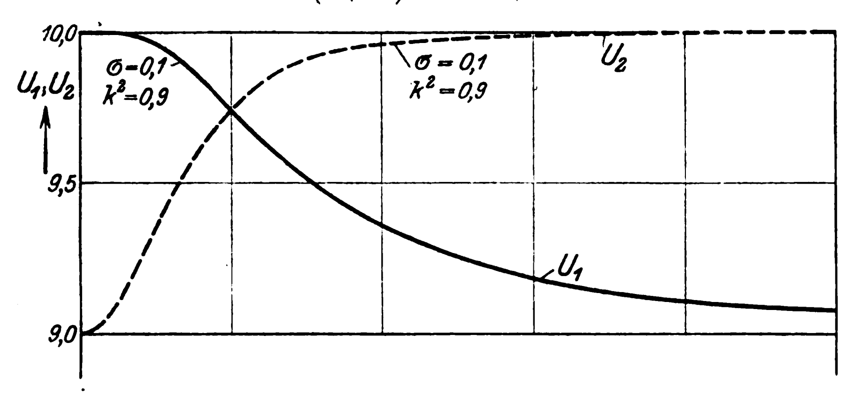
$$u_1 = \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{2\sigma}{(1+x^2)}\left(1 - \frac{3}{2(1+x^2)}\right)\right],$$

$$u_2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{2\sigma x^2}{(1+x^2)}\left(1 - \frac{3x^2}{2(1+x^2)}\right)\right]$$

$$u_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{\sigma}{x}}{\sqrt{1-\sigma}}\right]. \tag{50}$$

x groß gegen 1:

$$u_1 = \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{2\sigma}{1+x^2}\right]. \tag{51}$$



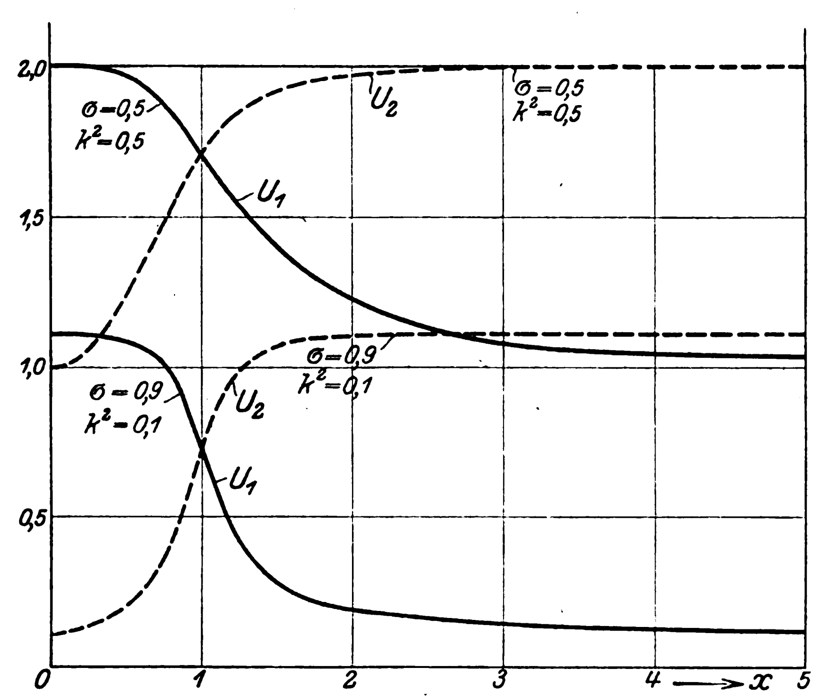


Bild 4. $\left.\begin{matrix}U_1\\U_2\end{matrix}\right\}$ Dämpfungsgewichte für die rasche Koppelschwingung.

Beispiel:

$\frac{R_1}{2L_1} = 100\,\text{sec}^{-1}$; $\frac{R_2}{2L_2} = 100\,\text{sec}^{-1}$; $k^2 = 0{,}1$; $\sigma = 0{,}9$; $\omega_1 = 10^5\,\text{sec}^{-1}$; $\omega_2 = 1{,}2 \cdot 10^5\,\text{sec}^{-1}$; $x = 1.2$.

$\left.\begin{matrix}U_1 = 0{,}5\\U_2 = 1{,}9\end{matrix}\right\}$ Dämpfung der raschen Koppelschwingung. $0{,}5 \cdot 100 + 1{,}9 \cdot 100 = 2{,}4 \cdot 100\,\text{sec}^{-1}$.

$$u_2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[1 - \frac{\sigma x^2}{1+x^2}\right]. \tag{52}$$

Mit dem Vorhergehenden sind auch die Gewichte U_1 und U_2 durch die Beziehung (43) bekannt. Beide sind im Bild 4 aufgetragen worden. Die Gewichte U_1

und U_2 steigen mit abnehmender Streuung (mit festerer Kopplung) sehr rasch und können bei sehr fester Kopplung recht hohe Werte erreichen. Wie u_1 und u_2 verändern sich auch U_1 und U_2 gegenläufig. In mathematischer Ausdrucksweise: $U_1(x) = U_2\left(\frac{1}{x}\right)$. Auch nehmen sie für Resonanz ebenfalls gleiche Werte an. Die Schwankung der U_1- und U_2-Werte mit veränderlichem x beträgt höchstens eine ganze Einheit. Diese Schwankung tritt gegenüber dem Durchschnittswerte bei sehr festen Kopplungen zurück, so daß dann die Dämpfungen der rascheren Koppelschwingung als annähernd unabhängig von x angesehen werden können.

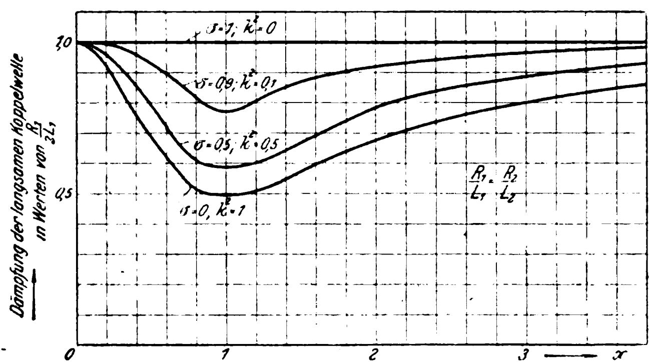


Bild 5. Dämpfung der langsamen Koppelschwingung bei gleicher ungekoppelter Dämpfung primär und sekundär.

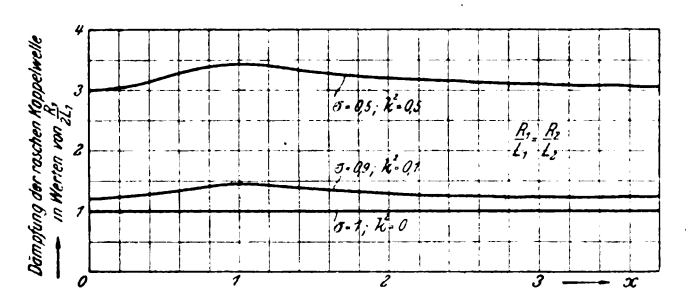


Bild 6. Dämpfung der raschen Koppelschwingung bei gleicher ungekoppelter Dämpfung primär und sekundär.

Es seien hier noch die Näherungswerte aufgeführt:

x klein gegen 1:

$$U_1 = \frac{1}{\sigma} - \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\left[1 - \frac{\sigma}{1+x^2}\right]. \tag{53}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{2\sigma x^2}{1+x^2}\right]. \tag{54}$$

x nahe bei 1:

$$U_1 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1-\sigma x}{\sqrt{1-\sigma}}\right]. \tag{55}$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1-\frac{\sigma}{x}}{\sqrt{1-\sigma}}\right]. \tag{56}$$

x groß gegen 1:

$$U_1 = \frac{1}{\sigma} - \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{2\sigma}{1+x^2}\right]. \tag{57}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[1 - \frac{\sigma x^2}{1+x^2}\right]. \tag{58}$$

Im übrigen kann ich auf Bild 4 verweisen.

Bei Berechnung der Koppeldämpfungen selber kommt es außer den Gewichten U und u noch auf die Dämpfungen im ungekoppelten Zustand an. Sind diese Dämpfungen $\frac{R_1}{2L_1}$ und $\frac{R_2}{2L_2}$ gleich groß, so erhalten wir durch Summierung der zu gleicher Kopplung gehörigen Kurven (Bild 3 u. 4) die Koppeldämpfungen selber. Diese Summierung ist in den Bildern 5 und 6 ausgeführt worden. Wir sehen, bei gleichen ungekoppelten Dämpfungen hat die Dämpfung der langsamen Koppelschwingung

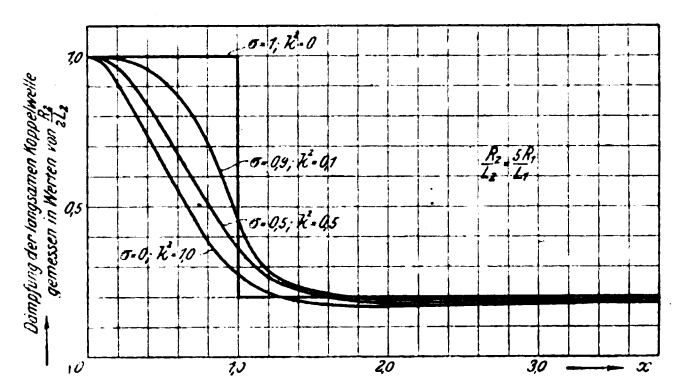


Bild 7. Dämpfung der langsamen Koppelschwingung. Ungekoppelte Dämpfung sekundär fünfmal so groß wie primär.

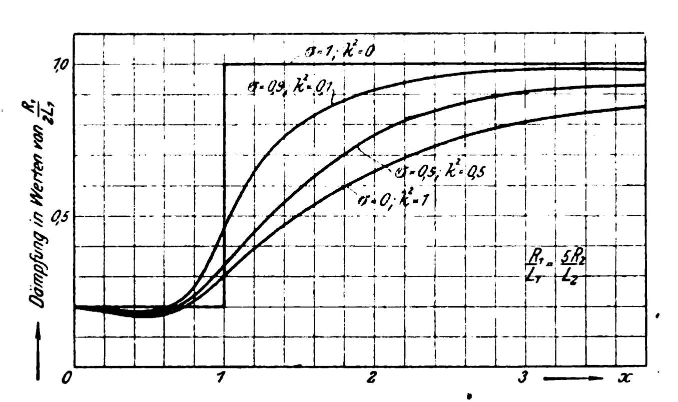


Bild 8. Dämpfung der langsamen Koppelschwingung. Ungekoppelte Dämpfung primär fünfmal so groß wie sekundär.

bei Resonanz ein Minimum, die Dämpfung der rascheren Koppelschwingung ein schwach ausgeprägtes Maximum [1]).

Sind die Dämpfungen für ungekoppelten Zustand nicht gleich groß, so nähert sich die Kurve der resultierenden Dämpfungen entweder den u_2- bzw. U_2-Kurven, oder den u_1- bzw. U_1-Kurven, je nachdem ob $\frac{R_2}{2L_2}$ oder $\frac{R_1}{2L_1}$ überwiegt. In den Bildern 7 und 8 habe ich die resultierenden Koppeldämpfungen für die langsamere Koppelschwingung für den Fall $\frac{R_1}{2L_1} = 5\frac{R_2}{2L_2}$ und den umgekehrten Fall $\frac{R_2}{2L_2} = 5\frac{R_1}{2L_2}$ aufgezeichnet.

[1]) Diese Aussage weicht stark von dem Wienschen Ergebnis für kapazitive Kopplung ab, stimmt aber mit Drudeschen Angaben über die Dämpfung bei induktiver Kopplung überein.

Über Selbsterregung von Mehrphasenserienkollektorgeneratoren bei induktiver Kuppelung.

Von

L. Fleischmann.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich nachgewiesen, daß induktive Kuppelungen für das Auftreten von selbsterregten Wechselstromschwingungen bei Mehrphasenkollektorgeneratoren nicht nötig sind. Es war daher zu vermuten, daß andere Beziehungen Periodenzahl und Größe des Stromes bestimmen werden, sobald auch noch Induktionswirkungen vorhanden sind. Wir wollen voraussetzen, daß Sinusschwingungen auftreten können, und werden uns zur Aufstellung der Bedingungen der Methode der Rechnung mit komplexen Größen bedienen. Der Einfachheit wegen nehmen wir einen zweiphasigen Serienkollektorgenerator an (Bild 1), der mittels zweier Einzeltransformatoren auf zwei nicht miteinander verketteten Impedanzen arbeitet. Es bezeichne $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ die Ströme in den beiden Kreisen des Generators, $\mathfrak{J}_3$ und $\mathfrak{J}_4$ die Ströme in den sekundären Transformatorenkreisen. $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_3$ die Impedanzen in den Generator- und sekundären Transformatorenkreisen.

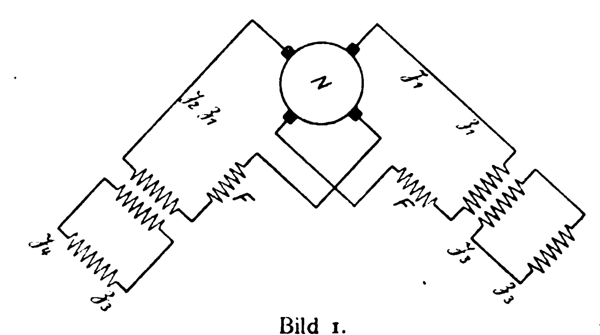


Bild 1.

$\mathfrak{Z}_1 = R - j\omega L$, wobei R die Differenz aus Ohmschen Widerstand und einer der Rotations-EMK des Ankers im Felde der Statorspule F proportionale Größe bedeutet. $j = \sqrt{-1}$ L den Selbstinduktionskoeffizienten ω die unbekannte Kreisfrequenz. Ebenso bezeichnet N eine der Rotations-EMK des Ankers im eigenen Felde proportionale Größe. Ferner ist $\mathfrak{Z}_3 = R_3 - j\omega L_3$, M der wechselseitige Induktionskoeffizient des Transformators, wobei das Übersetzungsverhältnis zu eins angenommen ist und $\mathfrak{M} = -j\omega M$. Nach diesen Festsetzungen erhalten wir für die vier Kreise folgendes System von Gleichungen

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{J}_2 N + \mathfrak{J}_3 \mathfrak{M} = 0. \quad (1)$$

$$-\mathfrak{J}_1 N + \mathfrak{J}_2 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{J}_4 \mathfrak{M} = 0. \quad (2)$$

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{M} + \mathfrak{J}_3 \mathfrak{Z}_3 = 0. \quad (3)$$

$$\mathfrak{J}_2 \mathfrak{M} + \mathfrak{J}_4 \mathfrak{Z}_3 = 0. \quad (4)$$

Wegen des negativen Vorzeichens von $\mathfrak{J}_1 N$ in Gleichung (2) siehe die unter [1]) erwähnte Arbeit S. 450.

Eliminieren wir mittels Gleichung (3) und (4) $\mathfrak{J}_3$ und $\mathfrak{J}_4$, so erhalten wir

$$\mathfrak{J}_1 (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{M}^2) + \mathfrak{J}_2 N \mathfrak{Z}_3 = 0. \quad (5)$$

$$-\mathfrak{J}_1 N \mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{J}_2 (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{M}^2) = 0. \quad (6)$$

Damit die beiden Gleichungen nebeneinander bestehen können, muß

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{M}^2) & N \mathfrak{Z}_3 \\ -N \mathfrak{Z}_3 & (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{M}^2) \end{vmatrix} = 0,$$

[1]) A. f. E., VIII. Bd., 1920. Heft 12, Seite 447 ff.

woraus folgt

$$(\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{M}^2) = j N \mathfrak{Z}_3. \tag{7}$$

Diese Gleichung zwischen komplexen Größen zerfällt in die beiden reellen Teile

$$\omega^2 (L L_3 - M^2) - \omega N L - R R_3 = 0. \tag{8}$$

$$\omega (L_3 R + L R_3) - N R_3 = 0. \tag{9}$$

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$a = L L_3 - M^2, \quad b = L_3 R + L R_3, \quad c = R R_3, \quad d = L_3 N, \quad e = R_3 N$

so muß, damit die Gleichungen (8) und (9) eine gemeinsame Wurzel ω besitzen, die Resultante

$$\begin{vmatrix} a & -d & -c \\ 0 & -b & -e \\ b & -e & 0 \end{vmatrix} = -b d e + b^2 c - a e^2 = 0 \tag{10}$$

sein.

Hieraus folgt als gemeinsamer Wert

$$\omega = \frac{e}{b} = \frac{N R_3}{L_3 R + L R_3}. \tag{11}$$

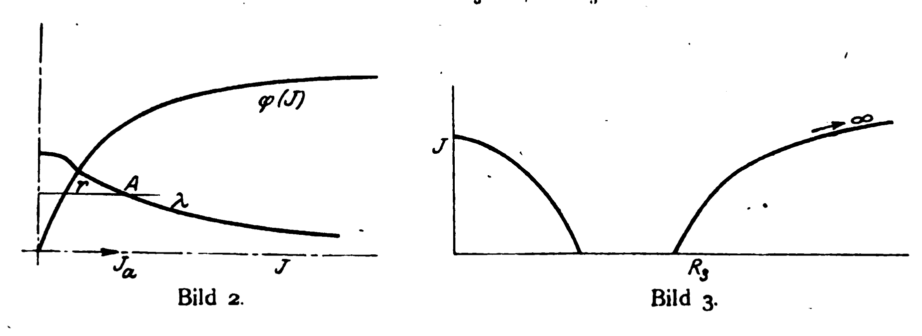


Bild 2. Bild 3.

Aus (10) folgt, daß das Auftreten von ungedämpften Schwingungen von bestimmten Beziehungen der Konstanten der Kreise abhängt. Die Bedingungsgleichung lautet ausgeschrieben

$$L^2 R R_3^2 + R_3 (M^2 N^2 + 2 L L_3 R^2) + L_3^2 R (R^2 + N^2) = 0. \tag{12}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf R_3 auf, so findet man

$$R_3 = -\frac{M^2 N^2 + 2 L L_3 R^2}{2 L^2 R} \pm \sqrt{\left(\frac{M^2 N^2 + 2 L L_3 R^2}{2 L^2 R}\right)^2 - \left(\frac{L_3}{L}\right)^2 (R^2 + N^2)}.$$

Wir führen für N und R ihre Werte ein und setzen

$$R = r - \omega_0 \lambda w_S w_R \sin \alpha$$

$$N = w_0 \lambda [w_S w_R \cos \alpha - w_R^2 (1 + \tau_2)],$$

wobei r den Widerstand pro Phase im primären Kreis, ω_0 die Kreisfrequenz der Rotation, w_S die Windungszahl pro Phase im Stator, w_R die Windungszahl pro Phase im Rotor, α den Bürstenverschiebungswinkel und τ_2 den Streuungsfaktor bedeutet. λ ist eine Funktion der Stromstärke, die für jeden Wert von J aus der Magnetisierungscharakteristik entnommen werden kann. Nennen wir die Charakteristik $\varphi(J)$, so ist $\lambda = \frac{\varphi(J)}{J}$; in (Bild 2) ist der ungefähre Verlauf von λ aufgezeichnet.

Damit R_3 in Gleichung (12) einen positiven Wert erhält, muß R negativ sein. Da r eine positive Größe ist, muß $\omega_0 \lambda w_S w_R \sin \alpha$ größer sein als r, d. h. J kann nur solche Werte annehmen, die kleiner sind als der dem Schnittpunkt A (Bild 2) des Widerstandes r mit λ entsprechende Wert. Für jeden Wert von J zwischen 0 und J_a gibt es zwei Werte von R_3, die einem stationären Zustand entsprechen. Wird $R = 0$, so wird $R_3 = \infty$, d. h. wir haben den Spezialfall eines auf Widerstand und Selbstinduktion arbeitenden Serienkollektorgenerators, für den wie bekannt der stationäre Betriebszustand durch den Schnittpunkt der Geraden $E = \frac{J r}{\sin \alpha}$ mit der



Charakteristik gegeben ist. Für $R_3 = \infty$ ergibt sich die Kreisfrequenz zu $\omega = \frac{N}{L}$. Schließen wir den Transformator sekundär kurz, machen also $R_3 = 0$, so muß wiederum $R = 0$ werden, wenn eine endliche Frequenz aus Gleichung (11) sich ergeben soll. Gehen wir auf Gleichung (8) zur Bestimmung von ω zurück, so ergibt sich $\omega = \frac{N}{L - \left(\frac{M^2}{L_3}\right)}$. Ist der Transformator streuungslos und hat er das Übersetzungsverhältnis eins, so ist $M = L_3$ und weiter wird $L = L_3 + l$, wobei l die außerhalb des Transformators liegende Selbstinduktion bedeutet. Wir erhalten dann $\omega = \frac{N}{l}$. Da λ auch für $J = 0$ einen endlichen Wert besitzt, so muß sich als Grenzfall auch für $J = 0$ der Widerstand R_3 bestimmen lassen. Hieraus läßt sich eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. Wir fanden, daß der Strom für $R_3 = 0$ und $R_3 = \infty$ wegen der Bedingung $R = 0$ in beiden Fällen derselbe sein muß. Zeichnen

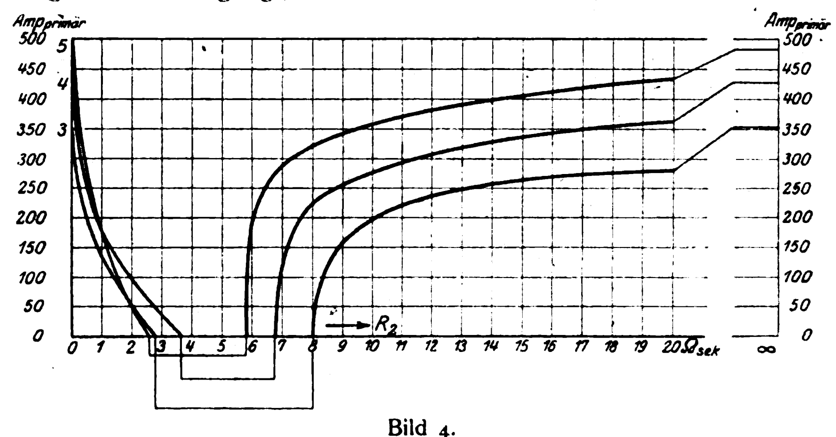


Bild 4.

wir den Strom J als Funktion von R_3 auf, so erhalten wir das Bild 3. Nun muß aber jede Kurve, welche aus dem Positiven kommend zweimal durch Null geht, zwischen diesen Werten im Negativen verlaufen. Wir haben J als Generatorstrom positiv bezeichnet, ein negatives J würde also Motorstrom bedeuten. Um einen Motorstrom zustande kommen zu lassen, müßten aber äußere elektromotorische Kräfte vorhanden sein. Da es solche im vorliegenden Falle nicht gibt, kann kein Strom fließen. Es ergibt sich also das bemerkenswerte Resultat, daß für gewisse Bereiche von R_3 überhaupt kein Strom auftreten kann, auch wenn wir den Wert von R_3 stetig verändern. Gehen wir z. B. von $R_3 = \infty$, d. h. offenem sekundärem Kreis auf den Wert R_0, so verschwindet der Strom für R_{01}, um erst wieder bei einem Widerstandswerte R_{02} aufzutreten. Geht man von $R_3 = 0$ (Kurzschluß des sekundären Kreises) aus und vergrößert allmählich den Widerstand, so verschwindet J für $R_3 = R_{02}$. Bild 4 zeigt die beobachteten Werte bei veränderlichem R_3 in Abhängigkeit von verschieden gewähltem r. Die Versuche wurden im Versuchsfeld der AEG-Fabriken Brunnenstraße von Herrn Dr.-Ing. O. Böhm durchgeführt, dem ich auch an dieser Stelle für seine Mitarbeit bei diesen Untersuchungen meinen besten Dank aussprechen möchte.

Zusammenfassung. Es wird das Verhalten von selbsterregten Serienmehrphasenkollektormaschinen bei induktiver Kuppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis untersucht. Es ergibt sich, daß das Verhalten der Maschine ein anderes sein muß als bei Fehlen der induktiven Kuppelung. Versuche zeigen die Richtigkeit der Theorie.



Das Pendeln von Gleichstrom-Wendepolmotoren.

Von

Dr.-Ing. **Wilhelm Otto.**

1. Allgemeines über die Pendelerscheinungen bei Wendepolmotoren.

Es ist in den letzten Jahren häufig beobachtet worden, daß beim Betriebe von Gleichstrom-Wendepolmotoren ein instabiler Zustand auftreten kann. Die Tourenzahl und die Stromstärke zeigen sich nicht mehr als konstante Größen, sondern sie vollführen ohne äußerlich erkennbare Ursache Schwingungen um einen bestimmten Mittelwert, verklingen entweder nach kurzer Zeit, so daß sich ein stabiler Betriebszustand einstellt, oder sie bleiben dauernd bestehen. Bisweilen wächst sogar die Amplitude der Schwingungen ständig an und erreicht eine derartige Größe, daß man genötigt ist, den Motor abzustellen, oder die Tourenzahl steigt bei dauernd größer werdender Stromaufnahme aperiodisch, unter Umständen mit großer Geschwindigkeit an, bis die Sicherheitsapparate den Motor vom Netz lösen. Es wird dieses Verhalten allgemein als das Pendeln des Motors bezeichnet. Da man die Pendelneigung immer nur dort beobachtete, wo der Motor bei Belastung eine Tourensteigerung zeigte, lag es nahe, hier einen ursächlichen Zusammenhang zu vermuten.

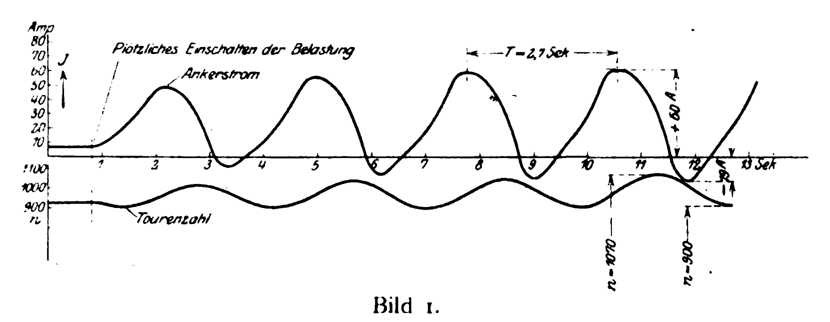


Bild 1.

Mit Ausnahme einer Abhandlung von Dr. Max Breslauer (E. T. Z. 1905, S. 640 u. f.), in der wohl zum ersten Male in der Literatur die Pendelerscheinung Erwähnung gefunden hat, gehen alle späteren Verfasser von dieser Grundlage aus. Die älteste theoretische Abhandlung über Pendelvorgänge stammt von K. W. Wagner (ETZ. 1907, S. 286); hierin wird dem Selbstinduktionskoeffizienten des Hauptstromkreises in irrtümlicher Weise eine bedeutsame Rolle zugeschrieben, während die Vorgänge in der Nebenschlußwicklung unberücksichtigt bleiben. Das pulsierende Ankerfeld erzeugt in der Feldwicklung eine nicht unbedeutende E. M. K. Als Folge davon treten auch in der Nebenschlußwicklung Stromschwebungen auf. Der erste, der die Vermutung aussprach, daß die Zeitkonstante der Feldwicklung bei den Pendelscheinungen als ein wichtiger Faktor mitspielt, war Pichelmayer. Eine Arbeit von Dr. K. Humburg aus dem Jahre 1910 faßt die wesentlichen Momente, welche man bei der Aufstellung einer Theorie der Pendelerscheinungen berücksichtigen muß, zusammen. Die Ergebnisse der nachstehenden Abhandlung lassen sich mit denen von Humburg zur Deckung bringen, wenn man dieselben Vernachlässigungen wie Humburg einführt.

Die beiden charakteristischen Formen, in denen bei einem Wendepolmotor die Penpelerscheinungen auftreten, zeigen die Bild 1 u. 2, auf denen Oszillogramme der Tourenzahl und des Ankerstromes wiedergegeben sind.



Das Pendeln wird ausgelöst durch Störung des Gleichgewichtszustandes, d. i. durch Schwanken der Belastung, der Nebenschlußstromstärke oder der Klemmenspannung.

Wenn der Motor vollkommen frei von jeder Pendelneigung ist, muß der Übergang in einen neuen Betriebszustand aperiodisch erfolgen; das würde heißen, daß der Strom bei einer Belastungsvermehrung nicht über seinen Endwert hinaus ansteigen darf. Man kann daher mit einem gut gedämpften Amperemeter feststellen, ob der Motor Pendelneigung besitzt oder nicht.

Die Schwebungen in der Ankerstromstärke und Tourenzahl treten bei dem pendelnden Motor sehr augenfällig in die Erscheinung; aber auch die Nebenschlußstromstärke weist nicht zu vernachlässigende Schwebungen auf, die weit größer sind, als daß sie sich durch die Schwankungen der Klemmenspannung erklären ließen, die beim Pendeln durch den Ohmschen Spannungsabfall in der Zuleitung von der Stromquelle bis zu den Motorklemmen entstehen können. Die Stromschwebungen im Nebenschlußkreise haben ihre Ursache in der Rückwirkung des Ankers. Der pulsierende Ankerstrom erzeugt ein pulsierendes Rückwirkungsfeld, und dieses induziert in der Nebenschlußwicklung recht beträchtliche Spannungen. Die dem Gleichstrom in der Nebenschlußwicklung übergelagerten Wechselströme haben naturgemäß eine Phasenverschiebung gegen ihre erzeugende E. M. K., und aus diesem Grunde werden beim pendelnden Motor vollkommen andere Beziehungen zwischen der Ankerstromstärke und dem nutzbaren Kraftfluß als bei dem stabil laufenden Motor zu erwarten sein.

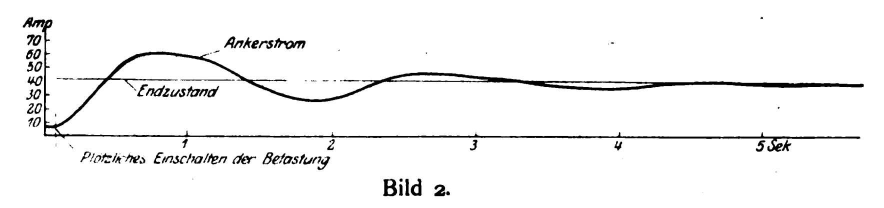


Bild 2.

Deswegen ist es auch unmöglich, aus der Belastungscharakteristik des stabil laufenden Motors allein die Bedingungen für den Eintritt des Pendelns abzuleiten. Klarheit hierüber gibt die nachstehende mathematische Untersuchung des Pendelvorganges.

Die Rückwirkung des Ankerstromes auf das Hauptfeld kann erzeugt werden:

1. durch eine Verschiebung der Bürsten aus der neutralen Zone,
2. durch eine Hauptstromwicklung auf den Hauptpolen,
3. durch die Kurzschlußströme in den kommutierenden Spulen, und
4. durch die Verschlechterung der Permeabilität, welche infolge der Überlagerung des Ankerquerfeldes eintritt.

Für die Pendelneigung des Motors ist es nicht wesentlich, welcher von den erwähnten 4 Faktoren bei der Rückwirkung auf das Feld mitwirkt.

Die nachstehenden Ableitungen sollen sich nur auf Wendepolmotoren beschränken, welche keine Hauptstromwicklung auf den Hauptpolen besitzen, und deren Bürsten in der neutralen Zone stehen, so daß also die Rückwirkung des Ankers nur von den Strömen in den kurzgeschlossenen Spulen und von der Verschlechterung der Permeabilität herrühren kann. Um den Zusammenhang nicht zu stören, ist im Anhang dargetan, in welcher Weise sich die magnetische Wirkung der kurzgeschlossenen Spulen äußert, und wie der gesamten Ankerrückwirkung ein mathematischer Ausdruck gegeben werden kann.

In erster Annäherung kann das Rückwirkungsfeld als proportional mit dem Ankerstrom gesetzt werden. Es ist dies besonders dann zulässig, wenn es sich um sehr geringe Zustandsänderungen des Motors handelt.

2. Mathematische Behandlung des Pendelvorganges.

Für einen beliebigen Betriebszustand eines Nebenschlußmotors gelten folgende Gleichungen:

$$E = J w + n \varkappa \Phi. \tag{1}$$

$$\varkappa \Phi J = D = c_3' + n c_3 + c_4 \frac{dn}{dt}, \tag{2}$$

$$\Phi = \Phi_r + c_1 i - a J. \tag{3}$$

$$E = J w_z + i w_n + L \frac{di}{dt} + z \frac{d\Phi}{dt}. \tag{4}$$

Hierin bedeuten:

- E die E. M. K. der Batterie bzw. des Netzes, an das der Motor angeschaltet ist,
- J den Ankerstrom,
- w den gesamten Widerstand des Hauptstromkreises (einschl. Zuleitungswiderstand und innerem Widerstand der Batterie),
- n die Tourenzahl des Motors (pro Minute),
- $\varkappa$ eine Maschinenkonstante,
- Φ den nutzbaren Kraftfluß in abs. Einh., x 10^{-8},
- c_3' und c_3 die Belastungsziffern des Ankers, welche dadurch definiert sein sollen, daß der Ausdruck $n c_3' + n^2 c_3$ die gesamte auf den Anker übertragene Leistung in Watt darstellt,
- D das Drehmoment des Ankers in $\frac{\text{Wattminuten}}{\text{Umdrehung}}$,
- c_4 das polare Trägheitsmoment der rotierenden Massen. (Die Dimension von c_4 ist nicht die in der Mechanik gebräuchliche; es soll c_4 vielmehr dadurch definiert sein, daß $\frac{n^2}{2} c_4$ die in dem Anker aufgespeicherte, lebendige Kraft in Wattsekunden darstellt,
- Φ_r den remanenten Kraftfluß,
- i den Nebenschlußstrom,
- c_1 Feldkonstante (vgl. Anhang)[1]),
- a Rückwirkungskonstante (vgl. Anhang)[1]),
- w_z den Widerstand der Zuleitungen bis zu den Netzklemmen einschl. des inneren Batteriewiderstandes,
- w_n den Nebenschlußwiderstand,
- $L \frac{di}{dt}$ die Spannung, welche durch die Änderung des Streufeldes in der Nebenschlußwicklung induziert wird. (Unter dem Streufeld sind diejenigen Kraftlinien verstanden, welche nicht mit den Ankerwindungen verschlungen sind. Das Streufeld ist als proportional mit der Nebenschlußstromstärke angenommen.)
- z die Gesamtzahl der in Serie geschalteten Windungen auf den Schenkeln der Maschine,
- $z \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ die Spannung, die durch die Änderung des nutzbaren Kraftflusses in der Nebenschlußwicklung induziert wird.

[1]) Obwohl die Werte von c_1 und a für verschiedene Betriebszustände des Motors nicht konstant sind, ist doch die Bezeichnung Feldkonstante und Rückwirkungskonstante gewählt worden, weil c_1 und a als unveränderlich bei geringen Zustandsänderungen vorausgesetzt sind.



Streng genommen tritt in der Gleichung (1) noch ein Glied von der Form $L_a \cdot \frac{dJ}{dt}$ auf, welches die Spannung darstellt, die durch die Stromänderung in der Selbstinduktion (L_a) des Hauptstromkreises entsteht. Es kann dieses Glied jedoch ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden, weil L_a einen sehr kleinen Wert besitzt.

Die exakte Darstellung würde ferner in der Gleichung (3) noch ein Glied von der Form $c \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ fordern, denn die Feldänderung muß in den kurzgeschlossenen Spulen eine mit $\frac{d\Phi}{dt}$ proportionale E. M. K. erzeugen. Die durch diese E. M. K. hervorgerufenen zusätzlichen Ströme wirken naturgemäß auf den nutzbaren Kraftfluß zurück. Ihr Einfluß wäre annäherungsweise proportional mit $\frac{d\Phi}{dt}$ anzunehmen. Die Größe dieses Gliedes ist gleichfalls sehr gering, so daß es unberücksichtigt bleiben kann.

Jede der vier Gleichungen (1—4) läßt sich in einen konstanten und in einen variablen Teil zerlegen, wenn man die folgende Substitution einführt:

$$J = J_0 + J_1$$
$$n = n_0 + n_1$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$
$$i = i_0 + i_1$$

worin der Index 0 für den konstanten und der Index 1 für den variablen Teil gelten soll.

An die Stelle der ursprünglichen Gleichungen (1—4) treten jetzt zwei Serien:

	A		B
1 a)	$E = J_0 w + n_0 \varkappa \Phi_0$	1 b)	$0 = J_1 w + n_1 \varkappa \Phi_0 + n_0 \varkappa \Phi_1$
2 a)	$\varkappa \Phi_0 J_0 = D_0 = c_3' + n_0 c_3$	2 b)	$\varkappa \Phi_1 J_0 + \varkappa \Phi_0 J_1 = D_1 = n_1 c_3 + c_4 \frac{dn_1}{dt}$
3 a)	$\Phi_0 = \Phi_r + c_1 i_0 - a J_0$	3 b)	$\Phi_1 = c_1 i_1 - a' J_1$[1])
4 a)	$E = J_0 w_z + i_0 w_n$	4 b)	$0 = J_1 w_z + i_1 w_n + z \frac{d\Phi_1}{dt} + L \frac{di_1}{dt}$.

Durch eine Regulierung irgendwelcher Art wird der Motor in seinem stabilen Lauf gestört. Für den neuen Gleichgewichtszustand, dem der Motor zustrebt, gilt die Gleichungsserie A, während die Serie B die Abweichungen des Motors von diesem Gleichgewichtszustande beherrscht. Die Werte der Variablen J_1, n_1, Φ_1 und i_1 zur Zeit $t = 0$ bedeuten demnach, abgesehen vom Vorzeichen, die durch die Regulierung bewirkte Änderung von J, n, Φ und i. In der Serie B sind die Glieder fortgelassen, welche die Produkte der Variablen enthalten. Diese Vereinfachung ist notwendig, weil man sonst sehr schwer lösbare Gleichungen erhält. Streng richtige Werte liefert dieses Verfahren nur dort, wo es sich um sehr kleine Abweichungen handelt.

Aus der Serie B kann durch Eliminationen nnd Substitutionen für jede Unbekannte eine Differentialgleichung von der gleichen Form entwickelt werden. Für n_1 erhält man die Form:

$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} + \sigma \frac{dn_1}{dt} + \tau n_1 = 0 \qquad (5)$$

und die Koeffizienten σ und τ errechnen sich zu:

[1]) Über die Einführung des Koeffizienten a′ an Stelle von a vgl. Anhang.

$$\sigma = \frac{D_0}{n_0 c_4} \cdot \frac{e^{\frac{1}{T_n - p t_n}}}{T_n - p t_n} + \frac{c_3}{c_4} + \frac{e - \varphi - e_1 \varphi_1}{e (T_n - p t_n)} \tag{6}$$

$$\tau = \frac{1}{c_4} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{T_n - p t_n} \cdot \frac{D_0 (1 - \varphi - e_1 \varphi_1) + n_0 c_3 (e - \varphi - e_1 \varphi_1)}{n_0} \tag{7}$$

Hier bedeutet:

$\varphi_1 = \frac{c_1 i_0}{\Phi_0}$ das Verhältnis des vom Nebenschlußstrom herrührenden Feldes zum Gesamtfeld;

$D_0 = \varkappa \Phi_0 J_0$ das Drehmoment;

$e = \frac{J_0 w}{n_0 \varkappa \Phi_0}$ das Verhältnis des Ohmschen Spannungsverlustes zur elektromotorischen Gegenkraft des Ankers;

$p = \frac{a' \varkappa n_0 J_0}{J_0 w}$; $a' \varkappa n_0 J_0$ ist der Teil der elektromotorischen Gegenkraft des Ankers, der dem Rückwirkungsfelde $a' J_0$ entspricht;

$T_n = \frac{L + c_1 z}{w_n}$ eine Zeitkonstante der Nebenschlußwicklung;

T_n ist diejenige Zeit, in welcher die Erregerspannung $E - J_0 w_z$ den Strom $i = \frac{E - J_0 w_z}{w_n}$ erzeugen könnte, wenn die Erregerspannung nur die durch das Anwachsen des Streufeldes und des nutzbaren Kraftflusses erzeugte Gegenspannung zu überwinden hätte und nicht auch den Ohmschen Spannungsverlust;

$t_n = \frac{L}{w_n}$ eine zweite Zeitkonstante der Nebenschlußwicklung;

t_n ist diejenige Zeit, in welcher der Erregerstrom den Wert $i = \frac{E - J_0 w_z}{w_n}$ erreichen würde, wenn nur die Gegenspannung des anwachsenden Streufeldes vorhanden wäre;

$\varphi = \frac{a' J_0}{\Phi_0}$ das Verhältnis des Rückwirkungsfeldes zum Gesamtfeld;

$e_1 = \frac{J_0 w_z}{i_0 w_n}$ das Verhältnis des Spannungsverlustes in den Zuleitungen zur Klemmenspannung des Motors.

Die Gleichung (5) stellt in allgemeinster Form die Abhängigkeit der Tourenzahl n_1 von der Zeit dar.

Substituiert man

$$n_1 = n_1' \cdot \varepsilon^x$$

so erhält man aus der Gleichung (5)

$$x = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau} \tag{8}$$

Für n_1 ergibt sich dadurch folgende Form:

$$n_1 = A_1 \varepsilon^{\left[-\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}\right] t} + A_2 \varepsilon^{\left[-\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}\right] t} \tag{9}$$

Die Integrationskonstanten A_1 und A_2 entwickelt man aus den Anfangsbedingungen. Wird z. B. die Zustandsänderung durch eine Regulierung im Nebenschluß veranlaßt, so ist zur Zeit $t = 0$

$$n_1 = n_1'$$

und



$$\frac{dn_1}{dt} = o$$

zu setzen.

Aus Gleichung (9) erhält man daher

$$n_1' = A_1 + A_2. \tag{10}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = o = A_1\left(-\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}\right) + A_2\left(-\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}\right) \tag{11}$$

und die beiden Integrationskonstanten ergeben sich als die folgenden Ausdrücke:

$$A_1 = n_1' \frac{\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}}{2\sqrt{\frac{\sigma^2}{2} - \tau}}. \tag{12}$$

$$A_2 = n_1' \frac{-\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}}{2\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}}. \tag{13}$$

Diese Lösung für Gleichung (5) gilt nur so lange, als die Wurzelgröße $\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}$ reelle Werte besitzt, d. h. so lange $\frac{\sigma^2}{4} > \tau$ ist. Der Motor geht aperiodisch von seinem alten Betriebszustand in den neuen über.

Für positive Werte von σ und τ erreicht die Tourenzahl den Endwert, der dem Belastungszustand des Motors und der Drehmomentenkurve $D = f(n)$ entspricht. Wird dagegen einer der beiden Koeffizienten negativ, so nimmt mindestens einer der beiden Exponenten von ε einen positiven Wert an. Für die Tourenzahl n_1 bedeutet dies ein Anwachsen bis zu unendlicher Größe.

Es wäre übereilt, hier im allgemeinen von einem „Durchgehen" des Motors zu sprechen, denn die unbegrenzte Zunahme von n_1 kann sowohl nach der positiven als auch nach der negativen Seite hin erfolgen, je nach dem Vorzeichen, welches den Integrationskonstanten zuzuordnen ist.

Der Wert von A_1 und A_2 ist stets mit der Regulierstufe proportional und die Vorzeichen hängen von der Richtung ab, in welcher die Regulierung vorgenommen wird. Demnach strebt die Tourenzahl n_1 entweder einem positiven oder einem negativen unendlich großen Werte zu, je nach der Richtung, in welcher der Anstoß erfolgt.

Für einen solchen Zustand wendet man allgemein den Ausdruck „labil" an.

Da n_1 der unveränderlichen Tourenzahl n_0 übergelagert ist, nimmt die Gesamttourenzahl $n = n_0 + n_1$ hiernach zugleich mit n_1 positive unendlich große Werte an; es entspricht dies dem „Durchgehen" des Motors. Dagegen muß die Tourenzahl n, wenn n_1 dem Werte $-\infty$ zustrebt, zunächst von einer positiven endlichen Größe auf Null zurücksinken. Ein Anwachsen über Null hinaus nach der negativen Seite hin ist in den meisten Fällen unmöglich, weil das belastende Drehmoment gewöhnlich nur ein Reaktionsmoment ist, d. h. ein Drehmoment, welches dem laufenden Motor wohl einen Widerstand entgegensetzen, jedoch auf den stillstehenden Anker keinen Antrieb äußern kann. Das Anwachsen von n nach $-\infty$ hin entspricht also in den meisten Fällen der Festbremsung des Motors.

Nimmt die Wurzelgröße $\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \tau}$ imaginäre Werte an, so erhält man mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen für Gleichung (5) die Lösung:



$$n_1 = e^{-\frac{\sigma}{2}t}\left[B_1 \cos\left(\sqrt{\tau - \frac{\sigma^2}{4}}\right)t + B_2 \sin\left(\sqrt{\tau - \frac{\sigma^2}{4}}\right)t\right]. \qquad (14)$$

Der Verlauf von n_1 hat jetzt periodischen Charakter angenommen, d. h. beim Übergang des Motors von seinem alten Betriebszustand in den neuen treten Schwingungen auf.

Die Schwingungsdauer ist durch die Beziehung

$$2\pi = T \cdot \sqrt{\tau - \frac{\sigma^2}{4}}$$

gegeben.

So lange σ positive Werte besitzt, ist die Schwingung gedämpft.

Ist $\sigma = 0$, so tritt eine ungedämpfte Schwingung, d. i. eine Schwingung von konstanter Amplitude auf.

Hat σ negative Werte, so wächst die Amplitude der Schwingung allmählich (theoretisch unbegrenzt) an.

Die Bedingung dafür, daß gedämpfte Schwingungen auftreten, lautet also

$$\sigma = 0.$$

In sehr anschaulicher Weise gibt Bild 3 eine Übersicht über die Pendeleigenschaften in Abhängigkeit von σ und τ.

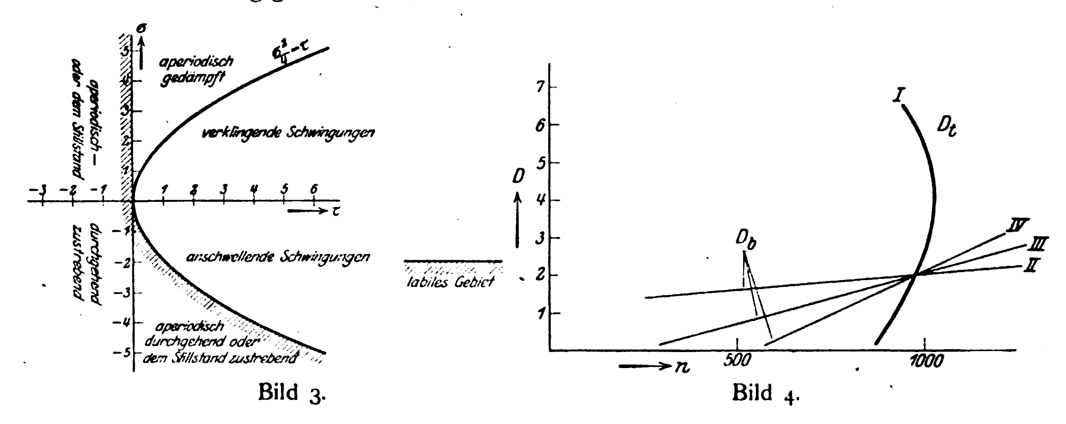


Bild 3. Bild 4.

Nur für Werte innerhalb der Parabel $\frac{\sigma^2}{4} = \tau$ sind Schwingungen möglich. Diese sind je nach dem Vorzeichen von σ verklingende oder anschwellende.

Für die Werte, welche außerhalb der Parabel liegen, erfolgt jede Zustandsänderung aperiodisch, und zwar ist der Übergang gedämpft, so lange σ positiv ist. In jedem anderen Falle befindet sich der Motor im labilen Zustande.

3. Der Einfluß der Belastungsart auf die Pendelgrenzen.

Die Pendeleigenschaften eines Motors hängen nicht allein von den einzelnen Motorkonstanten ab, sondern auch von der Art der Belastung. Derselbe Motor kann bei demselben Drehmoment und derselben Erregung, aber bei anderer Belastungsart, vollkommen andere Pendeleigenschaften zeigen.

Das Drehmoment des Ankers, welches durch das nutzbare Kraftfeld und durch den Ankerstrom erzeugt wird, heiße im folgenden das „treibende Drehmoment“ und werde mit $D_t = \varkappa \Phi J$ bezeichnet. So lange der Motor stabil läuft, ist das treibende Drehmoment dem „belasteten Drehmoment“ (D_b) gleich. Dieses ist oben durch den Ausdruck $D_b = c_3' + n\, c_3$ dargestellt worden, und gilt auch mit Annäherung für beliebig gekrümmte Drehmomentkuren, wenn unter c_3 der Tangens des Tangentenwinkels an dem betrachteten Punkt dieser Kurve verstanden wird.

Die Linie I des Bildes 4 zeigt D_t als Funktion von n für einen Motor, an welchem die theoretischeu Ergebnisse experimentell nachgeprüft wurden. Wenn das belastende Drehmoment durch die Linie II gegeben ist, so entspricht der Schnittpunkt von I und II dem Betriebszustand des Motors. Es ist ohne weiteres klar, daß der Motor mit derselben Tourenzahl und mit demselben Drehmoment laufen würde, wenn das belastende Drehmoment durch die Linien III oder IV gegeben wäre.

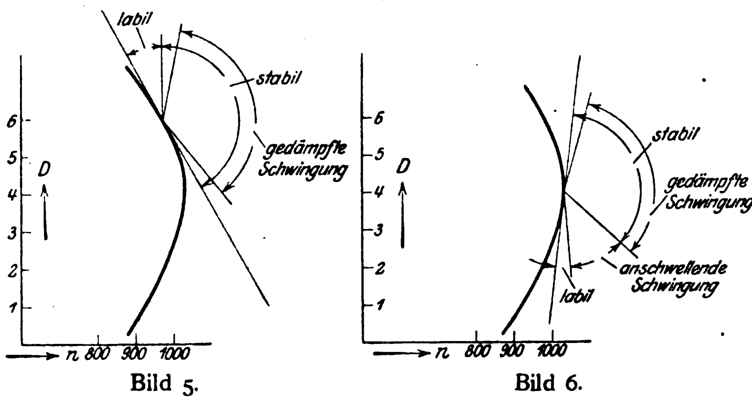


Bild 5. Bild 6.

Die Werte σ und τ lassen sich aus den Motorkonstanten für verschiedene Werte von c_3 berechnen. Für jeden beliebigen Belastungsfall kann man dann den Bildern 5 und 6 entsprechende Schaubilder entwerfen. Die gekrümmte Linie ist die Kurve des treibenden Drehmoments (vgl. Bild 4). Je nach dem Winkel, unter dem diese Kurve in dem Betriebspunkt von der Linie für das belastende Drehmoment geschnitten wird, d. h. je nach dem Werte von c_3 stellen sich andere Pendeleigenschaften ein. Die einzelnen Bereiche sind in den Bildern eingetragen.

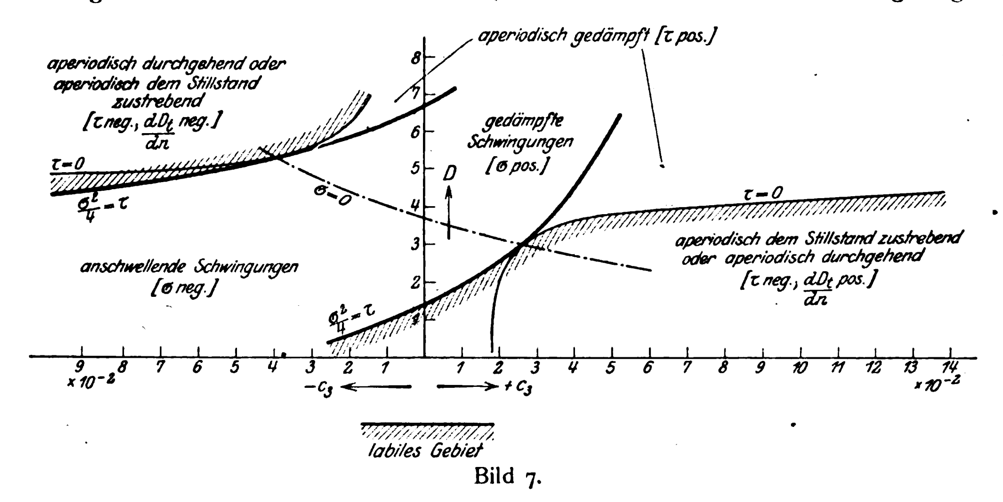


Bild 7.

Die Pendeleigenschaften lassen sich ferner für alle Drehmomente (bei demselben Erregerstrom) in einem Schaubild darstellen.

Der Wert $\tau = 0$ wird stets dann erreicht, wenn das belastende Drehmoment die Kurve des treibenden Momentes tangiert. Für die Linie $\tau = 0$ wird daher $c_3 = \frac{d D_t}{d n}$.

Man sieht aus dem Bild 7, daß bei positiven Werten von σ durch Vergrößerung von c_3, also durch eine steiler verlaufende Belastungskurve, eine Verminderung

der Pendelgefahr herbeigeführt wird, wenn man zunächst nur positive Werte von c_3 in Betracht zieht. Die Vergrößerung darf jedoch nicht soweit gehen, daß das belastende Drehmoment Tangente an die Kurve des treibenden Drehmomentes wird, denn dann wird $\tau = 0$ und der Motorzustand labil.

Wenn c_3 negativ ist, gelangt man durch Vergrößern von $-c_3$ allerdings auch aus dem Bereich der jetzt anschwellenden Schwingungen hinaus, gerät dafür aber wieder in ein Gebiet, in welchem der Motor labil ist.

Wie am Anfang erwähnt wurde, ist man früher durch die Erfahrung zu dem Schluß gekommen, daß die Tourensteigerung des Motors bei Belastungsvermehrung in ursächlichem Zusammenhange mit dem Eintritt des Pendelns stehe. Nach den Kurven des Bildes 7 ist dies aber keineswegs der Fall.

$\frac{d D_t}{d n}$ wird für Werte von D_t, die größer als etwa 4,5 sind, negativ (vgl. Bild 4), d. h. die Tourenzahl fällt bei Belastungsmehrung. Trotzdem ist bei positiven Werten von c_3 eine gedämpfte Schwingung möglich. Da man aber weit von der Linie $\sigma = 0$ entfernt ist, ist die Dämpfung eine so starke, daß das Auftreten der Schwingung kaum noch konstatiert werden kann. Erst bei negativen Werten von c_3 gelangt man in das Gebiet, in dem anschwellende Schwingungen auftreten können, oder in dem der Motor labil ist.

Die Einführung negativer Werte von c_3 ist nicht etwa nur eine mathematische Spekulation. Obwohl in der Praxis selten andere als positive Werte von c_3 vorkommen werden, läßt sich der Fall $c_3 < 0$, d. h. also eine Belastungsart, bei der der Motor mit ansteigender Tourenzahl entlastet wird, sehr wohl verwirklichen. Man hat nur nötig, den Motor mit einer fremderregten Dynamomaschine zu kuppeln und die Dynamo außerdem durch eine mitgekuppelte Erregermaschine entgegengesetzt zu erregen. Wenn man die Erregungen entsprechend einstellt, kann man leicht eine Entlastung des Motors bei zunehmender Tourenzahl erreichen.

4. Der Einfluß der Nebenschlußwicklung.

Die Tatsache, daß beim Pendeln andere Beziehungen zwischen dem treibenden Drehmoment und der Tourenzahl als beim stabilen Lauf eintreten, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Wäre diese Abweichung nicht vorhanden, so könnte man wohl begreifen, daß der Motor bei einer bestimmten Belastungsart und -größe durchgeht, jedoch wäre es unerklärlich, durch welche Einflüsse der Anker zu einer pendelnden Bewegung gezwungen wird.

Man hat früher Verschiedenes als Erklärungen herbeigezogen; u. a. sollte die mit steigender Stromstärke stark zunehmende Streuung und Sättigung der Wendepole und als direkte Folge davon die relativ geringere Rückwirkung der kurzgeschlossenen Spulen die Ursache für den Eintritt der Pendelbewegung sein[1]).

Ein solcher Einfluß kann sich nur in der Richtung äußern, daß die Belastungscharakteristik bei steigender Stromstärke in einer für den stabilen Gang günstigen Weise abgekrümmt wird, so daß entweder die Pendelgefahr bei höheren Stromstärken geringer wird, oder die Amplitude der Schwingungen verkleinert wird. Niemals kann jedoch dadurch ein unmittelbarer Anlaß zum Pendeln gegeben sein.

Unbedingt notwendig dagegen ist für das Zustandekommen einer Schwingung die Eigenschaft des Motors, daß zwischen seinem treibenden Drehmoment und seiner Tourenzahl auch andere Beziehungen bestehen können, als sie durch die stabile Belastungscharakteristik dargestellt werden.

Wie sehr die Kurve des treibenden Drehmomentes während eines Reguliervorganges

[1]) E.T.Z. 1906. S. 715, E. Arnold.
„ „ S. 1009, R. Pohl.
The Electrician 1911. S. 670, Dr. Rosenberg.



von der für den stabilen Lauf gültigen abweicht, zeigen die nachstehenden Bilder, die für einen bestimmten Motor berechnet wurden, dessen Drehmomentenkurve im Bild 4 dargestellt ist. In diesen Bildern bedeutet:

die Linie I die Tangente an der Kurve D_t für den stabilen Lauf,
" " II " Drehmomentenkurve D_b nach dem Regulieren,
" " III " " D_b vor " ",
" " IV " " D_t für die Zeit des Überganges zum neuen Betriebszustand.

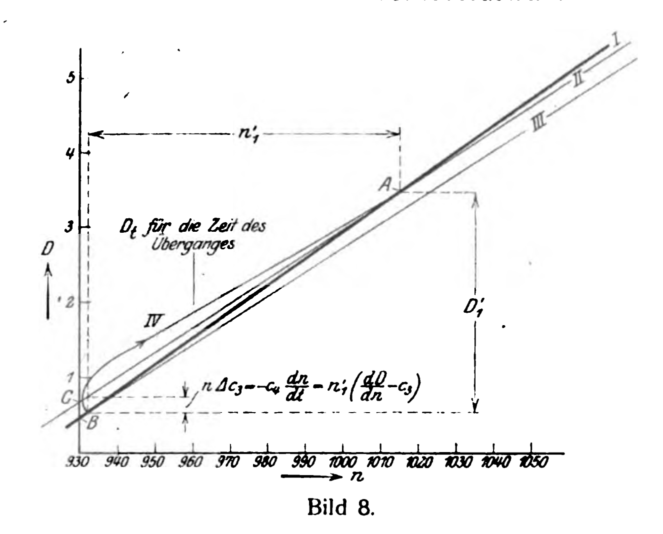


Bild 8.

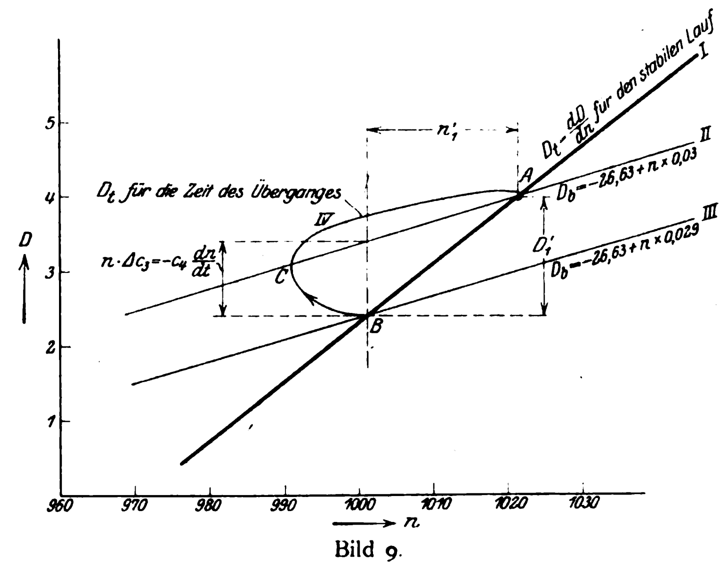


Bild 9.

Durch die plötzliche Vergrößerung von c_3 muß die Tourenzahl (vgl. Bild 8), da sich das treibende Drehmoment nicht sprungweise ändern kann, zunächst sinken, während das Drehmoment steigt. Bei dem Punkte C, dem Schnittpunkt mit dem belasteten Drehmoment, hat die Tourenzahl ihren kleinsten Wert erreicht, denn der Unterschied zwischen dem belastenden und dem treibenden Drehmoment ist o geworden. Der Motor kann an diesem Punkte jedoch nicht zur Ruhe kommen, denn seinem Drehmoment entspricht ein stabiler Lauf bei höherer Tourenzahl. Infolgedessen wird vom Punkte C ab die Tourenzahl wieder zunehmen. Theoretisch wird die

stabile Lage bei A erst nach unendlich großer Zeit erreicht. In der Wirklichkeit sind Abweichungen nach wenigen Sekunden verschwindend klein geworden.

Bild 9 zeigt die Übergangskurve beim Auftreten einer gedämpften Schwingung. Der stabile Endwert bei A wird spiralenförmig umkreist und praktisch nach wenigen Sekunden erreicht.

Bei dem im Bilde 10 dargestellten Fall tritt bei der Belastungsregulierung eine anschwellende Schwingung auf. Der theoretische Endzustand A wird ebenfalls spiralenförmig, jedoch mit ständig anwachsenden Radiusvektor umkreist.

Das Bild 11 gilt für eine ungedämpfte Schwingung. Die Drehmomentenkurve ist jetzt eine Ellipse, deren Mittelpunkt der theoretischen Ruhelage entspricht. Während einer halben Periode (C E D) ist das treibende Drehmoment stets größer als das belastende. Die Folge dieses Überschusses ist eine Beschleunigung des Ankers. Bei C muß die Tourenzahl ihren kleinsten Wert und bei D den größten haben. Während der anderen Hälfte der Schwingungsdauer (D B C) sinkt die

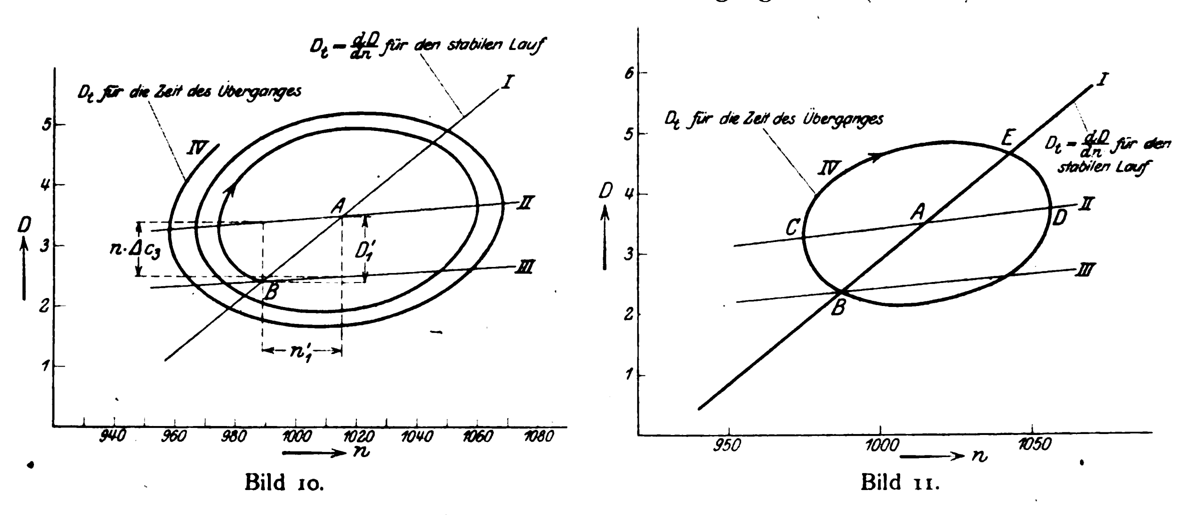


Bild 10. Bild 11.

Umlaufszahl des Ankers wieder, denn das treibende Moment ist kleiner als das belastende.

Die Vieldeutigkeit der Beziehung zwischen D_t und n findet man bei fast allen Motoren in mehr oder weniger deutlich ausgeprägtem Maße. Sie fehlt jedoch bei Motoren, deren Gesamtfeld vom Ankerstrom vollkommen unbeeinflußt bleibt, und außerdem bei Motoren, bei denen das Rückwirkungsfeld in der Nebenschlußwicklung keine Spannung induzieren kann. Ein Idealmotor hierfür wäre der (allerdings schon längst nicht mehr gebaute) Motor, dessen Feld von permanenten Magneten herrührt.

Eine Abweichung des treibenden Drehmomentes von der Kurve der stabilen Belastungscharakteristik ist in diesen beiden Fällen unmöglich. Infolgedessen kann auch bei diesen Motoren eine Pendelbewegung niemals auftreten, denn die zugeführte Energie reicht gerade dazu aus, die Arbeit, die dem belastenden Drehmoment entspricht, zu decken, geschweige denn den Anker zu beschleunigen.

Bei allen anderen Motoren ist die fundamentale Voraussetzung für die Möglichkeit von Pendelbewegungen erfüllt. Daß das treibende Drehmoment und die Tourenzahl bei konstantem Nebenschlußwiderstand auch anders zusammenhängen können als durch die stabile Belastungscharakteristik, folgt ohne gedankliche Schwierigkeit aus der Erkenntnis, daß die Feldschwankungen in der Nebenschlußwicklung zusätzliche Ströme erzeugen.



5. Der stationäre Pendelzustand.

Eine ungedämpfte Schwingung tritt auf, sobald σ den Wert 0 annimmt. Die Gleichung (14) geht dadurch in die Form

$$n_1 = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{15}$$

über. Hierbei hat ω den Wert $\sqrt{\tau}$ und die Dauer einer vollen Schwingung ergibt sich zu $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\tau}}$. Die Integrationskonstanten B_1 und B_2 erhält man aus den Anfangsbedingungen. Diese sind verschieden, je nach der Regulierungsart. Nimmt man eine Regulierung der Nebenschlußstromstärke vor, so ist z. Z. $t = 0$

$$n_1 = n_1'$$

und

$$\frac{d n_1}{dt} = 0.$$

Es werden daher $B_1 = n_1'$ und $B_2 = 0$ und man erhält

$$n_1 = n_1' \cdot \cos \omega t \tag{16}$$

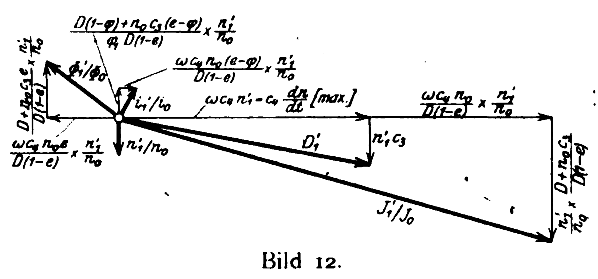


Bild 12.

Für die drei anderen Variablen Φ_1, J_1 und i_1 existieren Gleichungen, die in der Form mit Gleichung (15) übereinstimmen. Natürlich haben die Integrationskonstanten andere Werte, die man von den Gleichungen (1b—4b) ausgehend besonders bestimmen kann. Es ergibt sich schließlich:

$$\Phi_1 = n_1' \frac{\Phi_0}{n_0} \frac{1}{D_0 (1-e)} \left[- [D_0 + n_0 c_3 e] \cos \omega t + \omega c_4 n_0 e \sin \omega t \right]. \tag{17}$$

$$J_1 = n_1' \frac{J_0}{n_0} \frac{1}{D_0 (1-e)} \left[- [D_0 + n_0 c_3] \cos \omega t - \omega c_4 n_0 \sin \omega t \right]. \tag{18}$$

$$i_1 = n_1' \cdot \frac{i_0}{n_0} \frac{1}{D_0 (1-e) \varphi_1} \left[- [D_0 (1-\varphi) + n_0 c_3 (e-\varphi)] \cos \omega t + \omega c_4 n_0 (e-\varphi) \sin \omega t \right]. \tag{19}$$

Nimmt man an Stelle der Nebenschlußregulierung eine Belastungsänderung vor, so erhält man für n_1, Φ_1, J_1 und i_1 andere Integrationskonstanten, weil die Anfangsbedingungen andere sind. Eine Änderung in dem Schwingungsvorgang an sich gegenüber dem durch die Nebenschlußregulierung ausgelösten tritt jedoch nicht ein. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß die Schwingung mit einem anderen Momentanwert beginnt.

Aus dem Bild 12, das allerdings nur für einen bestimmten Betriebszustand des bereits mehrfach erwähnten Versuchsmotors gilt, kann man die Relativwerte der schwingenden Größen entnehmen und erkennen, daß sie erhebliche Phasenunterschiede zueinander besitzen. Der Maßstab für die Verhältniszahlen ist: 1 = 50 mm.

Während man sich bei vielen allgemein bekannten Schwingungen ein unmittelbares Verständnis für die Möglichkeit einer Schwingung erworben hat, stellen sich beim Pendelvorgang dem unmittelbaren Verstehen einige gedankliche Schwierigkeiten entgegen. Bei den Schwingungen einer Feder, eines Pendels, eines elektromagnetischen Kreises u. a. m. weiß man, daß hier die Schwingung den Austausch

eines bestimmten Energiebetrages zwischen zwei verschiedenen Energieformen bedeutet. Die Energie geht aus der potentiellen Form in die kinetische über, oder aus der elektrostatischen in die magnetische u. s. f. Abgesehen davon, daß die Erscheinung beim Pendelvorgang weniger durchsichtig ist, weil sie einem mittleren stabilen Betriebszustand übergelagert ist, treten noch deshalb Schwierigkeiten hinzu, weil der Energieaustausch nicht zwischen 2, sondern 3 Energieformen stattfindet. Diese 3 Formen sind: Die elektrostatische des Netzes, die magnetische des Motorfeldes und die kinetische des Motorankers, einschließlich der mit dem Anker gekuppelten rotierenden Massen. Es ist nicht schwer, rechnerisch nachzuweisen, daß sich der Energieaustausch in der Hauptsache gleichzeitig in zwei Richtungen vollzieht, erstens zwischen dem Netz und der lebendigen Kraft des Ankers und zweitens zwischen dem Netz und dem magnetischen Feld. Es kann auch vorkommen, daß sich außerdem noch ein geringer Energiebetrag nebenher zwischen der lebendigen Kraft des Ankers und dem magnetischen Feld direkt ausgleicht.

Man darf sich also beim Pendelvorgang nicht vorstellen, daß die Erscheinung lediglich von einem Austausch zwischen zwei Energieformen innerhalb des Motors begleitet wird.

6. Das Auftreten ungedämpfter Schwingungen.

Wenn man den Einfluß der verschiedenen Motorgrößen auf die Pendeleigenschaften erörtern will, muß man, um überhaupt eine Vergleichsbasis zu haben, alle Betrachtungen auf eine bestimmte Belastungsart beziehen.

Je kleiner der Wert von c_3 ist, um so mehr wird im allgemeinen der Motor zum Pendeln neigen. Man wählt den Wert $c_3 = 0$ als Vergleichsbasis, so hat man (unter Ausschluß der negativen Werte von c_3) die schärfsten Bedingungen an den Motor gestellt.

Der Eintritt des Pendelns erfolgt, wenn $\frac{\sigma^2}{4} - \tau = 0$ ist, und zwar ist die Schwingung ungedämpft, wenn $\sigma = 0$ wird.

Als Kriterium für die Brauchbarkeit darf man nicht die Beziehung $\frac{\sigma^2}{4} - \tau = 0$ ansehen. Es kommt ganz auf den Verwendungszweck des Motors an, ob man einen Motor als noch brauchbar bezeichnen kann. Vielfach wird es genügen, wenn die Amplitude der Schwingung nach 1—2 Perioden bis zu einem verschwindend kleinen Wert (etwa 5%) abgedämpft sind.

Im folgenden soll der Einfluß der Motorgrößen auf den Eintritt der ungedämpften Schwingung erörtert werden. Naturgemäß ist ein Motor, bei dem $\sigma = 0$ wird, für alle Verwendungszwecke unbrauchbar. Nach Gleichung (6) lautet die Bedingung, daß die Schwingungen gedämpft sind:

$$\sigma = \frac{D_0}{n_0 c_4} \frac{\frac{1}{e} T_n - p t_n}{T_n - p t_n} + \frac{c_3}{c_4} + \frac{e - \varphi - e_1 \varphi_1}{e(T_n - p t_n)} > 0.$$

Da der Wert von c_3 zu 0 angenommen wurde, schreibt sich diese Bedingung folgendermaßen:

$$\frac{D_0}{n_0 c_4} \left(\frac{1}{e} T_n - p t_n\right) + \frac{e - \varphi - e_1 \varphi_1}{e} > 0 \tag{20}$$

oder

$$\frac{D_0}{n_0 c_4} \left(T_n - \varphi t_n\right) + \frac{e - \varphi - e_1 \varphi_1}{e} > 0 \tag{21}$$

Wenn man den Zuleitungswiderstand w_z, was in den meisten Fällen zulässig ist, gegenüber dem Hauptstromwiderstand w vernachlässigen kann, verschwindet das Glied $e_1 \varphi_1$ gegenüber dem Werte von e. Ferner beträgt das Glied φt_n gewöhnlich nur wenige Prozent von T_n, so daß auch das Fortlassen dieses Gliedes keinen größeren Fehler verursacht.

Die obenstehende Bedingung erhält infolgedessen folgende einfachere Form:

$$\frac{D_0}{n_0 c_4} T_n > \varphi - e \qquad (22)$$

oder

$$\frac{\varkappa \Phi_0^2}{n_0 c_4} T_n + \frac{w}{n_0 \varkappa} > a'. \qquad (23)$$

Nach Gleichung (22) liegt also die Pendelgrenze um so näher, je größere Werte die Tourenzahl n_0, das Trägheitsmoment c_4 und die Differenz $\varphi - e$ annimmt, und je kleinere Werte das Drehmoment D_0 und die Zeitkonstante T_n besitzen.

Der Einfluß der Ankerstromstärke, der in Gleichung (23) nicht unmittelbar hervortritt, ist in dem Werte von a' enthalten; a' hängt im allgemeinen in komplizierter Weise von J ab. Manchmal steigen die Werte von a' mit zunehmenden Werten von J, um dann bei höheren Stromstärken wieder abzunehmen. Bisweilen aber hat auch die Kurve $a' = f(J)$ eine überall fallende Tendenz.

Es läßt sich daher auf die Frage, welche Änderungen in den Pendeleigenschaften durch eine Belastungsvermehrung eintreten, keine allgemein gültige Antwort geben. Wenn der Motor Tourenerhöhung besitzt, wird die Pendelgefahr meistens durch Belastungssteigerung vergrößert; sie kann aber auch vermindert werden, wenn a' stärker abnimmt, als die linke Seite der Gleichung (23). Besitzt der Motor Tourenabfall, so ist eine Verschlechterung der Pendeleigenschaften durch Belastungsvermehrung unmöglich[1]).

Der Einfluß, den eine Regulierung im Nebenschluß auf die Pendeleigenschaften ausübt, läßt sich folgendermaßen klarlegen:

Durch eine Feldschwächung werden die Werte von Φ_0 und T_n verkleinert, während n_0 wächst. Der Wert von a' wird bei schwächerem Feld ebenfalls größer, da wegen der geringeren Sättigung die gleichen Gegen-A. W. des Ankers ein relativ größeres Feld erzeugen können. Alle Größen ändern sich demnach derart, daß durch eine Feldschwächung unbedingt die Pendelgefahr erhöht wird.

Nach der Gleichung (23) wächst die Pendelgefahr auch dann, wenn man das polare Trägheitsmoment vergrößert, d. h., wenn man den Motor mit anderen Maschinen von größerem Schwungmoment kuppelt; denn c_4 bedeutet nicht das polare Trägheitsmoment des Antriebsmotors allein, sondern auch das sämtlicher vom Motor angetriebener rotierender Massen.

Die vorstehenden Betrachtungen bezogen sich auf ein und denselben Motor. Es ist aber auch von Interesse zu untersuchen, welche Unterschiede sich in den Pendeleigenschaften bei Motoren zeigen, die für verschiedene Tourenzahlen, Spannungen und Leistungen gebaut sind.

a) Vergleicht man Motoren miteinander, welche derselben Type angehören und die für dieselbe Spannung gebaut sind, deren Anker aber für verschiedene Tourenzahlen gewickelt sind, so findet man, daß bei dem schnellaufenden Motor die Pendelgefahr viel größer ist als bei dem langsamlaufenden. Da die Leistung als proportional mit der Tourenzahl anzusehen ist, bleibt D_0 von der Tourenzahl unabhängig.

Die linke Seite der Gleichung (22) ändert sich demnach umgekehrt proportional mit der Tourenzahl.

[1]) Nur gültig für $c_3 = 0$.

b) Motoren, welche bei gleicher Tourenzahl für verschiedene Spannungen gebaut sind, können nach Gleichung (23) in ihren Pendeleigenschaften keinen Unterschied zeigen; denn es ändert sich durch die Wahl einer anderen Spannung in dieser Gleichung nichts, vorausgesetzt, daß bei allen Motoren dieselbe Ankerrückwirkung vorhanden ist.

c) Um den Einfluß der Größe des Motors kennen zu lernen, muß man Motoren miteinander vergleichen, die für gleiche Tourenzahl und Spannung gebaut sind und die derselben Typenreihe angehören. Bildet man für eine solche Motorserie den Ausdruck $\frac{D_0 T_n}{n_0 c_4}$, so ergibt sich, daß der Wert mit steigender Leistung kleiner wird, d. h. die zulässige Differenz $\varphi - e$ wird kleiner. Mit anderen Worten heißt dies: Solange die Differenz $\varphi - e$ ihren Wert beibehält, befindet sich ein Motor der Pendelgrenze um so näher, je größer seine Leistung ist.

Als ein Faktor, der die Pendelgefahr erhöhen kann, kommt noch hinzu, daß gewöhnlich mit steigender Leistung der Wert von e sinkt.

7. Der Einfluß des Zuleitungswiderstandes.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß der Zuleitungswiderstand unter Umständen die direkte Veranlassung zum Auftreten von Schwingungen werden

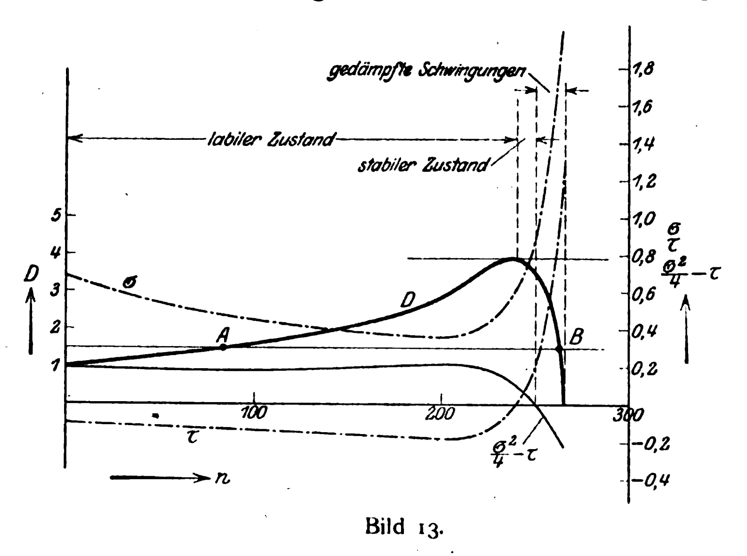


Bild 13.

kann, wenn er einen beträchtlichen Wert hat. Es wird dies verständlich, wenn man bedenkt, daß ein Steigen der Stromstärke ein Fallen der Erregerspannung, d. i. eine Abnahme der Feldstärke, mit sich bringt.

Im Gegensatz zu den Pendelbewegungen, die bei kleinem Zuleitungswiderstand gewöhnlich mit großer Lebhaftigkeit vor sich gehen, handelt es sich hier um eine sehr wenig hervortretende Erscheinung, über die meistens hinweggesehen wird und deren Existenz kaum in weiteren Kreisen bekannt sein dürfte. Obwohl diesen Schwingungen wenig praktische Bedeutung zukommt, sind die Betriebszustände an einem Motor mit großem Zuleitungswiderstand insofern interessant, als sich hier der Fall verwirklichen läßt, in welchem die Tourenzahl in der Richtung nach $-\infty$ bis zur Festbremsung abnimmt.

Im Bild 13 stellt die stark ausgezogene Linie das treibende Drehmoment D_t eines Motors mit großem Zuleitungswiderstand dar, dessen Rückwirkungskonstante a Null ist. Die im Bilde eingetragenen Bereiche für die Labilität und Stabilität des

Motors und der Schwingungsbereich gelten für horizontal verlaufende Drehmomentenkurven D_b ($c_3 = 0$).

Der labile Zustand beginnt dort, wo D_t ein Maximum besitzt. Es geht aus dem Bilde 13 ohne weiteres hervor, daß eine noch so geringe Störung, durch die eine kleine Tourenverminderung herbeigeführt wird, an diesem Punkte ein Herabsinken der Tourenzahl unmittelbar zur Folge hat: der Motor wird festgebremst.

Eine Zunahme der Tourenzahl nach der pos. Richtung hin, d. i. das Durchgehen des Motors, kann an diesem Punkte nicht eintreten, obwohl der Begriff der Labilität das Anwachsen nach beiden Richtungen hin als möglich in sich trägt Der Grund liegt darin, daß die erwähnte Labilitätsbedingung nur für eine geradlinig verlaufende Drehmomentenkurve (D_t) bzw. für die Tangente einer gekrümmten Kurve, abgeleitet ist.

Die Zone des labilen Zustandes reicht von $n = 0$ bis $n = 240$, und zwar besitzt der Motor hier an allen Punkten (mit Ausnahme von $n = 240$) die Eigenschaft, die Tourenzahl in der Richtung auf $+\infty$ oder $-\infty$ ändern zu können, je nach der Richtung, in der die Störung seines labilen Zustandes erfolgt. Läuft der Motor z. B. mit Tourenzahl und Drehmoment dem Punkt A entsprechend, so veranlaßt die geringste Entlastung ein Durchgehen. Wegen der eigentümlichen Form der Drehmomentenkurve erreicht jedoch das Anwachsen der Tourenzahl im Punkte B eine Grenze. Wird dagegen der Motor im Punkte A um ein Geringes mehr belastet, so fällt die Tourenzahl ab und der Motor wird festgebremst.

8. Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den tatsächlich auftretenden Erscheinungen.

Bei dem Vergleich der theoretisch abgeleiteten Ergebnisse mit der Wirklichkeit ist zu bedenken, daß eine völlige Übereinstimmung nicht erwartet werden darf. Die Theorie wurde nur für sehr kleine Schwingungen aufgestellt und die Größen L, c_1, w, c_3 und a wurden als ideale Konstanten vorausgesetzt; bei größeren Zustandsänderungen ist dies nicht mehr der Fall. Auch der Einfluß der Hysteresis macht sich bemerkbar; ein vorübergehender großer Belastungsstoß kann eine deutliche Änderung der Rückwirkungskonstanten und der Pendeleigenschaften herbeiführen.

Die Veränderlichkeit des Bürstenübergangswiderstandes kann ebenfalls störend wirken; da er einen großen Teil des Widerstandes der beim Kommutieren kurzgeschlossenen Spulen bildet, ändert sich mit dem Übergangswiderstand das Rückwirkungsfeld. Ein Abschmirgeln des Kollektors (Verringern des Übergangswiderstandes) verstärkt das Rückwirkungsfeld, und man kann Tourensteigerungen bis zu 3% beobachten. Deshalb können auch die Pendeleigenschaften vor und nach dem Abschmirgeln durchaus andere sein.

Die Schwingungen mit konstanter Amplitude, welche man beobachten kann, gehören fast ausschließlich in das Gebiet der anschwellenden Schwingungen; sie würden ständig weiter wachsen, wenn nicht die Inkonstanz der Motorkonstanten und außerdem die mit zunehmender Ankerstromstärke steigende Wendepolsättigung und -streuung die Amplitude begrenzen würde. Eine Schwingung von bestimmter Amplitude läßt sich daher auch nicht einstellen, weil man niemals den Wert $\sigma = 0$ genau treffen wird. Die im vorhergehenden aufgestellte Theorie läßt sich durch experimentelle Untersuchungen in allen wichtigen Punkten bestätigen. Aus den Werten von σ und τ kann man für verschiedene Betriebszustände den Charakter der zu erwartenden Schwingungen (gedämpft oder anschwellend) in guter Übereinstimmung mit den tatsächlich auftretenden Erscheinungen bestimmen. Desgleichen bestehen zwischen den berechneten und beobachteten Werten der Schwingungsdauer nur geringe Unterschiede. Bei 13 verschiedenen Betriebszuständen wurde der Fehler der errechneten Schwingungsdauer im Mittel zu 12% gefunden.



9. Mittel zur Verhütung des Pendelns.

Das Pendeln kann auf mehrfache Art unterdrückt werden:

a) Das Einschalten eines Ohmschen Widerstandes vor den Anker (nicht vor dem Motor) vergrößert den Wert e und wirkt stark dämpfend auf die Schwingungen. In dem Widerstand wird natürlich Energie vernichtet und die Wirtschaftlichkeit des Motors wird dadurch schlechter.

b) Bürsten mit hohem Übergangswiderstand wirken ähnlich; außerdem verringern sich durch solche Bürsten die Kurzschlußströme in den kommutierenden Spulen. Es wird also nicht nur der Faktor e vergrößert, sondern auch φ verkleinert. In vielen Fällen wird es nicht möglich sein, allein durch die Wahl entsprechender Bürsten die Pendelneigung zu unterdrücken.

Eine Verringerung des Wertes von φ kann außerdem noch durch mehrere Mittel erreicht werden.

c) Durch Verschiebung der Bürsten im Sinne der Drehrichtung erhält der Anker eine feldverstärkende Wirkung, die man bis zur völligen Unterdrückung der Pendelneigung steigern kann. Das Ziel wird aber hierdurch auf Kosten der Kommutierung erreicht; bei Reversiermotoren ist dieses Mittel nicht anwendbar.

d) Bei stark bemessenen Wendepol-A. W. kann man die Ankerrückwirkung durch Shuntieren der Wendepolwicklung verringern. Die Grenze für die Anwendbarkeit dieses Mittels ist wieder durch die Kommutierungsverhältnisse gegeben.

e) Durch die Wahl möglichst schmaler Bürsten wird die Zahl der Spulen, die gleichzeitig im Kurzschluß liegen, vermindert; auch hierdurch verringert sich die Ankerrückwirkung.

f) Die Anordnung einer Compoundwicklung auf den Hauptpolen ist das beste Mittel zur Verhütung des Pendelns. Sie kann so eingerichtet werden, daß die Ankerrückwirkung ungefährlich wird. Unter Umständen wird jedoch die Anbringung einer solchen Wicklung bei fertigen Maschinen wegen Platzmangels nicht möglich sein.

g) Eine Vergrößerung des Luftspaltes unter den Hauptpolen wirkt deshalb in günstigem Sinne, weil sich das Rückwirkungsfeld nur der verkleinerten magnetischen Leitfähigkeit entsprechend ausbilden kann. Diese Maßnahme wird man in der Hauptsache nur bei Neukonstruktionen anwenden können.

Außer den eben erwähnten Mitteln, die wegen ihrer Einfachheit in der Praxis üblich geworden sind, sei des theoretischen Interesses wegen noch das Nachstehende erwähnt:

h) Man kann jede Pendelneigung dadurch unterdrücken, daß man in den Ankerstromkreis einen genügend großen induktiven Widerstand einschaltet. Der Nachweis läßt sich theoretisch erbringen, jedoch sei hier auf dessen Wiedergabe verzichtet. Da die Pendelneigung nur dann verschwindet, wenn die zugeschaltete Selbstinduktion sehr große Werte hat, kommt dieses Mittel allein der hohen Kosten wegen für die Praxis nicht in Frage.

i) Beim Pendeln erzeugt das Rückwirkungsfeld in der Nebenschlußwicklung Ströme auf deren Wirkung das Pendeln zurückzuführen ist. Anker und Nebenschlußwicklung können im Hinblick hierauf als Primär- und Sekundärwicklung eines Transformators aufgefaßt werden. Verkettet man den Ankerstrom und Nebenschlußstrom nochmals außerhalb des Motors in demselben Übersetzungsverhältnis, jedoch in umgekehrtem Sinne, so hört die Transformatorwirkung zwischen Anker und Feldwicklung auf. Gleichzeitig verschwindet hiermit die Pendelneigung des Motors. Es läßt sich diese Wirkung der zweiten Verkettung durch einen Versuch leicht zeigen.

Ein für die Praxis brauchbares Mittel läßt sich wegen der hohen Kosten für den Verkettungstransformator wohl nicht daraus konstruieren.



10. Zusammenfassung.

Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen lassen sich mit folgenden Worten zusammenfassen:

Die Möglichkeit für den Eintritt einer Pendelbewegung ist nur dann gegeben, wenn das Drehmoment und die Tourenzahl auch anders als durch die stabile Belastungscharakteristik zusammenhängen können. Die Erfüllung dieser Bedingung setzt zwei Eigenschaften des Motors voraus, die gleichzeitig vorhanden sein müssen: Der Ankerstrom muß erstens auf das Feld zurückwirken, und zweitens muß die Möglichkeit bestehen, daß Feldfluktuationen in der Nebenschlußwicklung zusätzliche Ströme induzieren können.

Wird dem Motor eine dieser beiden Eigenschaften, die bei normalen Motoren stets vorhanden sind, durch künstliche Mittel genommen, so verschwindet zugleich seine Pendelneigung.

Durch eine Hauptstromwicklung auf den Hauptpolen kann die Ankerrückwirkung beseitigt werden und dadurch, daß man den Ankerstrom und den Erregerstrom außerhalb des Motors noch einmal magnetisch verkettet, können in der Nebenschlußwicklung die zusätzlichen Ströme unterdrückt werden, die sonst durch die Feldfluktuationen hervorgerufen werden würden.

Es ist unwesentlich, woher die Ankerrückwirkung stammt und ob die Feldänderungen auf eine direkte magnetische Wirkung des Ankerstromes zurückzuführen sind, oder ob die Änderungen der Erregerspannung bei erheblichen Werten des Zuleitungswiderstandes die Ursache für die Feldschwankungen sind. Auch der Sinn, in dem der Ankerstrom das Feld beeinflußt (d. h. feldverstärkend oder feldschwächend), ist an sich gleichgültig.

Eine Pendelbewegung ist in diesen Fällen stets möglich, wenn man die entsprechende Belastungsart anwendet. So ist z. B. eine Schwingung selbst dann möglich, wenn der Ankerstrom das Feld verstärkt; die Belastungsziffer muß in diesem Falle negativ sein, d. h. bei zunehmender Tourenzahl muß eine Entlastung des Motors eintreten.

Mit diesen weitgehenden Zusammenhängen tritt das Pendelproblem der Praxis gewöhnlich nicht gegenüber. Man findet dort meist nur positive Belastungsziffern und verschwindend kleine Zuleitungswiderstände. Deswegen fällt auch die Formulierung der Pendelbedingungen weit einfacher aus, sobald man darauf verzichtet, alle theoretisch möglichen Fälle in die Umgrenzung mit hineinzuziehen und sich darauf beschränkt, nur die gewöhnlich vorkommenden Fälle zu umfassen.

Unter dieser vereinfachenden Voraussetzung ist die Möglichkeit für eine Pendelbewegung dann vorhanden, wenn der Anker feldschwächend auf das Gesamtfeld des Motors zurückwirkt. Der Eintritt und der Verlauf der Pendelbewegung hängt von den Werten der Koeffizienten σ und τ ab, die nach den Gleichungen (6) und (7) zu berechnen sind. Eine Übersicht über die Grenzen des stabilen und des labilen Zustandes und über den Bereich der Schwingungen gibt das Bild 9.

Die Brauchbarkeit eines Motors hängt von der Differenz $\varphi - e$, d. i. von dem Unterschied zwischen der relativen Feldschwächung und dem relativen Spannungsverlust ab.

Anhang.

Die Rückwirkung des Ankers.

Der Anker einer Gleichstrommaschine wirkt bei Belastung, selbst wenn die Bürsten in der neutralen Zone stehen, auf das Hauptfeld zurück.

Daß das Querfeld des Ankers eine Verschlechterung der Permeabilität und hierdurch eine Schwächung des Gesamtfeldes zur Folge hat, ist schon seit langem bekannt.

Im Jahre 1905 erschien eine Doktor-Dissertation von R. Pohl, die in einwandfreier Weise darlegte, daß die Kurzschlußströme in den kommutierenden Spulen eine erhebliche magnetische Wirkung zu äußern vermögen. Die dort beschriebenen Versuche beziehen sich allerdings nur auf Maschinen ohne Wendepole, es sind die Ergebnisse jedoch qualitativ ohne weiteres auch auf Wendepolmaschinen auszudehnen.

Zur Veranschaulichung diene folgendes Bild, welches für einen Motor Gültigkeit besitzt.

Stehen die Bürsten in der neutralen Zone, so ergeben die Ankerstäbe, welche sich nicht in der Kommutation befinden, ein reines Querfeld. Die Richtnng und die Größe des Feldes, welches von den kurzgeschlossenen Ankerstäben erzeugt wird, hängt von dem algebraischen Mittelwert, d. h. von dem zeitlichen Verlauf der Kurzschlußströme ab.

Die Linie I in Bild 15 stellt eine ideale Kommutierungskurve dar. Die Spule behält während der ersten Hälfte der Kommutierungsperiode die alte Stromrichtung bei. In der zweiten Hälfte wächst der Strom in der umgekehrten Richtung bis zu

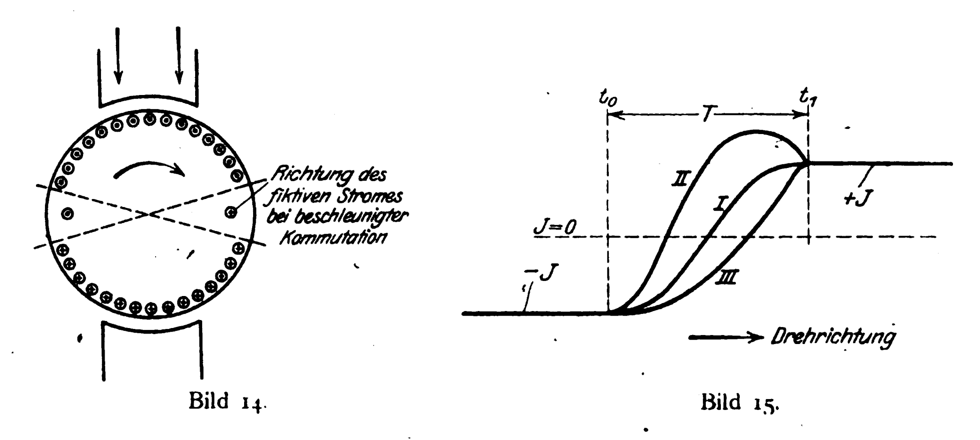


Bild 14. Bild 15.

seinem Normalwert an. Der algebraische Mittelwert dieser Stromkurve ist Null und infolgedessen würde in diesem Falle die Rückwirkung der Kurzschlußströme ebenfalls Null sein.

In Wirklichkeit weicht der Kurzschlußstrom wohl immer von dieser idealen Form ab; je nach der Stärke der Wendepolerregung ist die Kommutation eine beschleunigte (Linie II) oder eine verzögerte (Linie III) und der Mittelwert der Stromkurve ist von Null verschieden. So lange man nur die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme betrachtet, kann man sich daher bei der beschleunigten Kommutation den variablen Strom, den eine Spule während des Kurzschlusses führt, durch einen konstant fließenden ersetzt denken, dessen Richtung mit dem Strom übereinstimmt, den die Spule nach vollendetem Kurzschluß führen würde. Bei einer verzögerten Kommutation müßte man diesem fiktiven Strom das umgekehrte Vorzeichen geben.

Aus dem Bild 14 folgt ohne weiteres, daß die zusätzlichen Ströme bei beschleunigter Kommutation schwächend auf das Hauptfeld zurückwirken; bei einer verzögerten Kommutation wird dagegen das Feld verstärkt.

Nach dem Vorstehenden zerfällt die Rückwirkung eines Ankers, dessen Bürsten in den neutralen Zone stehen, in zwei Teile, welche ihren Ursprung haben

1. in der Verschlechterung der Permeabilität durch die Quermagnetisierung,
2. in dem Auftreten von zusätzlichen Kurzschlußströmen.

Da die letzteren sowohl von der Stärke des Wendepolfeldes, als auch von der Geschwindigkeit, mit der sich die Ankerstäbe im Wendepolfeld bewegen, abhängen, muß dieser Teil des Rückwirkungsfeldes von der Stromstärke und der Tourenzahl



abhängig sein, während der Anteil der Feldschwächung, welcher durch die Quermagnetisierung entstehe, nur von der Stromstärke abhängt.

Für das Gesamtfeld müßte also der Ansatz gemacht werden

$$\Phi = \Phi_r + c_1 i - c_2 J - c_5 n J.$$

Hierin bedeutet Φ_r das remanente Feld und $c_1 i$ den vom Nebenschlußstrom i herrührenden Teil des Gesamtfeldes. Die Ausdrücke $c_2 J$ und $c_5 n J$ stellen das Rückwirkungsfeld dar.

Diese Form der Kraftflußgleichung würde jedoch in die mathematische Behandlung des Pendelproblems beträchtliche Unbequemlichkeiten hineintragen.

Eine wesentliche Vereinfachung erzielt man, wenn man das gesamte Rückwirkungsfeld als proportional mit der Ankerstromstärke annimmt, so daß man erhält:

$$\Phi = \Phi_r + c_1 i - a J.$$

Für eine nicht geradlinig verlaufende Belastungscharakteristik hat a naturgemäß variable Werte, was bei der Bildung des Differentiales zu berücksichtigen ist.

$$\begin{aligned} d\Phi &= c_1 d i - a d J - J d a \\ &= c_1 d i - d J \cdot \left(a + J \frac{d a}{d J}\right) \\ &= c_1 d i - a' d J. \end{aligned}$$

Sobald also in der Rechnung das Differential des Kraftflusses erscheint, ist die Rückwirkungskonstante a durch a' zu ersetzen[1]).

Der Einfluß von Ungleichmäßigkeiten im Aufbau von Spulenleitungen auf den Wellenwiderstand.

Von

K. W. Wagner und **K. Küpfmüller.**

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt.)

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung.

1. **Gegenstand und Ziel der Arbeit.** Zur Herstellung von Sprechverbindungen auf große Entfernung werden Zwischenverstärker in die Leitung eingeschaltet[2]). Sie müssen, sofern man nicht, wie bei den Vierdrahtschaltungen, für jede Sprechrichtung eine besondere Leitung vorsehen will, so geschaltet sein, daß

[1]) In der mathematischen Entwicklung ist die Größe Φ_1 in Gleichung (3b) ihrem Sinne nach nichts anderes als ein Differential von Φ.

[2]) Näheres hierüber in dem Aufsatz von Höpfner „Über Fernsprechverstärker“ im 3. Sonderheft der „Telegraphen- und Fernsprechtechnik“ 1919.

sie nach beiden Richtungen verstärken. Alle bisher bekannten Anordnungen zur gleichzeitigen Verstärkung nach beiden Richtungen erfordern entweder, daß die Wellenwiderstände der miteinander zu verbindenden Leitungen gleich groß sind, oder daß man für jede der beiden Leitungen eine künstliche Nachbildung verwendet; ihr Scheinwiderstand muß möglichst genau mit dem Wellenwiderstand der nachzubildenden langen Leitung übereinstimmen. Die gleiche Aufgabe liegt in der Telegraphie vor, wenn die Leitung mit Gegensprechen (duplex) betrieben werden soll. Glatte Leitungen und Kabel lassen sich mit Hilfe einfacher Zusammenstellungen aus Widerständen und Kondensatoren mit der erforderlichen Genauigkeit nachbilden. Für Leitungen und Kabel, die zur Verringerung der Dämpfung mit Spulen belastet sind, hat der Amerikaner Hoyt[1]) eine Anordnung angegeben, die den Wellenwiderstand einer Spulenleitung in dem praktisch wichtigen Frequenzbereich unterhalb ihrer Eigenfrequenz[2]) nach Betrag und Winkel genau nachbildet. Ein anderes von K. Küpfmüller erdachtes Verfahren[3]) besteht darin, daß man der Spulenleitung eine Anordnung aus Spulen und Kondensatoren vorschaltet, wodurch die Spulenleitung hinsichtlich des Wellenwiderstandes den Charakter einer homogenen Leitung erhält. Praktisch hat man indes in beiden Fällen mit der Schwierigkeit zu

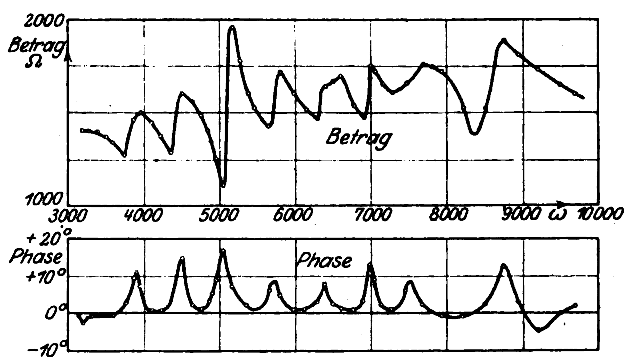


Bild 1. Abhängigkeit des Wellenwiderstandes einer Doppelader im Fernkabel Berlin—Rheinland von der Frequenz.

kämpfen, daß der Wellenwiderstand ausgeführter Spulenleitungen und Kabel fast stets, und zwar in einer sehr merkwürdigen Weise, von seinem theoretischen Wert abweicht.

Trägt man den durch Messung bestimmten Wellenwiderstand einer Spulenleitung in Abhängigkeit von der Frequenz auf, so erhält man eine Kurve, die nur im Mittel mit der theoretisch gefundenen übereinstimmt, im übrigen aber wellenförmige Abweichungen aufweist, die sich durch Meßfehler nicht erklären lassen.

Die Unterschiede im Wellenwiderstande der wirklichen Spulenleitung und ihrer Nachbildung sind oft so groß, daß im Verstärkerbetrieb erhebliche Schwierigkeiten entstehen. Es ist daher für die Praxis von Wichtigkeit, diese Erscheinung aufzuklären, um dadurch Anhaltspunkte zur Behebung der Schwierigkeiten zu gewinnen.

Die Unstimmigkeiten im Wellenwiderstande von Spulenleitungen und -kabeln sind seit einer Reihe von Jahren hier bei Messungen an solchen Leitungen bemerkt worden. Sie wurden von F. Lüschen zuerst beobachtet[4]). Von vornherein wurden Ungleichmäßigkeiten in den Spulenabständen und Spuleninduktivitäten als Ursache

[1]) Amerikanisches Patent Nr. 1 167 693.

[2]) D. i. die Eigenfrequenz eines Gliedes; sie wird im folgenden zum Unterschied von anderen Eigenfrequenzen Grenzfrequenz genannt. Der Name drückt aus, daß sie die obere Grenze des durchlässigen Bereichs der Spulenleitung bildet.

[3]) D. R. P. Nr. 330 964.

[4]) Die Bilder 1 und 12b dieser Arbeit geben Messungen wieder, die von Herrn Lüschen ausgeführt worden sind.

vermutet. Das Vertrauen in die Richtigkeit dieser Erklärung wurde durch Berechnungen bestärkt, nach denen der Wellenwiderstand einer aus ungleichartigen Stücken homogener Leitung zusammengesetzten Leitungsstrecke ähnliche Schwankungen aufweist, wenn sich die Frequenz ändert[1]). Anderseits ergaben die Beobachtungen, daß die Unregelmäßigkeiten im Wellenwiderstand nur bei gewissen Frequenzen auftreten, nämlich bei denen, für die der Leerlaufwiderstand oder der Kurzschlußwiderstand der Leitung ein Maximum oder ein Minimum hat. Es erschien kaum glaublich, daß die vielen kleinen Ungleichmäßigkeiten, die in einer Leitung mit Hunderten von Spulen vorkommen, und die noch dazu nach Größe und Vorzeichen ganz unregelmäßig verteilt sind, so zusammenwirken könnten, daß schließlich immer bei ganz bestimmten Frequenzen und nur bei diesen die beobachteten eigentümlichen Abweichungen des Wellenwiderstandes von seinem Normalwert zustande kommen. Und doch ist dem so, wie die weiter unten mitgeteilten Überlegungen und Rechnungen lehren.

Ein Beispiel für die vorkommenden Unstimmigkeiten im Wellenwiderstand zeigt Bild 1. Das Bild stellt den Verlauf des Wellenwiderstandes des Kabels Berlin-Rheinland (Ader 29), Strecke Brandenburg-Potsdam in dem für das Sprechen wichtigen Frequenzbereich dar. Da diese und andere Messungen, die gelegentlich an Spulenleitungen und -kabeln ausgeführt worden sind, bestimmten praktischen Zwecken dienten, konnten sie kein vollständiges Bild von der hier zu betrachtenden Erscheinung bieten. Es war daher notwendig, weitere systematische Versuche zur Klarstellung auszuführen. Sie wurden der Bequemlichkeit wegen an einer aus Spulen und Kondensatoren zusammengesetzten künstlichen Spulenleitung vorgenommen. Die erforderlichen Pupinspulen, im ganzen 100 Stück, sind von der Firma Siemens & Halske A.-G. in entgegenkommender Weise geliehen worden.

Das praktische Ziel der Untersuchung war, nach der Feststellung der Bedingungen, unter denen die störenden Unregelmäßigkeiten im Wellenwiderstand auftreten, Mittel zu ihrer Beseitigung zu finden. Solche Mittel sind im VIII. Abschnitt dieser Arbeit angegeben.

II. Versuchsanordnung.

2. Bei den im ersten Abschnitt angeführten Schaltungen muß man zwar im Grunde genommen den Scheinwiderstand der betriebsmäßig durch Endapparate abgeschlossenen Leitung nachbilden. Es wurde jedoch aus mehreren Gründen in

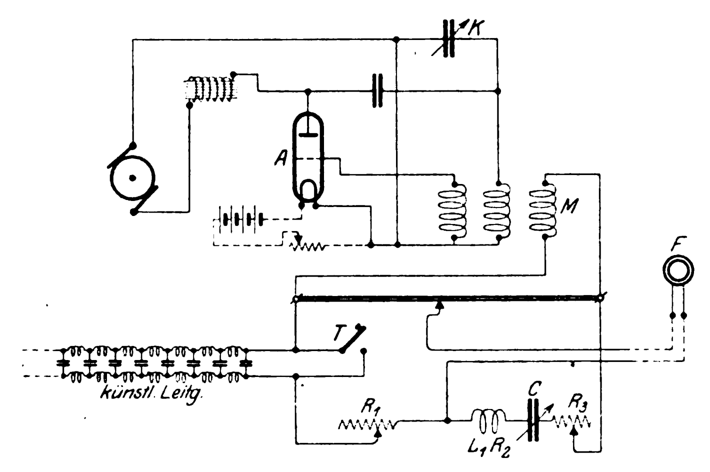


Bild 2 Schaltung zur Messung der Scheinwiderstände der Leitung und zur Frequenzmessung.

[1]) Hierüber hat Herr U. Meyer in dieser Zeitschrift kürzlich berichtet.

unserer Untersuchung nur der Wellenwiderstand ins Auge gefaßt. Einmal konnte auf diese Weise die Erscheinung zunächst an kurzen Leitungen, bei denen eine größere Einfachheit und Übersichtlichkeit der Vorgänge zu erwarten ist, untersucht werden, da der Wellenwiderstand für eine bestimmte Leitungsart unabhängig ist von ihrer Länge. Ferner ist für lange Leitungen, bei denen ja die besprochenen Einrichtungen gerade in Betracht kommen, der Scheinwiderstand sehr genau gleich dem Wellenwiderstand, und weiterhin kommt bei kürzeren Leitungen der Scheinwiderstand auch dann dem Wellenwiderstande gleich, wenn am Ende der Leitung ein Apparat angeschlossen ist, dessen Scheinwiderstand gleich dem Wellenwiderstand der Leitung ist. Dieser Zustand wird bekanntlich deswegen angestrebt, um die beste Energieausnützung zu erzielen.

Der Wellenwiderstand wurde in bekannter Weise durch Messung des Scheinwiderstandes bei offenem und kurzgeschlossenem Ende bestimmt. Der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}$ ergibt sich aus Leerlaufwiderstand $\mathfrak{U}_1$ und Kurzschlußwiderstand $\mathfrak{U}_2$ nach der bekannten Formel

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2}. \qquad (1)$$

Um möglichst genaue Werte zu bekommen, wurde für die Messungen eine Brückenschaltung nach Bild 2 gewählt. Zur Erzeugung des Wechselstromes diente ein Röhrensender, der Kreisfrequenzen von etwa 2500 an aufwärts lieferte. A ist die Kathodenröhre, K der zur Einstellung der Frequenz dienende veränderliche Kondensator des Schwingungskreises. Durch die Kopplungsspule M wird der Wechselstrom auf die Meßanordnung übertragen; die Kopplung war so lose, daß Veränderungen an der Brücke keinen merklichen Einfluß auf die erzeugte Frequenz hatten. Die Frequenz wurde in der gleichen Anordnung durch eine besondere Resonanzeinstellung bestimmt[1]). Wird beim Brückenverhältnis 1 : 1 der Widerstand $R_1 = R_2 + R_3$ gemacht und die Taste T gedrückt, so ist die Brücke abgeglichen, wenn $L\omega = \frac{1}{C\omega}$. Daraus ergab sich die Frequenz mit einer Ungenauigkeit von etwa 0,05 %.

Das Pupinkabel bestand aus Spulen von 0,2 Henry und etwa 9 Ω Wirkwiderstand und aus Kondensatoren von 0,26 μF. Die Bauart und die Herstellungsweise der Spulen sowohl, als auch der Kondensatoren bringen es mit sich, daß die elektrischen Werte der einzelnen Stücke nicht genau gleich groß sind. Die Abweichungen gingen bis $\pm$ 2,5% für die Induktivität und bis etwa $\pm$ 4% für die Kapazität, wenn man einige wenige noch größere Abweichungen außer Betracht läßt.

III. Einige Versuchsergebnisse.

3. In Bild 3 ist zunächst der Wellenwiderstand eines aus nur 2 Pupingliedern bestehenden Kabels in seiner Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Die eingetragenen Punkte sind die Meßwerte, während die gezeichneten Kurven die berechneten Werte zeigen. Man sieht, daß sowohl der Betrag als auch der Phasenwinkel an bestimmten Stellen, und zwar bei den Kreisfrequenzen $\omega = 3400$, 6200 und etwa 8000 in merkwürdiger Weise von der berechneten Kurve abweichen. Bild 4 zeigt den Betrag des Wellenwiderstandes eines dreigliedrigen Kabels. Hier ist die Form der Abweichungen dieselbe. Sie treten diesmal bei $\omega = 4400$, 6200, 7600 auf; auch bei etwa 8400 ist noch eine solche Stelle zu erkennen. Aus dem

[1]) Im vorliegenden Falle war es nötig, die Frequenz sehr genau zu messen, weil sich der Wellenwiderstand stellenweise sehr rasch mit der Frequenz ändert. Das angewendete Meßverfahren ist zugleich sehr bequem und genau. Auf seine Vorzüge haben A. Heydweiller und H. Hagemeister hingewiesen (Verh. d. deutsch. phys. Gesellsch. 1916, S. 52). Die erreichbare Genauigkeit ist von dem einen von uns an anderer Stelle erörtert worden (K. Küpfmüller, Telegraphen- und Fernsprechtechnik, Bd. 8, 1919, S. 124).



Bild 5 ergibt sich, daß diese Frequenzen tatsächlich jenen entsprechen, bei denen der Leerlaufwiderstand in seinem Betrag ein Maximum oder Minimum hat.

Bild 6 zeigt Betrag und Phase von $\mathfrak{Z}$ für ein 50gliedriges Kabel in dem engen Frequenzbereiche von $\omega = 6500$ bis 8000. Die Abweichungen haben auch hier die charakteristische Wellenform.

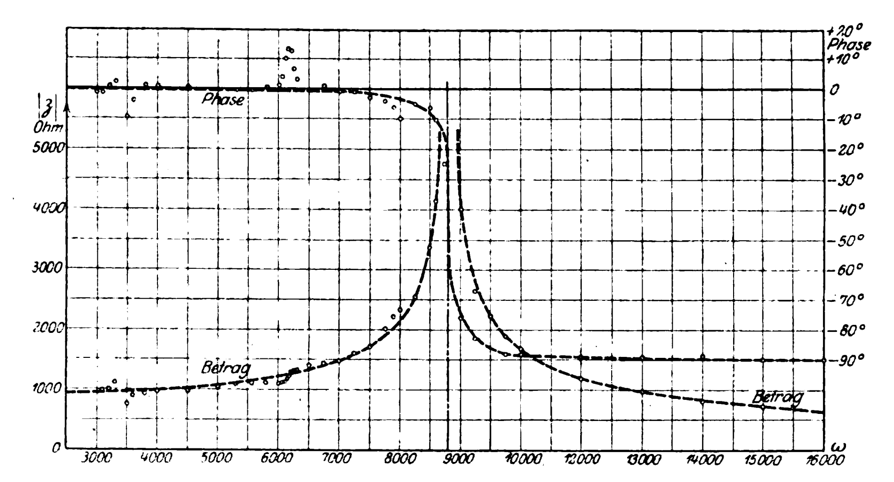


Bild 3. Wellenwiderstand eines zweigliedrigen Spulenkabels.

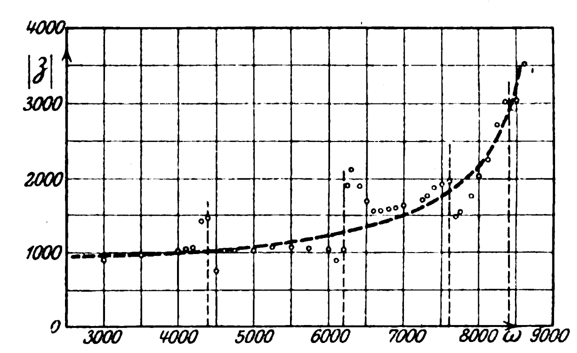


Bild 4. Wellenwiderstand eines dreigliedrigen Spulenkabels.

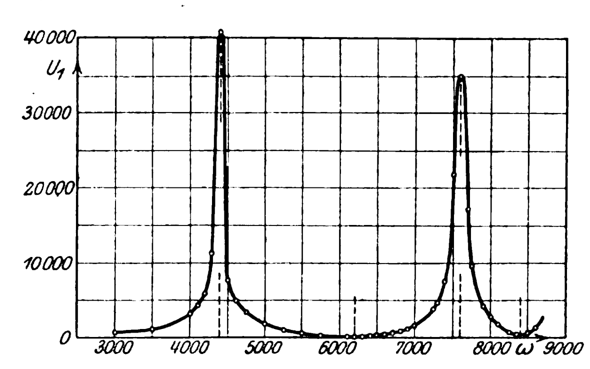


Bild 5. Leerlaufwiderstand des dreigliedrigen Spulenkabels.

Sehr bemerkenswert ist der durch Bild 7 dargestellte Verlauf des Wellenwiderstandes. Es wurde hier ein aus 4 Gliedern bestehendes Kabel untersucht, und zwar waren die Kondensatoren bis auf einen durch Meßfehler bedingten Unterschied von etwa $\pm$ 0,06% einander gleichgemacht; die Verschiedenheit der Spuleninduktivi-

täten betrug ca. ± 0,4%. Es treten auch hier noch Abweichungen im Wellenwiderstand auf, und zwar wiederum an den durch die gestrichelten Ordinaten bezeichneten Stellen kleinsten oder größten Leerlauf- oder Kurzschlußwiderstandes. Diese Be-

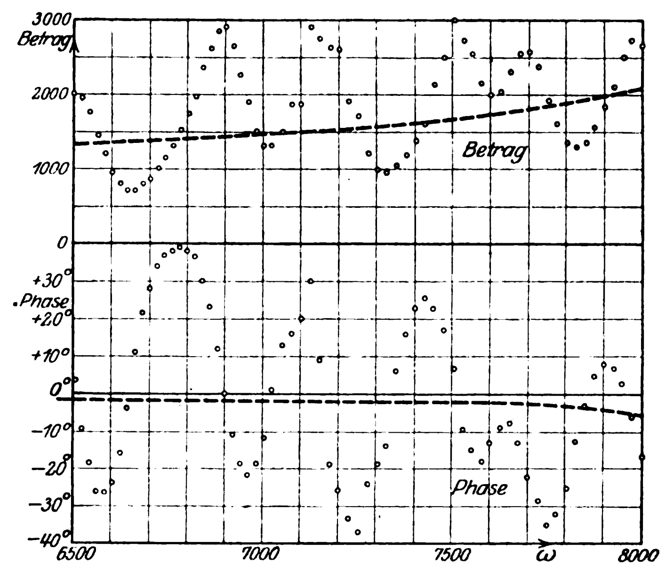


Bild 6. Wellenwiderstand eines 50gliedrigen Spulenkabels.

obachtung scheint zu dem Schluß zu drängen, daß die beobachteten Unregelmäßigkeiten doch nicht, oder mindestens doch nicht ausschließlich von den Ungleichmäßigkeiten im Aufbau verursacht sein können. Wie weiter unten gezeigt werden wird, kann tatsächlich auch ein aus gleichartigen Stücken aufgebautes Kabel die Abweichungen zeigen. Aber auch in diesem Falle wird sich herausstellen, daß als Ursache für das merkwürdige Verhalten des Wellenwiderstandes letzten Endes wiederum ungleiche elektrische Konstanten der einzelnen Glieder des Kabels anzunehmen sind. Es handelt sich hier um Ungleichheiten in den Spuleninduktivitäten, die davon herrühren, daß die Induktivität von der Stromstärke abhängt und diese an verschiedenen Stellen des Kabels verschiedene Werte hat.

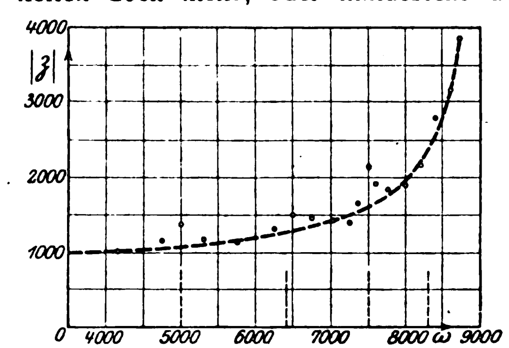


Bild 7. Wellenwiderstand eines viergliedrigen Kabels mit abgeglichenen Kapazitäten und gleichartigen Spulen. Das Bild zeigt den Einfluß der Änderung der Spuleninduktivität mit der Stromstärke.

IV. Theoretische Untersuchung.

4. Die Spulenleitung als Kettenleiter. Die elektrischen Eigenschaften einer Spulenleitung lassen sich am bequemsten übersehen, wenn man sie als Kettenleiter auffaßt. Für die Spannungs- und Stromverteilung gelten dann dieselben Formeln wie bei einer homogenen Leitung[1]). Das einzelne Glied des in Betracht kommenden Kettenleiters zeigt Bild 8. Bei diesem gelten für dauernde Sinusströme zwischen Spannung $\mathfrak{V}_1$ und Strom $\mathfrak{J}_1$ am Anfange und Spannung $\mathfrak{V}_0$ und Strom $\mathfrak{J}_0$ am Ende die linearen Beziehungen

[1]) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. Bd. 3, 1915 S. 315, Bd. 8, 1919 S. 61.

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_0 \operatorname{Cof} \gamma + \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} \gamma; \quad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_0 \operatorname{Cof} \gamma + \mathfrak{J}_0 \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} \gamma.$$

Darin bedeutet γ die Fortpflanzungskonstante, $\mathfrak{Z}$ den Wellenwiderstand. Ihre Abhängigkeit von den Leitungskonstanten L und C und von der Kreisfrequenz ω ist durch die Formeln

$$\operatorname{Cof} \gamma = 1 - \frac{\omega^2 L C}{2} + i \frac{\omega C R}{2} \qquad (2)$$

und

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{i\omega C}} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cof} \frac{1}{2} \gamma} \qquad (3)$$

gegeben[1]).

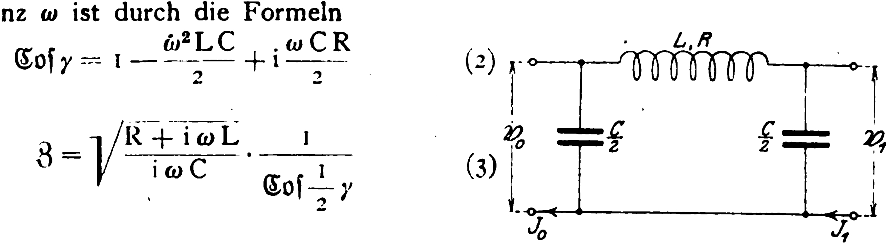


Bild 8. Glied einer Spulenleitung.

Bei einem aus N Gliedern bestehenden Kettenleiter sind die Ströme und Spannungen am Anfang und Ende des Leiters durch die beiden folgenden Gleichungen miteinander verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{J}_N &= \mathfrak{J}_0 \operatorname{Cof} N\gamma + \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} N\gamma \\ \mathfrak{V}_N &= \mathfrak{V}_0 \operatorname{Cof} N\gamma + \mathfrak{J}_0 \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} N\gamma \end{aligned} \right| \qquad (4)$$

Der Scheinwiderstand der Leitung bei offenem Ende ergibt sich hieraus zu

$$\mathfrak{U}_1 = \left(\frac{\mathfrak{V}_N}{\mathfrak{J}_N}\right)_{\mathfrak{J}_0 = 0} = \mathfrak{Z} \cdot \operatorname{Cotg} N\gamma \qquad (4a)$$

und der Kurzschlußwiderstand zu

$$\mathfrak{U}_2 = \left(\frac{\mathfrak{V}_N}{\mathfrak{J}_N}\right)_{\mathfrak{V}_0 = 0} = \mathfrak{Z} \cdot \operatorname{Tg} N\gamma \qquad (4b)$$

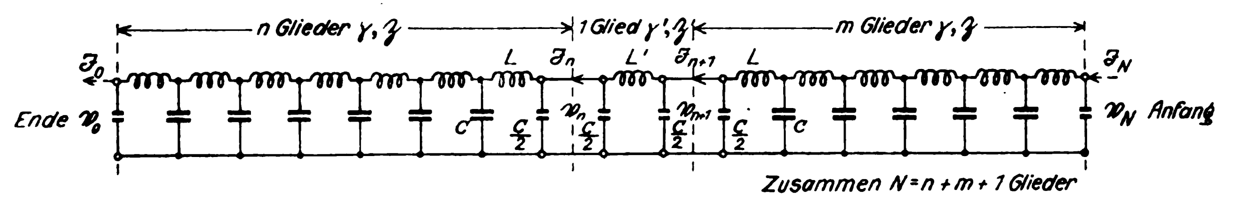


Bild 9. Spulenleitung mit einer Spule von abweichender Induktivität.

Es ist also

$$\mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2.$$

Dies ist unsere Gleichung (1), auf der sich das Verfahren zur Messung des Wellenwiderstandes gründet.

5. Einfluß abweichender Induktivität irgend einer Spule Um den Einfluß von Unregelmäßigkeiten zu untersuchen, wollen wir eine N-gliedrige Spulenleitung betrachten, deren Glieder bis auf eines vollkommen gleichartig sind (Bild 9). Das abweichende Glied sei das (n + 1)-te, vom Ende an gezählt. Es unterscheide sich von den übrigen Gliedern nur dadurch, daß die Induktivität L' seiner Spule um ein geringes von dem Normalwert L abweicht:

$$L' = L + dL = L(1 + \varepsilon), \qquad (5a)$$

also

$$\varepsilon = \frac{dL}{L}. \qquad (5b)$$

Dies hat zur Folge, daß die Fortpflanzungskonstante γ' und der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}'$ des betrachteten Gliedes verschieden sind von den Werten, die dieselben Größen für die übrigen Glieder haben. Wir setzen demgemäß

[1]) Der Einfluß der dielektrischen Verluste und der Ableitung ist hier vernachlässigt.

$$\gamma' = \gamma + c, \quad \mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} + z \cdot \mathfrak{Z} \tag{6}$$

Dabei sind die Zahlenwerte c und z durch ε ausdrückbar, wie weiter unten gezeigt werden wird. Mit den Größen γ' und $\mathfrak{Z}'$ lauten die Strom- und Spannungsgleichungen des betreffenden Gliedes

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}'_{n+1} &= \mathfrak{J}_n \operatorname{Cos} \gamma' + \frac{\mathfrak{V}_n}{\mathfrak{Z}'} \operatorname{Sin} \gamma' \\ \mathfrak{V}'_{n+1} &= \mathfrak{V}_n \operatorname{Cos} \gamma' + \mathfrak{J}_n \mathfrak{Z}' \operatorname{Sin} \gamma' \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$\mathfrak{J}'_{n+1}$ und $\mathfrak{V}'_{n+1}$ bedeuten den Strom und die Spannung hinter dem unnormalen [(n + 1)-ten] Gliede.

Nun kann man, wenn man in den Gleichungen (6) die Größen c und z als kleine Größen ansieht, die in (7) vorkommenden Funktionen unter Vernachlässigung höherer Potenzen von c und z wie folgt entwickeln:

$$\operatorname{Cos} \gamma' = \operatorname{Cos} \gamma + c \operatorname{Sin} \gamma; \quad \operatorname{Sin} \gamma' = \operatorname{Sin} \gamma + c \operatorname{Cos} \gamma$$

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}'} = \frac{1}{\mathfrak{Z}} - \frac{z}{\mathfrak{Z}}.$$

Außerdem wollen wir die Größen $\mathfrak{J}_{n+1}$ und $\mathfrak{V}_{n+1}$ einführen; das sind Strom und Spannung, die hinter dem (n + 1)-ten Glied vorhanden wären, wenn dieses Glied in seinen Eigenschaften mit den übrigen Gliedern übereinstimmte. Dann wäre also

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_{n+1} &= \mathfrak{J}_n \operatorname{Cos} \gamma + \frac{\mathfrak{V}_n}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} \gamma \\ \mathfrak{V}_{n+1} &= \mathfrak{V}_n \operatorname{Cos} \gamma + \mathfrak{J}_n \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} \gamma \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Hiermit ergeben sich aus (7) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}'_{n+1} &= \mathfrak{J}_{n+1} + \frac{c}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{V}_{n+1} - \frac{z \operatorname{Sin} \gamma}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{V}_n \\ \mathfrak{V}'_{n+1} &= \mathfrak{V}_{n+1} + c\, \mathfrak{Z} \mathfrak{J}_{n+1} + z\, \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} \gamma\, \mathfrak{J}_n \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Für das aus m = N — n — 1 normalen Gliedern bestehende Leitungsstück, das sich von dem unnormalen Gliede bis zum Leitungsanfang erstreckt, gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}'_N &= \mathfrak{J}'_{n+1} \operatorname{Cos} m\gamma + \frac{\mathfrak{V}'_{n+1}}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} m\gamma \\ \mathfrak{V}'_N &= \mathfrak{V}'_{n+1} \operatorname{Cos} m\gamma + \mathfrak{J}'_{n+1} \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} m\gamma \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$\mathfrak{J}'_N$ und $\mathfrak{V}'_N$ bedeuten den tatsächlichen Strom und die wirkliche Spannung am Leitungsanfange. Wäre dagegen das (n + 1)-te Glied normal, so hätte man am Leitungsanfang die Größen $\mathfrak{J}_N$ und $\mathfrak{V}_N$, die sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_N &= \mathfrak{J}_{n+1} \operatorname{Cos} m\gamma + \frac{\mathfrak{V}_{n+1}}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} m\gamma \\ \mathfrak{V}_N &= \mathfrak{V}_{n+1} \operatorname{Cos} m\gamma + \mathfrak{J}_{n+1} \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} m\gamma \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

ergeben würden. Dieselben Größen lassen sich mittels Gleichung (4) auch durch $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{V}_0$ (Strom und Spannung am Leitungsende) ausdrücken. Ferner hat man für das Teilstück der Leitung zwischen dem Leitungsende und dem unnormalen Gliede die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_n &= \mathfrak{J}_0 \operatorname{Cos} n\gamma + \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} n\gamma \\ \mathfrak{V}_n &= \mathfrak{V}_0 \operatorname{Cos} n\gamma + \mathfrak{J}_0 \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} n\gamma \end{aligned}\right\} \tag{9b}$$

Wir setzen jetzt in die Gleichung (9) für $\mathfrak{J}'_{n+1}$ und $\mathfrak{V}'_{n+1}$ die Werte aus Gl. (8) ein; hiernach werden unter Beachtung von Gleichung (9a) die Größen $\mathfrak{J}_N$ und $\mathfrak{V}_N$ eingeführt; endlich drücken wir mit Hilfe von (4) $\mathfrak{J}_N$ und $\mathfrak{V}_N$ durch $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{V}_0$ und ebenso mittels (9b) $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{V}_n$ durch dieselben Größen aus. So erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}'_N &= \mathfrak{J}_0\left[\mathfrak{Cos}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma + z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,(m-n)\gamma\right] + \\ &+ \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{Z}}\left[\mathfrak{Sin}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Cos}\,N\gamma - z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\,\mathfrak{Cos}\,(m-n)\gamma\right] \\ \mathfrak{B}'_N &= \mathfrak{B}_0\left[\mathfrak{Cos}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma - z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,(m-n)\gamma\right] + \\ &+ \mathfrak{J}_0\,\mathfrak{Z}\left[\mathfrak{Sin}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Cos}\,N\gamma + z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\,\mathfrak{Cos}\,(m-n)\gamma\right] \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Durch das Dasein des unnormalen Gliedes wird die Leitung im allgemeinen unsymmetrisch; die Faktoren von $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ in der eckigen Klammer sind verschieden; desgleichen die Faktoren von $\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{Z}}$ und $\mathfrak{J}_0\,\mathfrak{Z}$. Nur in dem Falle $m = n$, wo die Leitung symmetrisch ist, werden die Faktoren von $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ gleich, und man kann alsdann

$$\mathfrak{Cos}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma = \mathfrak{Cos}\,N\gamma_1,$$

und entsprechend

$$\mathfrak{Sin}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Cos}\,N\gamma = \mathfrak{Sin}\,N\gamma_1$$

setzen. Der Wellenwiderstand wäre aus der Beziehung

$$\mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma_1 = \mathfrak{Z}\left[\mathfrak{Sin}\,N\gamma + c\,\mathfrak{Cos}\,N\gamma + z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\right]$$

zu ermitteln.

In dem unsymmetrischen Falle $m \gtrless n$ lassen sich Beziehungen von der Form des rechten Teiles der Gleichungen (4a) und (4b) nicht herstellen, und infolgedessen läßt sich auch die Gleichung (1) nicht aus solchen Gleichungen herleiten. Man kann jedoch den Wellenwiderstand einer unsymmetrischen Leitung mit Hilfe der Gleichung (1) definieren. Der so erhaltene Wellenwiderstand gilt dann für diejenige Seite der Leitung, von der aus $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ gemessen sind. Wir wollen hier in dieser Weise vorgehen.

Zunächst aber ist es zweckmäßig, die Größen c und z (Gleichung 6) durch die Abweichung ε der Induktivität auszudrücken. Hierzu hat man von den Gleichungen (2) und (3) auszugehen.

Es ist

$$c = \frac{\partial\gamma}{\partial L}\cdot dL = \frac{\partial\gamma}{\partial L}\cdot L\varepsilon \qquad (11\,a)$$

$$z = \frac{1}{\mathfrak{Z}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial L}\cdot dL = \frac{L}{\mathfrak{Z}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial L}\cdot\varepsilon \qquad (11\,b)$$

Aus (2) ergibt sich durch Differenzieren

$$\frac{\partial\gamma}{\partial L}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma = -\frac{\omega^2 C}{2}.$$

Bei Vernachlässigung des Widerstandes, d. h. sehr angenähert, gilt

$$-\omega^2 L C = 4\,\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\gamma.$$

Hiermit ergibt sich

$$c = L\frac{\partial\gamma}{\partial L}\varepsilon = \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma \qquad (12)$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$z = -\frac{\varepsilon}{2\,\mathfrak{Cos}^2\frac{1}{2}\gamma}.$$

Hieraus folgt, bei Beachtung von (12)

$$z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma = \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma = c. \qquad (12\,a)$$

Wir führen jetzt diese Größen in (10) ein und berechnen alsdann mittels der linken Teile der Gleichungen (4a) und (4b) zunächst $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ und hiermit weiter aus Gleichung (1) den Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}_1$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_N' &= \mathfrak{I}_0\left[\mathfrak{Cos}\,N\gamma + \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,[\mathfrak{Sin}\,N\gamma + \mathfrak{Sin}\,(m-n)\gamma]\right] + \\ &+ \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{Z}}\left[\mathfrak{Sin}\,N\gamma + \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,[\mathfrak{Cos}\,N\gamma - \mathfrak{Cos}\,(m-n)\gamma]\right]; \\ \mathfrak{B}_N' &= \mathfrak{B}_0\left[\mathfrak{Cos}\,N\gamma + \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,[\mathfrak{Sin}\,N\gamma - \mathfrak{Sin}\,(m-n)\gamma]\right] + \\ &+ \mathfrak{I}_0\mathfrak{Z}\left[\mathfrak{Sin}\,N\gamma + \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,[\mathfrak{Cos}\,N\gamma + \mathfrak{Cos}\,(m-n)\gamma]\right]\end{aligned} \qquad (10a)$$

Ferner

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{Z}\,\frac{1+a_1}{1+a_2}\,\mathfrak{Cotg}\,N\gamma$$

$$\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{Z}\,\frac{1+a_3}{1+a_4}\,\mathfrak{Tg}\,N\gamma.$$

a_1, a_2, a_3, a_4 sind Größen, die im allgemeinen klein sind, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\mathfrak{Sin}\,N\gamma - \mathfrak{Sin}\,(m-n)\gamma}{\mathfrak{Cos}\,N\gamma}, \\ a_2 &= \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\mathfrak{Cos}\,N\gamma - \mathfrak{Cos}\,(m-n)\gamma}{\mathfrak{Sin}\,N\gamma}, \\ a_3 &= \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\mathfrak{Cos}\,N\gamma + \mathfrak{Cos}\,(m-n)\gamma}{\mathfrak{Sin}\,N\gamma}, \\ a_4 &= \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\mathfrak{Sin}\,N\gamma + \mathfrak{Sin}\,(m-n)\gamma}{\mathfrak{Cos}\,N\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (13a)$$

Werden die Größen a_1 bis a_4 als kleine Größen behandelt, so erhält man den folgenden Ausdruck für den Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\left(1 + \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}{2}\right). \qquad (13b)$$

Der Klammerausdruck ist der Korrektionsfaktor, der von der abweichenden Induktivität des $(n+1)$-ten Gliedes herrührt; er werde mit λ_L bezeichnet. Indem man für a_1 bis a_4 die vorher angeschriebenen Werte einsetzt und einige Vereinfachungen trifft, erhält man den Ausdruck:

$$\lambda_L = 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\mathfrak{Cos}\,(2n+1)\gamma}{\mathfrak{Sin}\,2N\gamma}\cdot\varepsilon \qquad (14)$$

6. Einfluß von Abweichungen im Widerstand. Durch ähnliche Gedankengänge ergeben sich die Korrektionsfaktoren für abweichenden Widerstand des $(n+1)$-ten Gliedes und für abweichende Kapazität.

Der Faktor für abweichenden Widerstand ist

$$\lambda_R = 1 + \frac{\varrho}{\mathfrak{Cos}\,\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\mathfrak{Cos}\,(2n+1)\gamma}{\mathfrak{Sin}\,2N\gamma} \qquad (15a)$$

oder auch

$$\lambda_R = 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\gamma}{2}\,\frac{\mathfrak{Cos}\,(2n+1)\gamma}{\mathfrak{Sin}\,2N\gamma}\cdot\frac{\varrho}{i\,\omega L}. \qquad (15b)$$

Dabei ist ϱ die Abweichung des Wirkwiderstandes R' der $(n+1)$-ten Spule von seinem Sollwert R:

$$R' = R + \varrho.$$

Wie aus dem gleichartigen Bau von λ_L und λ_R (Gleichungen 14 und 15b) hervorgeht, wirken die Widerstandsunterschiede ähnlich wie die Unterschiede in der Induktivität; ihr Einfluß ist aber viel geringer, da erstens der Faktor $\frac{\varrho}{\omega L}$ eine kleine Zahl ist,

und da ferner das zweite (Korrektions-) Glied von λ_R sich im Winkel von 90^0 mit dem Hauptglied 1 zusammensetzt. Wir lassen daher die Abweichungen des Widerstandes im folgenden unbeachtet.

7. Um den **Einfluß von Kapazitätsunterschieden** zu untersuchen, die von ungleichmäßigem Spulenabstand und bei Kabeln außerdem von ungleichmäßiger Herstellung der Ader selbst herrühren, wurde angenommen, daß die Kapazität zwischen dem n-ten und dem (n + 1)-ten Gliede einer N-gliedrigen Spulenleitung den Wert

$$C' = C(1 + \delta)$$

anstatt des Sollwertes C habe, d. h. es befindet sich hinter dem n-ten Gliede in der Leitung eine Zusatzkapazität $C\delta$ eingeschaltet, die natürlich ebensogut positiv wie negativ sein kann (Bild 10). Der zugehörige Korrektionsfaktor für den Wellenwiderstand wird

$$\lambda_C = 1 - 2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\mathfrak{Cof}\,2n\gamma}{\mathfrak{Sin}\,2N\gamma}\,\delta. \tag{16}$$

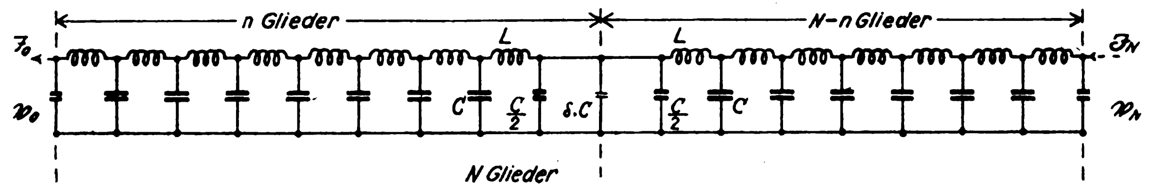


Bild 10. Spulenleitung mit einem Spulenzwischenstück von abweichender Kapazität.

8. Superposition der Wirkungen von mehreren verschiedenen Unregelmäßigkeiten. Kommen Abweichungen der Induktivität, des Widerstandes und der Kapazität gleichzeitig vor, so überlagern sich ihre Wirkungen. So ergibt sich, falls die Abweichungen nur das (n + 1)-te Glied betreffen, der Korrektionsfaktor des Wellenwiderstandes:

$$\lambda_{n+1} = 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\gamma\,\frac{\left(\varepsilon + \frac{\varrho}{i\omega L}\right)\mathfrak{Cof}\,(2n+1)\gamma - \delta\,\mathfrak{Cof}\,2n\gamma}{\mathfrak{Sin}\,2N\gamma}. \tag{17}$$

Im allgemeinen werden Abweichungen in mehreren oder in allen Gliedern auftreten; der zugehörige Korrektionsfaktor ist aus der Beziehung

$$\lambda = 1 + \sum_{n=0}^{n=N} (\lambda_{n+1} - 1) \tag{18}$$

zu berechnen, wobei die Größe λ_{N+1} einer etwa vorhandenen Abweichung in der Kapazität am Anfang der Leitung (d. h. hinter dem N-ten Gliede) Rechnung trägt.

Wegen der durch die Gleichungen (17) und (18) ausgedrückten einfachen Superposition[1]) der Störungen genügt es für das Weitere, diejenige Störung genauer zu betrachten, die von den Unregelmäßigkeiten eines einzelnen Gliedes herrührt. Wir wählen das (n + 1)-te. Die zugehörigen Korrektionsfaktoren sind durch die Gleichungen (14), (15a oder b) und (16) gegeben. Durch verschiedene Wahl von n können wir auch den Einfluß der Lage des unregelmäßigen Gliedes auf die dadurch hervorgebrachte Störung untersuchen.

9. Kritische Frequenzwerte. Kleine Abweichungen ε und δ bewirken im allgemeinen auch nur geringe Abweichungen der Korrektionsfaktoren λ_L und λ_C von 1. Für eine gewisse Reihe von Frequenzen findet indessen eine Ausnahme von dieser

[1]) Sie gilt natürlich nur, solange die λ nicht sehr verschieden von 1 sind.

Regel statt, nämlich für die, bei denen der Nenner $\mathfrak{Sin}\, 2N\gamma$ selbst eine kleine Zahl ist. Das sind gerade die Stellen des kleinsten Kurzschlußwiderstandes oder des kleinsten Leerlaufwiderstandes. Für die N-gliedrige Leitung sind dies im ganzen 2 N Stellen. Die Verhältnisse lassen sich am einfachsten übersehen, wenn man die Verluste in der Leitung (Widerstand und Ableitung) vernachlässigt. Alsdann wird an 2 N Stellen der Nenner

$$\mathfrak{Sin}\, 2N\gamma = 0.$$

Es sind die Stellen, wo

$$2N\gamma = i k \pi$$

ist. k bedeutet irgend eine ganze Zahl. Der zugehörige Wert γ_k ist

$$\gamma_k = i \frac{k\pi}{2N} = i\alpha_k. \tag{19}$$

α_k ist der entsprechende Wert des Winkelmaßes eines Leitungsgliedes. Nun kann α_k nicht über $180^0 = \pi$ wachsen[1]); daher kommen für k nur die Zahlen

$$k = 0, 1, 2 \ldots\ldots 2N \tag{19a}$$

in Betracht.

Der Zusammenhang mit der Betriebsfrequenz ω ergibt sich aus Gleichung (2) mit R = 0:

$$\omega = \frac{2}{i\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma - 1}{2}} = \frac{2}{i\sqrt{LC}}\mathfrak{Sin}\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\frac{1}{2}i\alpha}{i\sqrt{LC}} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{LC}}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega &= \omega_0 \sin\frac{\alpha}{2}\\ \omega_0 &= \frac{2}{\sqrt{LC}}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

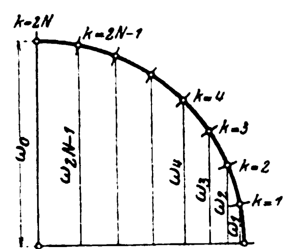


Bild 11. Bestimmung der kritischen Frequenzwerte ω_k, bei denen geringe Unregelmäßigkeiten im Aufbau der Spulenleitung große Schwankungen im Wellenwiderstand verursachen.

ω_0 ist die Grenzfrequenz. Für $\omega = \omega_0$ wird $\alpha = 180^0$, wie zuvor angegeben. Die 2 N Frequenzwerte, bei denen geringe Unregelmäßigkeiten in den Konstanten große Abweichungen des Wellenwiderstandes hervorbringen, sind

$$\omega_k = \omega_0 \sin\frac{1}{2}\alpha_k = \omega_0 \sin\frac{k\pi}{4N}.$$

Man findet sie, indem man einen Viertelkreis mit dem Radius ω_0 schlägt, ihn in 2 N Teile teilt und von jedem Teilpunkt das Lot fällt. Die Längen dieser Lote ergeben die Werte ω_k (Bild 11). k = 0 ergibt $\omega = 0$ und entspricht einem Gleichstrom in der Leitung; dieser Fall ist hier ohne Bedeutung, weshalb der Wert k = 0 weiterhin außer Betracht bleiben kann.

Nach Gleichung (4a) und (4b) ist

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{Z}\frac{\mathfrak{Cof}\,N\gamma}{\mathfrak{Sin}\,N\gamma}; \qquad \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{Z}\frac{\mathfrak{Sin}\,N\gamma}{\mathfrak{Cof}\,N\gamma}.$$

Die Nullstellen von

$$\mathfrak{Sin}\,2N\gamma = 2\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma\,\mathfrak{Cof}\,N\gamma$$

sind also in der Tat diejenigen Stellen, an denen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ null oder unendlich werden, oder bei Berücksichtigung der Verluste Minima oder Maxima haben. Die zugehörigen Frequenzen ω_k sind ferner zugleich die Eigenfrequenzen der Spulenleitung; und zwar gehören zu den ungeraden Werten von k (1, 3, 5 ...... 2 N — 1) die Eigenfrequenzen der am Ende offenen Leitung, zu den geraden Werten von k (2, 4, 6..... 2 N) die Eigenfrequenzen der am Ende kurzgeschlossenen Leitung.

[1]) K. W. Wagner, Archiv für Elektrotechnik Bd. 8, 1919, S. 65; Bild 4.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß gerade bei den Frequenzen ω_k und nur bei diesen der Wellenwiderstand von seinem Regelwert stark abweicht, wenn die Spulenleitung Unregelmäßigkeiten in ihrem Aufbau aufweist. Dabei ist es vollkommen gleichgültig, wo die Unregelmäßigkeiten liegen und welcher Art sie sind.

10. Verlauf des Wellenwiderstandes an einer kritischen Frequenzstelle. Der Verlauf des Wellenwiderstandes (seines Betrages) an einer Frequenzstelle ω_k wird durch Bild 12a links für eine verlustlose Leitung dargestellt, durch Bild 12a rechts bei Berücksichtigung der Verluste. Die Form dieser Kurven wird unterhalb und oberhalb von ω_k von den Funktionen λ_L oder λ_C bestimmt. In dem Punkte ω_k selbst und in seiner nächsten Umgebung gelten jedoch die Gleichungen (14) bis (16) nicht, da dort die a_1 bis a_4 nicht mehr als kleine Größen behandelt werden dürfen; in diesem Falle muß man zur Bestimmung des Wellenwiderstandes $\mathfrak{Z}_1$ unmittelbar auf die Gleichungen (10) zurückgehen. Ein Blick auf sie lehrt übrigens, weshalb die kleinen Größen c und z immer nur bei den

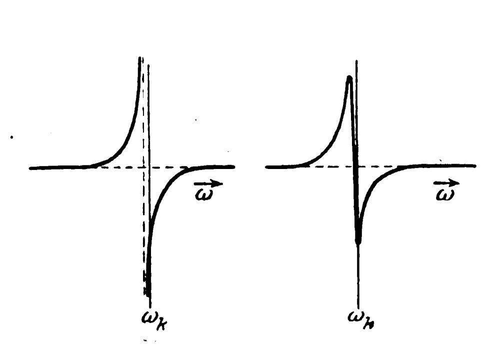


Bild 12a. Theoretischer Verlauf der Schwankung im Wellenwiderstand an einer kritischen Frequenzstelle ω_k. (Links für die verlustlose Leitung, rechts bei Berücksichtigung der Verluste.)

Bild 12b. Gemessener Verlauf der Schwankung im Wellenwiderstand an einer kritischen Frequenzstelle ω_k.

Frequenzen ω_k einen bedeutenden Einfluß ausüben. Für jedes ω_k verschwindet nämlich entweder $\mathfrak{Sin}\, N\gamma$ oder $\mathfrak{Cof}\, N\gamma$; die mit c und z multiplizierten Glieder spielen alsdann nicht mehr die Rolle von Korrektionsgrößen, sondern bestimmen selbst die Größe des Gesamtgliedes in der eckigen Klammer. Sehr schön bestätigt Bild 12b die sich hierdurch ergebende Art des Verlaufs. Die Abbildung stellt den an dem Fernkabel Magdeburg — Hannover gemessenen Betrag des Wellenwiderstandes in der Umgebung einer Frequenz ω_k dar.

11. Abhängigkeit der Schwankungen im Wellenwiderstand von der Art und Lage der störenden Unregelmäßigkeit. An zwei Beispielen wollen wir den Einfluß von Unregelmäßigkeiten auf den Wellenwiderstand näher untersuchen.

1. Beispiel: Es handle sich um eine zweigliedrige Spulenleitung (N = 2). Die Korrektionsfaktoren sind in ihrem Verlaufe im wesentlichen durch die Funktionen

$$\varphi_n = \frac{\cos(2n+1)\alpha}{\sin 2N\alpha} \quad \text{und} \quad \psi_n = \frac{\cos 2n\alpha}{\sin 2N\alpha} \qquad (21)$$

bestimmt, da der Faktor $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ in dem betrachteten Frequenzgebiet positiv ist und beständig wächst. n = 0 bedeutet, daß das Glied am Ende der Leitung abweichende Eigenschaften hat; n = 1 bedeutet eine Störung im ersten Gliede, n = 2 eine



Störung am Anfang der Leitung (vgl. Abb. 13 rechts, wo die abweichenden Induktivitäten oder Kapazitäten besonders kräftig gezeichnet sind).

Die zur Berechnung von φ und ψ nötigen Größen sind in der Tafel 1 angegeben. Die Vorzeichen in der Reihe $\sin 2N\alpha$ geben an, ob für den betreffenden Wert k der sinus von positiven Werten durch Null nach negativen Werten oder umgekehrt geht. In den Reihen $(2n+1)\alpha$ und $2n\alpha$ ist jedesmal der Winkel und darunter das Vorzeichen seines cosinus angegeben. Hiermit erhält man die in Bild 13 links angegebenen Korrektionsfaktoren λ_L und λ_C; sie zeigen wie sich der Wellenwiderstand infolge der angegebenen Unregelmäßigkeiten im Aufbau der Leitung mit der Frequenz ändert. (Die Faktoren $2\varepsilon \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ und $-2\delta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ sind weggelassen.)

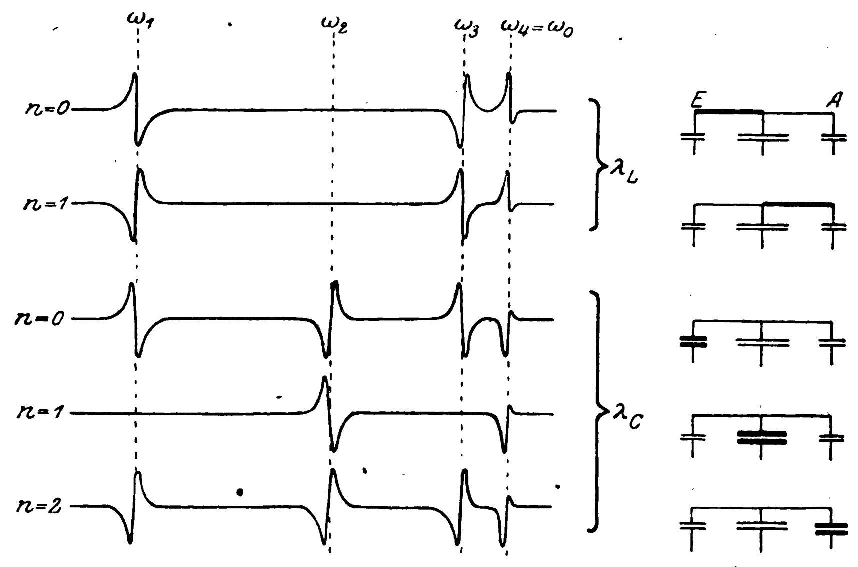


Bild 13. Wirkung einzelner Unregelmäßigkeiten auf den Wellenwiderstand einer zweigliedrigen Spulenleitung.

Tafel 1. N = 2.

		k = 1	2	3	4
α		45	90	135	180
$2N\alpha$		π	2π	3π	4π
$\sin 2N\alpha$		+ −	− +	+	− +
$(2n+1)\alpha$	n = 0	45 +	90 0	135 −	180 −
	n = 1	135 −	270 0	405 +	540 −
$2n\alpha$	n = 1	90 0	180 −	270 0	360 +
	n = 2	180 −	360 +	540 −	720 +

2. Beispiel: Eine viergliedrige Spulenleitung (N = 4). Die hierfür geltenden Werte sind in der Tafel 2 angegeben; die Frequenzabhängigkeit der Korrektionsfaktoren für den Wellenwiderstand ist aus Bild 14 ersichtlich. Jedes der dort gezeichneten neun Bilder zeigt, wie eine einzige Unregelmäßigkeit den Wellenwiderstand beeinflußt. Durch das Zusammenwirken mehrerer Unregelmäßigkeiten von beliebiger Stärke und beliebigem Vorzeichen entsteht ein aus solchen Elementar-

typen zusammengesetztes Bild; dabei bleiben jedoch die Unregelmäßigkeiten im Wellenwiderstand auf die Frequenzwerte ω_k und ihre nähere Umgebung beschränkt.

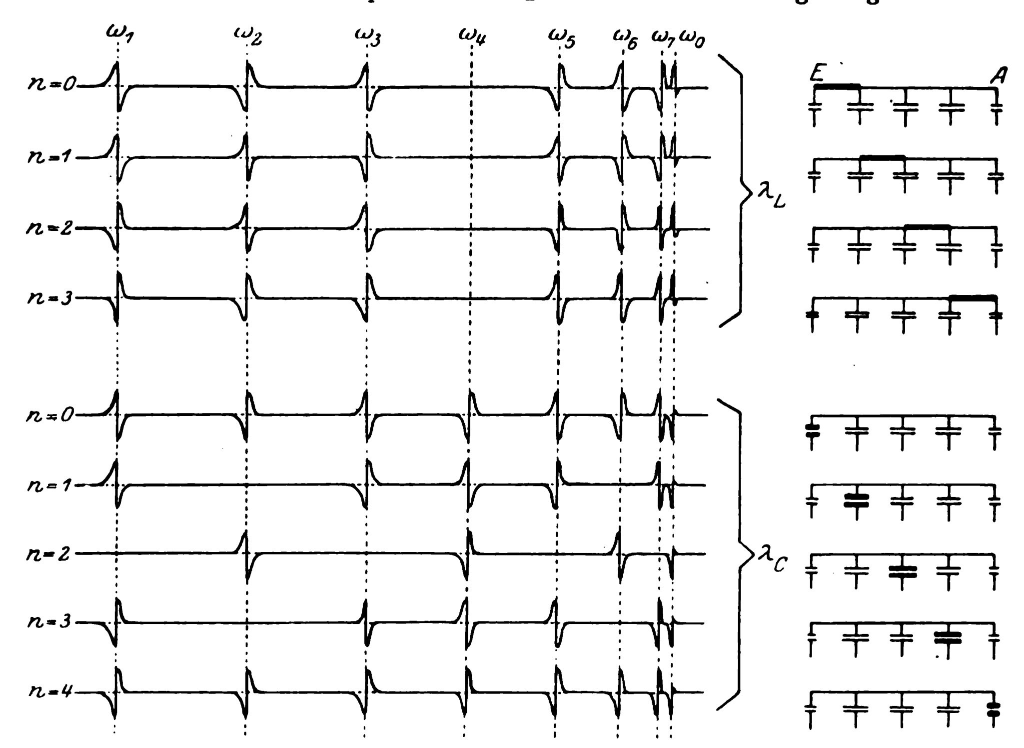


Bild 14. Wirkung einzelner Unregelmäßigkeiten auf den Wellenwiderstand einer viergliedrigen Spulenleitung.

Tafel 2. $N = 4$.

k =		1	2	3	4	5	6	7	8
α $2N\alpha$ $\sin 2N\alpha$		22,5 π + —	45 2π — +	67,5 3π + —	90 4π — +	112,5 5π + —	135 6π — +	157,5 7π + —	180 8π — +
$(2n+1)\alpha$	n = 0	22,5 +	45 +	67,5 +	90 0	112,5 —	135 —	157,5 —	180 —
	n = 1	67,5 +	135 —	202,5 —	270 0	337,5 +	405 +	472,5 —	540 —
	n = 2	112,5 —	225 —	337,5 +	450 0	562,5 —	675 +	787,5 +	900 —
	n = 3	157,5 —	315 +	472,5 —	630 0	787,5 +	945 —	1102,5 +	1260 —
$2n\alpha$	n = 1	45 +	90 0	135 —	180 —	225 —	270 0	315 +	360 +
	n = 2	90 0	180 —	270 0	360 +	450 0	540 —	630 0	720 +
	n = 3	135 —	270 0	405 +	540 —	675 +	810 0	945 —	1080 +
	n = 4	180 —	360 +	540 —	720 +	900 —	1080 +	1260 —	1440 +



12. Experimentelle Bestätigung. Wieweit sich die Kurven des Bildes 14 durch den Versuch bestätigen lassen, geht aus Bild 14a und 14b hervor. Hier ist der gemessene Betrag des Wellenwiderstandes einer viergliedrigen Leitung dargestellt. Die einzelnen Glieder dieser Leitung waren hinsichtlich ihrer elektrischen Konstanten möglichst genau abgeglichen, jedoch war bei 14a die Induktivität des Gliedes am Anfange um 25% größer als die der übrigen; bei 14b war der Kondensator zwischen dem 1. und 2. Glied um 25% größer als die anderen. Die Abweichungen im Wellenwiderstande liegen im allgemeinen ganz entsprechend den soeben berechneten. Zum Vergleich sind die Funktionen φ_3 und ψ_3 in ihrer richtigen

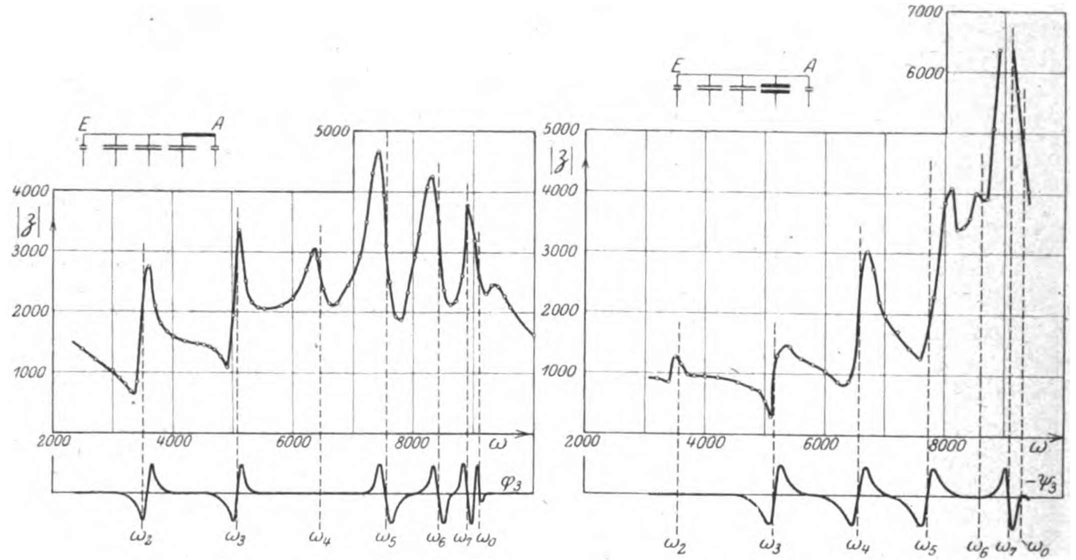


Bild 14a. Beobachteter und berechneter Verlauf der Schwankungen im Wellenwiderstand einer viergliedrigen Leitung mit einer groben Abweichung in der Induktivität der ersten Spule.

Bild 14b. Beobachteter und berechneter Verlauf der Schwankungen im Wellenwiderstand einer viergliedrigen Leitung mit einer groben Abweichung in der Kapazität des Leitungsstückes zwischen der ersten und zweiten Spule.

Lage in Bild 14a und b eingezeichnet. Man sieht, daß auch der Richtungssinn der Abweichungen durch die Messung bestätigt wird. Da die Abweichungen der Deutlichkeit halber absichtlich so groß gemacht wurden, gilt die entwickelte Theorie hier nicht streng, man müßte bei den Potenzreihenentwicklungen auch Glieder höherer Ordnung berücksichtigen. Damit erklären sich einige kleinere Abweichungen der experimentell aufgenommenen Kurven vom theoretischen Verlauf; so namentlich das Auftreten von e i n s e i t i g e n Abweichungen geringer Höhe an Frequenzstellen wie ω_4 im Bild 14a, an denen nach der Theorie der Wellenwiderstand normal verlaufen soll.

Auch die Lage der Frequenzen ω_k hat sich bei den Versuchen als übereinstimmend mit der hier vorgetragenen Theorie erwiesen. Für die oben beschriebene Versuchsleitung ist die Grenzfrequenz $\omega_0 = 8750$. Die Eigenfrequenzen ω_k der zweigliedrigen Leitung sind nach Gleichung (19) und (20)

$$\omega_1 = 3350; \quad \omega_2 = 6190; \quad \omega_3 = 8090; \quad \omega_4 = \omega_0 = 8750.$$

Die Messungen ergaben, wie bereits im Abschnitt III angegeben, Abweichungen des Wellenwiderstandes bei den Frequenzen

$$\omega = 3400, \ 6200 \text{ und } 8000.$$

Für die dreigliedrige Leitung ergab

die Berechnung	die Messung
$\omega_1 = 2260$	—[1])
$\omega_2 = 4375$	4400
$\omega_3 = 6190$	6200
$\omega_4 = 7580$	7600
$\omega_5 = 8450$	8400

Bei der viergliedrigen Leitung des Bildes 14a war

$$L = 0{,}22 \text{ H}, \quad C = 0{,}22 \ \mu\text{F},$$

also $\omega_0 = 9090$. Die Eigenfrequenzen sind hiermit

$$\omega_1 = 1773; \quad \omega_2 = 3480; \quad \omega_3 = 5045; \quad \omega_4 = 6426; \quad \omega_5 = 7560; \quad \omega_6 = 8400; \quad \omega_7 = 8920.$$

Bei dem Versuch der Abb. 14b war $L = 0{,}202$ H, $C = 0{,}23 \ \mu$F; $\omega_0 = 9280$. Also

$$\omega_1 = 1810; \quad \omega_2 = 3550; \quad \omega_3 = 5150; \quad \omega_4 = 6560; \quad \omega_5 = 7720; \quad \omega_6 = 8575; \quad \omega_7 = 9105.$$

Die Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen ist in allen Fällen deutlich.

13. Können die Schwankungen im Wellenwiderstand durch die Korrektur einzelner Glieder beseitigt werden? Da die Frequenzstellen, bei denen die Unstimmigkeiten auftreten, unabhängig von der Art und Größe der Abweichungen im Kabel festliegen, da außerdem schon eine einzige solche Abweichung bei allen diesen nun als Eigenfrequenzen gekennzeichneten Stellen von Einfluß sein kann, erscheint es zunächst nicht aussichtslos, durch eine absichtliche Veränderung gewisser einzelner Glieder eines Kabels eine Kompensation der störenden Wirkung aller vorhandenen Abweichungen zu versuchen. An einem 10-gliedrigen Kabel nach dieser Richtung hin angestellte Versuche blieben jedoch erfolglos. Es ließ sich zwar erreichen, daß an einzelnen Stellen eine wesentliche Besserung eintrat, bei anderen Frequenzen aber brachte eine derartige Korrektion gerade die gegenteilige Wirkung hervor.

Die oben gefundenen Ausdrücke für die Faktoren λ geben auch hierüber Aufschluß. Der Einfluß der Lage einer Abweichung ε_{n+1} ist danach bestimmt durch den Wert

$$q_{n+1} = \varepsilon_{n+1} \operatorname{Cof}(2n+1)\gamma.$$

Da im allgemeinen sämtliche N Glieder in ihren elektrischen Konstanten von einem Mittelwert verschieden sein werden, ist der Einfluß sämtlicher Abweichungen, wenn wieder kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, gegeben durch

$$q = \sum_{n=0}^{n=N-1} \varepsilon_{n+1} \operatorname{Cof}(2n+1)\gamma.$$

ε_{n+1} kann als eine durch Zufälligkeiten bedingte Funktion von n aufgefaßt werden, die in ihren N diskreten Werten ε_{n+1} der Festsetzung

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \varepsilon_{n+1} = 0$$

genügt; oder anders ausdrückt: jede der in den Gleichungen vorkommenden drei Größen L, C und R muß das arithmetrische Mittel aus ihren sämtlichen Einzelwerten sein. Wir wollen nun zwei einfache Fälle betrachten, die die Unmöglichkeit einer partiellen Korrektion dartun werden:

1. Ein N-gliedriges Kabel, das aus zwei gleichlangen Strecken o bis $\frac{N}{2}$ und $\frac{N}{2}$ bis N besteht; im ersten Teil sei $\varepsilon_{n+1} = +\varepsilon$, im zweiten $\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon$, es ist dann $\sum_n \varepsilon_{n+1} = 0$ erfüllt.

[1]) Der Wellenwiderstand wurde in dem Frequenzgebiet unterhalb $\omega = 3000$ nicht gemessen.

Der Einfluß aller Abweichungen ist nun bestimmt durch

$$q_N = \sum_{n=0}^{n=N-1} q_{n+1} = \sum_{n=0}^{n=\frac{N}{2}-1} q_{n+1} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{n=N-1} q_{n+1}$$

$$q_N = \varepsilon \cdot \left\{ \sum_{0}^{\frac{N}{2}-1} \mathfrak{Cof}\,(2n+1)\gamma - \sum_{\frac{N}{2}}^{N-1} \mathfrak{Cof}\,(2n+1)\gamma \right\}.$$

Soll das νte Glied so verändert werden (von q_ν auf $q_\nu + \Delta q_\nu$), daß es diesen Einfluß vernichten könnte, so müßte

$$q = q_N + \Delta q_\nu = 0,$$

$$q = \varepsilon \left\{ \sum_{0}^{\frac{N}{2}-1} \mathfrak{Cof}\,(2n+1)\gamma - \sum_{\frac{N}{2}}^{N-1} \mathfrak{Cof}\,(2n+1)\gamma \right\} + f\,\mathfrak{Cof}\,(2\nu+1)\gamma = 0$$

sein, wenn f die gesuchte Veränderung bedeutet.

Die Summen lassen sich durch Anwendung folgender Formel zusammenfassen:

$$\sum_{x=n_1}^{x=n_2} \mathfrak{Cof}\,(2x+1)\gamma = \frac{\mathfrak{Cof}\,(2n_1-1)\gamma + \mathfrak{Cof}\,(2n_2+3)\gamma - \mathfrak{Cof}\,(2n_2+1)\gamma - \mathfrak{Cof}\,(2n_1+1)\gamma}{4\,\mathfrak{Sin}^2\gamma}$$

und man erhält

$$f = \varepsilon \cdot \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma\,\mathfrak{Sin}^2\tfrac{1}{2}N\gamma}{\mathfrak{Sin}\,\gamma\,\mathfrak{Cof}\,(2\nu+1)\gamma}.$$

Es ergibt sich also für f ein von γ und damit von der Frequenz abhängiger Wert, der außerdem in seiner Abhängigkeit von der Frequenz abwechselnd positiv und negativ wird. Für eine bestimmte Frequenz läßt sich also wohl eine Abgleichung ermöglichen, bei anderen Frequenzwerten haben aber dann beide Summanden in q gleiche Vorzeichen, ihre Wirkungen addieren sich.

2. Es sei eine vollkommen gleichartig gebaute Leitung gegeben, die nur im (n_1+1)-ten Glied vom Ende eine Abweichung $+\varepsilon$ aufweist. Gesucht ist dasjenige Glied (n_2+1), das bei einer absichtlichen Veränderung $-\varepsilon$ den störenden Einfluß des andern heben könnte.

Es muß dann sein

$$q_{n_1+1} + q_{n_2+1} = 0$$

oder

$$\mathfrak{Cof}\,(2n_1+1)\gamma - \mathfrak{Cof}\,(2n_2+1)\gamma = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich auch schreiben

$$2\,\mathfrak{Sin}\,(n_1-n_2)\gamma\,\mathfrak{Sin}\,(n_1+n_2+1)\gamma = 0.$$

Für die Erfüllung dieser Gleichung unabhängig von der Fortpflanzungskonstante γ und damit von der Betriebsfrequenz wären also zwei Möglichkeiten gegeben:

1. $n_1 - n_2 = 0$;
2. $n_1 + n_2 + 1 = 0$.

Die Unerfüllbarkeit der zweiten dieser Bedingungen ist ohne weiteres ersichtlich; die erste fordert eine Korrektion des abweichenden Gliedes selbst. Dies ist also der einzige Weg, für alle Frequenzen die Störung zu beseitigen.

Ist schon in diesen einfachen Fällen eine solche Kompensation nicht möglich, so natürlich erst recht nicht für eine beliebige Verteilung der Abweichungen, wie sie bei wirklichen Leitungen zu finden ist.

14. Einfluß der Unregelmäßigkeiten im Aufbau auf das Dämpfungsmaß. Es fragt sich, ob die Unregelmäßigkeiten im Aufbau von Spulenleitungen nicht auch die Fortpflanzungskonstante (Winkelmaß und Dämpfung) in ähnlicher Weise wie den Wellenwiderstand beeinflussen. Das ist nicht der Fall, wie w[ir] sogleich zeigen wollen.

Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichungen (10a) in der Form

$$\mathfrak{V}'_N = \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{V}_0 + \mathfrak{B}\,\mathfrak{J}_0$$
$$\mathfrak{J}'_N = \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{J}_0 + \mathfrak{C}\,\mathfrak{V}_0$$

mit [siehe Gleichung (12a) und folgende]

$$\mathfrak{A}_1 = (1 + a_1)\,\mathfrak{Cof}\,N\gamma$$
$$\mathfrak{A}_2 = (1 + a_4)\,\mathfrak{Cof}\,N\gamma.$$

Dann ergibt sich zur Berechnung der durch die Unregelmäßigkeiten beeinflußten Fortpflanzungskonstante γ_1 der Ausdruck

$$\mathfrak{Cof}\,N\gamma_1 = \sqrt{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2} \approx \left(1 + \frac{a_1 + a_4}{2}\right)\mathfrak{Cof}\,N\gamma$$

$$\mathfrak{Cof}\,N\gamma_1 = \mathfrak{Cof}\,N\gamma + \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma \qquad (22\,a)$$

bzw.

$$\mathfrak{Cof}\,N\gamma_1 = \mathfrak{Cof}\,N\gamma - \delta\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma \qquad (22\,b)$$

und

$$\mathfrak{Cof}\,N\gamma_1 = \mathfrak{Cof}\,N\gamma + \varrho\sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma, \qquad (22\,c)$$

d. h. kleine Änderungen in den Leitungskonstanten bringen auch nur kleine Änderungen der Fortpflanzungsgröße hervor [1]).

Da γ komplex ist, $\gamma = \beta + i\alpha$ und $\beta \lll \alpha$, wäre es denkbar, daß der Einfluß der Änderungen auf die Größe $|\gamma|$ zwar klein, auf den Dämpfungsexponenten β doch merklich wäre. Eine kleine Rechnung wird diese Frage klarstellen. Wir zerlegen

$$\gamma_1 = i\alpha_1 + \beta_1; \quad \alpha_1 = \alpha + \vartheta; \quad \beta_1 = \beta + \eta$$

und bezeichnen die Summe $\eta + i\vartheta$ mit c_1; c_1 ist dann der durch die Ungleichmäßigkeiten verursachte Zuwachs von γ

$$\gamma_1 = \gamma + c_1.$$

Die Entwicklung der eben gefundenen Beziehungen (22) nach c_1 liefert unter Vernachlässigung höherer Potenzen

$$\mathfrak{Cof}\,N\gamma + N c_1\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma = \mathfrak{Cof}\,N\gamma + \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma$$

$$N c_{1L} = \varepsilon\,\mathfrak{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma \qquad (23\,a)$$

$$N c_{1C} = -\delta\,\mathfrak{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma \qquad (23\,b)$$

$$N c_{1R} = \varrho\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (23\,c)$$

Um den Dämpfungszuwachs η zu bekommen, müssen wir den reellen Teil von c_1 suchen. Aus Gleichung (2) ergibt sich durch einfache Umformungen

$$\mathfrak{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma = \sqrt{\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\,\frac{R\,C\,\omega}{4}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\,\frac{R\,C\,\omega}{4}}},$$

und hieraus näherungsweise für Betriebsfrequenzen unterhalb der Grenzfrequenz

$$\mathfrak{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma = \frac{R\,C\,\omega_0}{8\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + i\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

Damit erhält man aus (23a, b, c)

$$\eta_L = \frac{1}{N}\cdot\frac{\varepsilon\,R\,C\,\omega_0}{8\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$\eta_C = \frac{1}{N}\cdot\frac{-\delta\,R\,C\,\omega_0}{8\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$\eta_R = \frac{1}{N}\,\varrho\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

[1]) An den kritischen Frequenzstellen ω_k ist sogar der Einfluß der Unregelmäßigkeiten auf die Fortpflanzungskonstante identisch null, da dort $\mathfrak{Sin}\,N\gamma = 0$ ist.

In allen drei Fällen ist also der Einfluß der Abweichungen gering; für kleine Abweichungen verschwindet er sogar ganz, da sich dann die Einzelwirkungen wieder überlagern und wir ja für die Bestimmung der Größen L, C und R die Festsetzung getroffen haben, daß

$$\sum_n \varepsilon_n = 0; \quad \sum_n \delta_n = 0; \quad \sum_n \varrho_n = 0.$$

Dieses Ergebnis ist auch physikalisch verständlich; es bedeutet, daß die Dämpfung nur von der Summe aller Verluste in der Leitung abhängig ist, nicht aber von ihrer Verteilung auf die einzelnen Leitungsglieder. Ausgeführte Dämpfungsmessungen bestätigen das Resultat.

V. Messungen an Leitungen mit möglichst gleichmäßigem Aufbau.

15. Da, wie wir gesehen haben, der Versuch einer partiellen Korrektion in Theorie und Praxis mißlingt, bleibt als nächster Schritt zur Verbesserung der möglichst sorgfältige Aufbau der ganzen Leitung. Da interessiert es nun vor allem, mit welcher Genauigkeit man dabei zu verfahren habe. Diese Frage war die Veranlassung zu den bereits erwähnten und in Bild 7 dargestellten Versuchen. Tafel 3 gibt den hieraus abgeleiteten Faktor $\lambda = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}}$.

Tafel 3.

ω	$\mathfrak{Z}_1$	λ	ω	$\mathfrak{Z}_1$	λ
4150	1010	1,01	7000	1420	1,00
4500	1040	1,02	7250	1380	0,90
4750	1140	1.09	7350	1660	1,06
5000	1350	1,23	7500	2140	1,32
5300	1160	1,04	7600	1870	1,14
5500	1130	1,04	7750	1840	1,04
5750	1145	1,04	8000	1910	0,98
6000	1190	1,04	8200	2175	1,00
6250	1310	1,09	8400	2800	1,12
6500	1480	1,17	8600	3150	1,00
6750	1460	1,08	8700	3860	1,05

Es erscheint wenig glaublich, daß derartig geringe Abweichungen in den elektrischen Konstanten $\varepsilon_{max} = 0{,}004$, $\delta_{max} = 0{,}0006$ solche noch sehr beträchtlichen Unstimmigkeiten verursachen könnten; auch befriedigt deren Form, besonders der Verlauf bei $\omega = 5000$, nicht recht unsere bisherigen Resultate.

Um einen Überblick über die Größenverhältnisse zu gewinnen, wurde Tafel 4 berechnet, die den Korrektionsfaktor λ_L für eine viergliedrige Leitung, entsprechend der eben erwähnten, in seiner Abhängigkeit von der Änderung ε der Spuleninduktivität des dritten Gliedes (n = 2) beispielsweise zeigt. Da Tafel 3 bei $\omega = 7500$ (k = 5) die größte Unregelmäßigkeit ergibt, ist diese Frequenz der Berechnung zugrunde gelegt. Die Werte sind mit Hilfe der Gleichung (10) erhalten (weil die Näherungsformeln für den Wert ω_k selbst keine Gültigkeit besitzen). Für $L = 0{,}197$ H und $C = 0{,}25\ \mu$F ist die Grenzfrequenz $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = 9012$; der Wirkwiderstand R eines Gliedes beträgt 5 Ω.

Unterschiede von einigen Tausendsteln, die praktisch als sehr gering gelten müssen, können hiernach zwar schon ansehnliche Abweichungen geben, trotzdem lassen sich die durch die Messung beobachteten großen Unstimmigkeiten damit nicht aufklären; denn λ dürfte nach der Rechnung auch bei Berücksichtigung der kapazitiven Verschiedenheiten nicht größer als etwa 1,09 sein, während die Messung $\lambda = 1,32$ ergab (siehe Tafel 3). In der Tat findet sich noch eine tieferliegende Ursache.

Tafel 4.

$\varepsilon_3 = \frac{L_3 - L}{L}$	$\lambda = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}}$
0,001	1,01
0,002	1,03
0,004	1,04
0,005	1,06
0,006	1,09
0,008	1,14
0,010	1,23

VI. Die Abhängigkeit der Spuleninduktivität von der Stromstärke und ihr Einfluß auf den Wellenwiderstand.

16. Berechnung der Stromverteilung. Die im Leitungsbau verwendeten Pupinspulen sind auf einen Eisenkern gewickelt. Da die magnetische Permeabilität des Eisens sich mit der Kraftliniendichte ändert, hängt auch die Selbstinduktivität L einer solchen Spule von der Feldstärke im Eisen und damit vom Spulenstrom ab. Die Größe dieser Abhängigkeit zeigt für die bei unseren Versuchen verwendeten Pupinspulen das Bild 15; die angegebenen Induktivitäten sind Mittelwerte aus gut miteinander übereinstimmenden Messungen an einer Anzahl solcher Spulen.

Bild 15. Abhängigkeit der Induktivität der Spulen des Versuchskabels von der Stromstärke.

Wir wollen nun die Spulenströme in einer Leitung berechnen und denken uns dieselbe zu diesem Zwecke in der (n + 1)-ten Spule (vom Ende aus) durchschnitten.

Der Strom $\mathfrak{J}_s$ am Anfange des abgetrennten Teiles, der durch einen n-gliedrigen Kettenleiter mit einer vorgeschalteten Kapazität von der Größe $\frac{C}{2}$ dargestellt werden kann (Bild 16), ist von Spannung $\mathfrak{V}_0$ und Strom $\mathfrak{J}_0$ am Ende genau in derselben

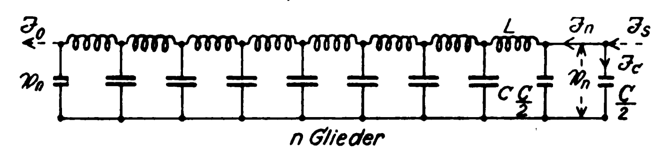


Bild 16. Zur Bestimmung des Spulenstromes im (n + 1)ten Gliede der Leitung.

Weise abhängig wie der Spulenstrom des (n + 1)-ten Gliedes im ursprünglichen Kabel. Aus dem Bild 16 kann man die Beziehung ablesen

$$\mathfrak{J}_s = \mathfrak{J}_n + \mathfrak{J}_C = \mathfrak{J}_n + \frac{i C \omega}{2} \mathfrak{V}_n.$$

Drückt man hier $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{V}_n$ durch Strom und Spannung am Ende aus

$$\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}_0 \operatorname{Cof} n\gamma + \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} n\gamma,$$

$$\mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_0 \operatorname{Cof} n\gamma + \mathfrak{J}_0 \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} n\gamma,$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\frac{iC\omega}{2} = \frac{1}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Tg} \frac{1}{2}\gamma$$

für den Spulenstrom des (n + 1)-ten Gliedes

$$\mathfrak{J}_s = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{1}{2}\gamma}\left[\mathfrak{J}_0 \mathfrak{Cof}\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma + \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Sin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right] \tag{24}$$

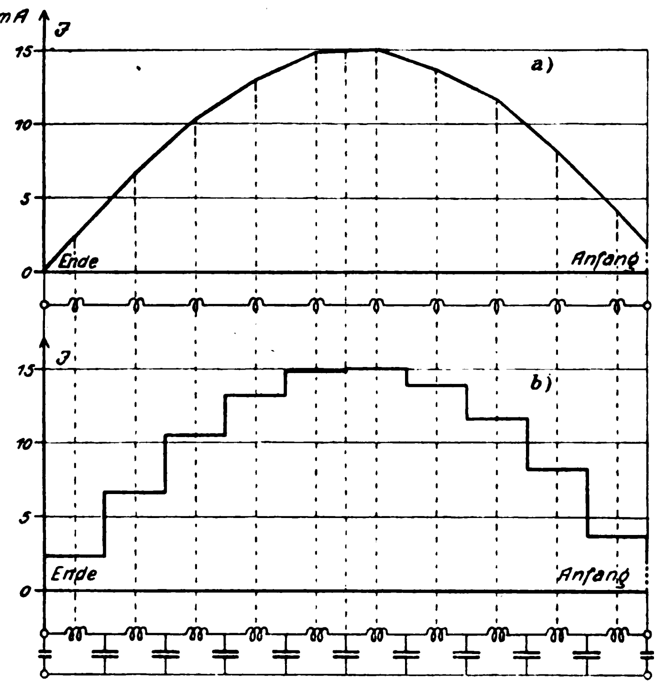


Bild 17. Stromverteilung bei Leerlauf in einer 10gliedrigen Spulenleitung
a) in der wirklichen Leitung,
b) in dem entsprechenden Kettenleiter.

Für das kurzgeschlossene Leitungsende ist $\mathfrak{V}_0 = 0$, also

$$\mathfrak{J}_{sk} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{1}{2}\gamma} \mathfrak{J}_0 \mathfrak{Cof}\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma,$$

für den Leerlauf der Leitung ist $\mathfrak{J}_0 = 0$ und damit

$$\mathfrak{J}_{sl} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{1}{2}\gamma} \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Sin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma.$$

Als festliegend ist hier die Spannung $\mathfrak{V}_N$ am Anfange der Leitung anzusehen; demgemäß sind nach den Gleichungen (4) $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{V}_0$ bei Kurzschluß bzw. Leerlauf bestimmt durch

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{\mathfrak{V}_N}{\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma}; \qquad \mathfrak{V}_0 = \frac{\mathfrak{V}_N}{\mathfrak{Cof}\,N\gamma}.$$

Damit wird

$$\mathfrak{J}_{sk} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{1}{2}\gamma} \frac{\mathfrak{V}_N}{\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,N\gamma} \mathfrak{Cof}\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma. \tag{25a}$$

$$\mathfrak{J}_{s1} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}\gamma}\;\frac{\mathfrak{V}_N}{3\,\mathfrak{Cof}\,N\gamma}\,\mathfrak{Sin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma. \tag{25b}$$

Wird zunächst wieder der Widerstand R außer Betracht gelassen, so hängt also die Stromstärke in einer Spule nach einer einfachen Sinusfunktion $\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha,\right.$ bzw. $\left.\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]$ von deren Lage ab, d. h. es bildet sich auf dem Kettenleiter ähnlich wie bei glatten Leitungen eine Art stehender Welle aus. Infolgedessen können die Beträge der Stromstärken in den einzelnen Gliedern erheblich voneinander verschieden sein, und diese Verschiedenheit wird in Gemeinschaft mit der oben beschriebenen Eigenschaft der Pupinspule Unterschiede in der Induktivität L der Glieder verursachen.

In Bild 17 ist eine solche stehende Welle aufgezeichnet, und zwar in a) für die 10-gliedrige Spulenleitung und in b) für den entsprechenden Kettenleiter bei $\frac{\omega}{\omega_0} = 0{,}15$, $L = 0{,}2$ H, $C = 0{,}25\ \mu$F und $V_N = 0{,}5$ Volt[1]). Man sieht, daß die Stromstärken in den einzelnen Spulen sehr voneinander abweichen.

Die folgende Tafel 5 gibt die Leerlaufspulenströme für die in Abschnitt 5 betrachtete Messung bei $\omega_k = 7490$ und den dort angegebenen Konstanten. Gleichzeitig sind aus Bild 15 die zugehörigen Spuleninduktivitäten L' und hieraus deren relative Abweichungen ε von einem Mittelwert bestimmt. Die sich hier zeigenden Verschiedenheiten von maximal 0,034 erklären vollauf die im Wellenwiderstand beobachteten Abweichungen von etwa 30%.

Tafel 5.

n	$\mathfrak{J}_{s1}$ in Milli-Amp.	L'	$\varepsilon = \frac{L'-L}{L}$
0	23,5	0,212	+ 0,015
1	5,3	0,202	− 0,034
2	27,9	0,214	+ 0,024
3	15,8	0,208	− 0,005

Damit ist der Grund für die zuerst rätselhaft großen Unstimmigkeiten gefunden. Näheren Aufschluß über diese durch die ungleiche Stromverteilung verursachten Störungen erhält man auf folgende Weise.

17. Die durch ungleiche Stromverteilung hervorgerufenen Abweichungen der Induktivität und ihr Einfluß auf den Wellenwiderstand.

Wie aus Bild 15 ersichtlich ist, wächst die Spuleninduktivität L' mit der Stromstärke in dem in Frage kommenden Bereich (bis 30 mA) sehr angenähert linear.

Man kann deshalb für L' den Ansatz machen

$$L' = L(1 + l\cdot\mathfrak{J}_s), \tag{26}$$

wobei sich die Konstante l aus Bild 15 ergibt. Mit Hilfe dieses Ansatzes lassen sich dann auf ähnliche Weise wie in Abschnitt IV Beziehungen aufstellen für einen Korrektionsfaktor λ. Es ergibt sich

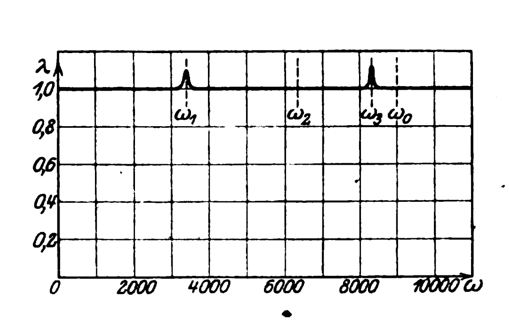
$$\lambda = 1 + l\cdot\mathfrak{V}_N\left\{\frac{i\chi}{\mathfrak{Sin}^2 N\gamma} + \frac{i\xi}{\mathfrak{Cof}^2 N\gamma}\right\} \tag{27}$$

[1]) Das ist etwa die Meßspannung.

χ und ξ sind Größen, die von der Länge der Leitung und den Leitungskonstanten abhängen und für unsere Betrachtungen unwesentlich sind. Sie sind im Idealfalle ($R = 0$) reell.

Die Formel (27) zeigt, wie es zu erwarten war, daß die Störungen sich auch hier wieder bei den Frequenzen ω_k bemerkbar machen; denn an diesen Stellen werden die Nenner zu Null bzw. zu einem Minimum. In Bild 18a und b ist der durch die Gleichung (27) für Frequenzen oberhalb und unterhalb der ω_k dargestellte Korrektionsfaktor λ als Funktion der Frequenz für eine zweigliedrige Leitung wiedergegeben.

Es zeigt sich nun, daß die Art der Abweichungen eine andere ist als die bisher gefundene. Gleichung (27) läßt den Grund erkennen; im Nenner stehen die Quadrate des $\mathfrak{Cof}\, N\gamma$ bzw. $\mathfrak{Sin}\, N\gamma$, das Vorzeichen der Korrektionssummanden bleibt deshalb (wenn nicht zufällig ein Zähler durch Null geht) bei den Frequenzen ω_k erhalten. Mit anderen Worten: die Abweichungen vom Regelwert des Wellen-



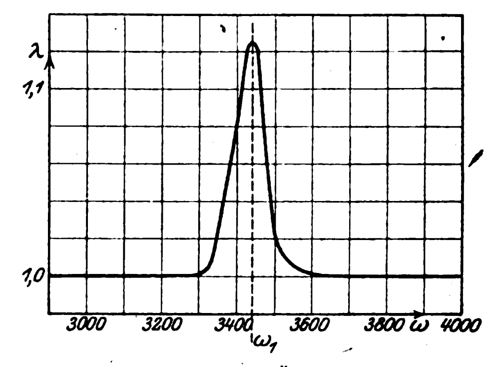


Bild 18. Schwankungen des Wellenwiderstandes, herrührend von der Änderung der Spuleninduktivität mit der Stromstärke.

a) Verlauf des Wellenwiderstandes im ganzen Frequenzbereich unterhalb ω_0.

b) Verlauf des Wellenwiderstandes an der kritischen Frequenz ω_1, in größerem Maßstabe dargestellt.

widerstandes können sich im Bereiche einer Eigenfrequenz nur nach einer Richtung erstrecken. Die Gleichung (27) sagt darüber noch mehr aus: die Größen χ und ξ sind reell; unbekümmert um ihr Vorzeichen wird also der Betrag von λ immer größer als 1 sein, d. h. die hier behandelte Eigenschaft der Pupinspule bewirkt im Bereiche einer Frequenzstelle ω_k immer eine Vergrößerung des Wellenwiderstandes. Dadurch entsteht ein zweiter Elementartyp der Abweichungen, dessen charakteristische Form die bei den gemessenen Werten des Wellenwiderstandes in Bild 7 festgestellten Unstimmigkeiten erklärt. Da die im Aufbau liegenden Ungleichmäßigkeiten hier weitgehend vermindert waren, machte sich die in der Stromverteilung begründete Störung besonders bemerkbar. Im allgemeinen werden natürlich die Unregelmäßigkeiten des Wellenwiderstandes teils von den Unregelmäßigkeiten im Aufbau, teils von der Abhängigkeit der Spuleninduktivität von der Stromstärke herrühren; es erscheinen dann beide Arten von Grundformen nebeneinander, die zuletzt genannte wird jedoch meist gegen die andere zurücktreten.

VII. Einfluß des Widerstandes und der Dämpfung.

18. Bisher haben wir die Verluste in der Leitung vernachlässigt. Diese bewirken bekanntlich, daß die Fortpflanzungskonstante γ nicht mehr rein imaginär ist, sondern noch einen reellen Bestandteil β besitzt, der die Abnahme der Energie längs der Leitung, die Dämpfung, bestimmt und deshalb Dämpfungsexponent genannt wird. Infolgedessen sind auch die Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Cof}\, N\gamma$ und $\mathfrak{Sin}\, N\gamma$ nunmehr komplexe Größen:

$$\mathfrak{Cof}\, N\gamma = \mathfrak{Cof}\,(N\beta + i N\alpha) = \mathfrak{Cof}\, N\beta \cos N\alpha + i\, \mathfrak{Sin}\, N\beta \sin N\alpha$$
$$\mathfrak{Sin}\, N\gamma = \mathfrak{Sin}\,(N\beta + i N\alpha) = i\, \mathfrak{Cof}\, N\beta \sin N\alpha + \mathfrak{Sin}\, N\beta \cos N\alpha.$$

Ist $N\beta$ noch klein, so kann man angenähert setzen

$$\mathfrak{Cof}\, N\gamma = \cos N\alpha + i N\beta \sin N\alpha$$
$$\mathfrak{Sin}\, N\gamma = i \sin N\alpha + N\beta \cos N\alpha.$$

Diese Funktionen werden in ihrem Hauptteil $\cos N\alpha$ bzw. $i \sin N\alpha$ für gewisse α zu Null; es bestimmen diese α nach Abschnitt IV wieder[1]) die Eigenfrequenzen des Kettenleiters. Bei diesen Frequenzen besteht aber dann noch die andere Komponente $i N\beta$ bzw. $N\beta$, die, wie man sieht, um so größer wird, je größer der Dämpfungsexponent ist. Da die Wirkung der Ungleichmäßigkeiten in der Leitung gerade wegen der Kleinheit des $\mathfrak{Cof}\, N\gamma$ und $\mathfrak{Sin}\, N\gamma$ bei den Eigenfrequenzen hervortritt, läßt sich leicht einsehen, daß eine Vergrößerung des Dämpfungsexponenten eine Verminderung der Abweichungen herbeiführen muß. Von den

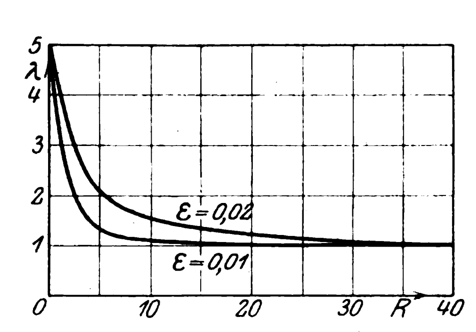


Bild 19. Schwankung des Wellenwiderstandes an einer kritischen Frequenzstelle, abhängig von der Dämpfung durch den Widerstand.

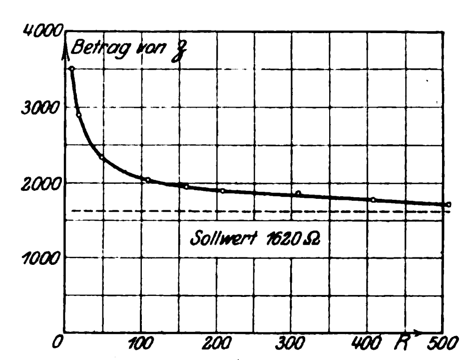


Bild 20. Gemessene Schwankung des Wellenwiderstandes an der kritischen Frequenzstelle ω_5 einer viergliedrigen Leitung, deren erstes Glied eine um 25% zu hohe Induktivität hat, für verschiedene Widerstandswerte.

Verlusten kommt in der Hauptsache die Stromwärme in Betracht, während die dielektrischen Verluste einen geringeren Einfluß haben. Die Tafel 6, die durch Abb. 19 verbildlicht ist, gibt deshalb zur Veranschaulichung des Einflusses der Dämpfung die nach Gleichung (10) berechneten Werte von λ in Abhängigkeit vom Widerstand R für den in Abschnitt V behandelten Fall des 4-gliedrigen Kabels bei $\omega_k = 7500$ und einer Abweichung $\varepsilon = 0{,}01$ und $0{,}02$ in der Induktivität des 3. Gliedes ($n = 2$). Die letzte Spalte der Tafel 6 gibt die Dämpfung eines Leitungsgliedes an. Diese Zahlen sind im Hinblick auf das im VIII. Abschnitt Ausgeführte von Bedeutung.

Der rasche Abfall der Kurven ist sehr bemerkenswert; von etwa $R = 30\,\Omega$ ab ist die Abweichung vom Werte 1 nur noch als klein zu bezeichnen.

Eine solche experimentell ermittelte Kurve zeigt Abb. 20. Sie wurde an einer 4-gliedrigen Leitung aufgenommen, bei der die Induktivität des 1. Gliedes um 25% vom normalen Wert 0,2 Henry der anderen Spulen abwich. Die Frequenz war $\omega_k = 7500$ entsprechend $k = 5$. Man sieht, wie sich der Wellenwiderstand mit wachsendem R anfangs schnell, dann langsamer seinem Sollwert zu nähert.

Bei sehr langen Leitungen bewirkt die Dämpfung, daß Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand einander nahezu gleich werden. Ein Beobachter, der am Anfange einer solchen Spulenleitung Widerstandsmessungen anstellt, wird es deshalb nicht bemerken, wenn man vom Ende der Leitung Glieder abschaltet. Erst wenn die Gliederzahl unter eine gewisse Grenze sinkt, die durch die Meßgenauigkeit bestimmt

[1]) Aber hier nur angenähert.

ist, werden die Meßergebnisse von denen der ganzen Leitung abweichen. Diese Gliederzahl ist daher auch maßgebend für die hier betrachteten Abweichungen im Wellenwiderstand, und von erheblichem Einfluß auf die Unregelmäßigkeiten ist bei einer langen Leitung nur eine Reihe von Gliedern am Anfange; darüber wird im Abschnitt VIII noch einiges zu sagen sein.

Tafel 6.

R in Ω	$\lambda = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}}$		$\beta_s = \frac{R}{2Z}$
	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0{,}02$	
0	5,10	5,10	0
4	1,43	1,93	$2{,}26 \cdot 10^{-3}$
5	1,30	1,74	$2{,}85 \cdot 10^{-3}$
6	1,24	1,61	$3{,}42 \cdot 10^{-3}$
8	1,16	1,43	$4{,}55 \cdot 10^{-3}$
10	1,11	1,32	$5{,}7 \cdot 10^{-3}$
20	1,03	1,11	$11{,}4 \cdot 10^{-3}$
30	1,015	1,055	$17{,}1 \cdot 10^{-3}$
40	1,008	1,04	$22{,}6 \cdot 10^{-3}$
50	1,005	1,02	$28{,}5 \cdot 10^{-3}$
80	1,002	1,01	$45{,}5 \cdot 10^{-3}$

19. Leitungen mit großer Dämpfung. Der Fall, daß das Produkt $N\beta$ groß ist, macht noch eine kleine weitere Betrachtung erforderlich. Aus der am Anfange dieses Abschnittes angestellten Überlegung könnte man schließen, daß dann der Einfluß der Unregelmäßigkeiten überhaupt unmerklich werden würde. Wie hier die Dinge indessen liegen, werden wir aus den für die Faktoren λ gewonnenen Beziehungen (14) und (16) ersehen können. Man muß dabei von der folgenden Näherungsformel für die Hyperbelfunktionen Gebrauch machen

$$\mathfrak{Sin}\, x \approx \mathfrak{Cof}\, x \approx \frac{1}{2} e^{x},$$

die für große x ($|x| > 2{,}5$) genügend genau ist. Dann wird

$$\lambda_L = 1 + 2\,\varepsilon \frac{e^{(2n+1)\gamma}}{e^{2N\gamma}} \mathfrak{Tg} \frac{1}{2}\gamma$$

und, da

$$N = n + m + 1,$$

$$\lambda_L = 1 + 2\,\varepsilon\, e^{-(2m+1)\gamma} \mathfrak{Tg} \frac{1}{2}\gamma.$$

Wenn man

$$\gamma = i\alpha + \beta$$

und

$$p_L = 2\, e^{-(2m+1)\beta} \mathfrak{Tg} \frac{1}{2}\gamma \tag{28}$$

setzt, erhält man

$$\lambda_L = 1 + \varepsilon p_L \cos(2m+1)\alpha - i\,\varepsilon p_L \sin(2m+1)\alpha. \tag{29}$$

Ganz ähnlich ergibt sich auch

$$\lambda_C = 1 + \delta p_C \cos 2m\alpha - i\,\delta p_C \sin 2m\alpha \tag{30}$$

mit



$$p_C = -2 e^{-2m\beta} \mathfrak{Tg} \frac{1}{2} \gamma \qquad (31)$$

und

$$m = N - n.$$

Es wird also hier durch eine Abweichung in der Induktivität oder Kapazität eine solche im Wellenwiderstand gleicher Größenordnung verursacht. Die Schwankungen im Betrag und in der Phase des Wellenwiderstandes sind dabei für kleine Unstimmigkeiten sinusförmig. Es ist bemerkenswert, daß ihre Zahl abhängig ist von der Lage der betreffenden Abweichung. Findet sich daher in einer Spulenleitung eine Unstimmigkeit, deren Einfluß auf den Wellenwiderstand den der übrigen übertrifft, so werden sich aus dem Verlauf des Wellenwiderstandes Schlüsse ziehen lassen auf den Ort des Fehlers.

20. Ermittlung der Lage einer groben Abweichung aus den beobachteten Schwankungen im Wellenwiderstand. Kennzeichnet man diejenigen Frequenzen ω und Winkelmaße α, bei denen etwa der Betrag des Wellenwiderstandes mit seinem Sollwert übereinstimmt, durch den Zeiger r, so findet man aus Gleichung (29), daß die Beziehung besteht

$$\alpha_{r+1} - \alpha_r = \frac{\pi}{2m+1},$$

oder

$$m = \frac{\pi}{2(\alpha_{r+1} - \alpha_r)} - \frac{1}{2} \qquad (32)$$

und für abweichende Kapazität

$$m = \frac{\pi}{2(\alpha_{r+1} - \alpha_r)}. \qquad (33)$$

Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich ein Anhaltspunkt für die Bestimmung der ungefähren Lage des Fehlers gewinnen. Die Winkel α_r hängen mit den aus der Messung zu entnehmenden Frequenzen ω_r durch die Gleichung (20) zusammen.

Dieser interessante Umstand gab Veranlassung zur Ausführung der durch die Bilder 21a—21f dargestellten Versuchsreihe. Es handelt sich hier um die Versuchsleitung mit 100 Gliedern ($L = 0{,}2$ H, $C = 0{,}26\,\mu$F, $\omega_0 = 8770$); der Ohmsche Widerstand R war auf 59 Ω für ein Glied erhöht worden, was eine Gesamtdämpfung von $\beta N = 3{,}9$ ergibt. Die Abweichungen in den elektrischen Konstanten der einzelnen Glieder betrugen für die Kapazität $\pm 5\%$, für die Induktivität $\pm 2{,}5\%$. Bild 21a zeigt den Verlauf des Wellenwiderstandes dieser Leitung (Betrag und Tangente des Phasenwinkels), der hier gleich dem Scheinwiderstande gesetzt werden kann. Es wurde nun eine einzige Abweichung der Induktivität von -36% ($\varepsilon = -0{,}36$) in die Leitung gebracht, und zwar nacheinander an verschiedenen Stellen. Auf diese Weise entstanden die Bilder 21b—25f. Im Bild 21b betraf die Abweichung die 4. Spule, in Bild 21c die 10., im Bild 21d die 16., im Bild 21d die 29. und im Bild 21f die 50. Spule; die Dämpfungszahlen des Stückes zwischen Anfang der Leitung und dem abweichenden Glied sind dabei $m\beta = 0{,}12$ bezw. 0,35, 0,59, 1,1 und 1,93. Man sieht zunächst, wie der Einfluß der Abweichung immer mehr verschwindet, je weiter das fehlerhafte Glied vom Anfang wegwandert. Es rührt das von dem vorhin eingeführten Faktor p her, der mit $e^{-2m\beta}$ kleiner wird. Weiterhin läßt sich an Hand der Bilder 21b und 21c das oben angedeutete Verfahren zur Feststellung des Fehlerortes nachprüfen, denn hier überragt offensichtlich der Einfluß des großen Fehlers den der anderen bedeutend.

Aus Bild 21b gehen beispielsweise für ω_r die Frequenzen $\omega_1 = 3900$ und $\omega_2 = 5600$ hervor. Dazu gehören nach Gleichung (20) die Werte $\sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{3900}{8770} = 0{,}445$ und $\sin\frac{\alpha_2}{2} = 0{,}638$;



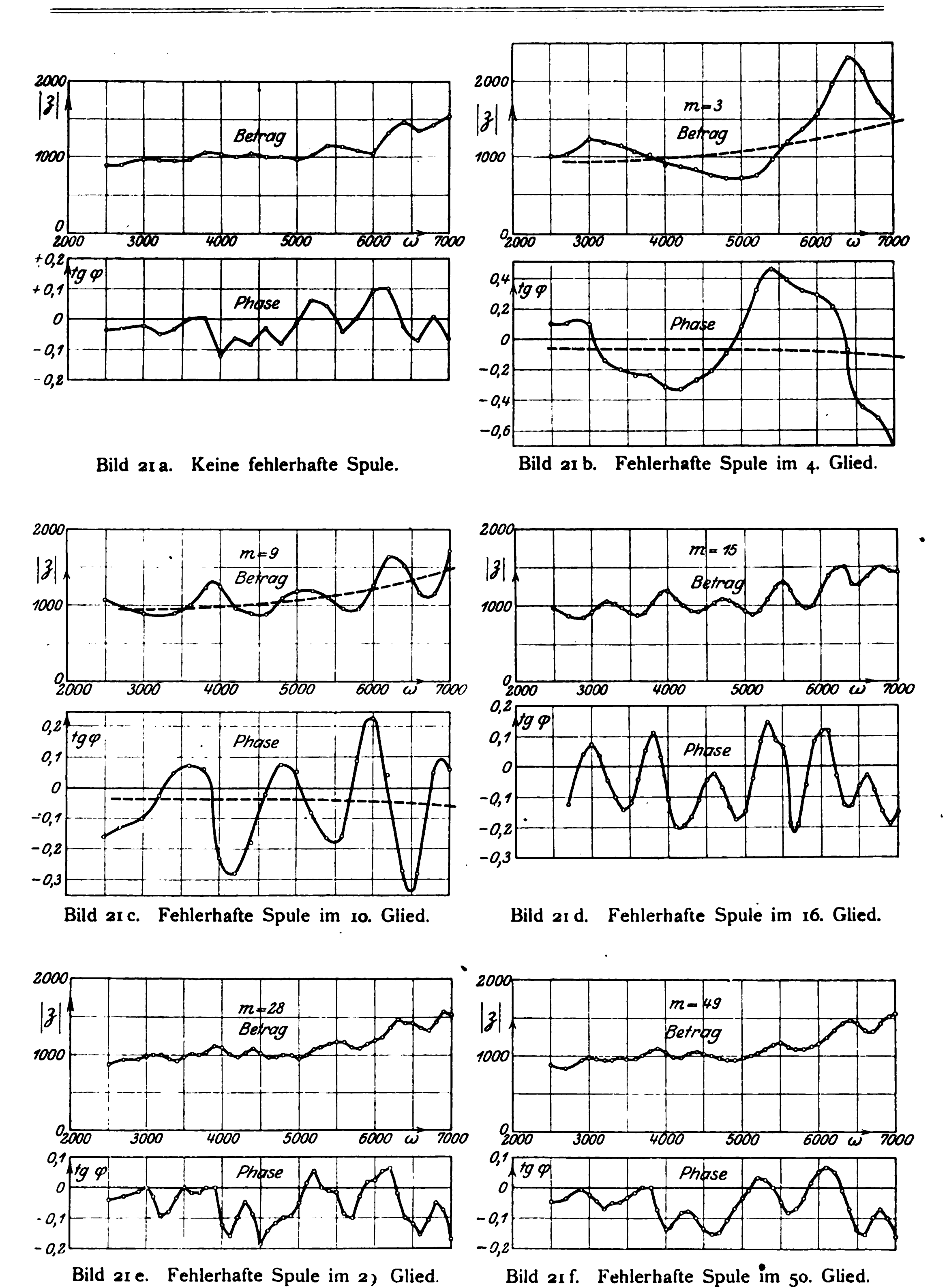


Bild 21a. Keine fehlerhafte Spule.

Bild 21b. Fehlerhafte Spule im 4. Glied.

Bild 21c. Fehlerhafte Spule im 10. Glied.

Bild 21d. Fehlerhafte Spule im 16. Glied.

Bild 21e. Fehlerhafte Spule im 29 Glied.

Bild 21f. Fehlerhafte Spule im 50. Glied.

Bild 21a—21f. Wellenwiderstand einer langen Leitung (β N = 3,9), Einfluß der Lage einer einzigen größeren Abweichung (Spule mit um 36% zu kleiner Induktivität).

$$\frac{\alpha_1}{2} = 26{,}5^0; \quad \frac{\alpha_2}{2} = 39{,}6^0.$$

Damit wird nach Gleichung (32)

$$m = \frac{90}{2 \cdot 13{,}1} - 0{,}5 = 2{,}93.$$

Der genaue Wert ist m = 3.
Aus Bild 21c ergibt sich

ω_r	$\frac{\omega_r}{\omega_0}$	$\frac{\alpha_r}{2}$ (Grad)	$\frac{\alpha_r}{2} - \frac{\alpha_{r-1}}{2}$
2840	0,324	18,9	—
3560	0,406	24,0	5,1
4160	0,475	28,4	4,4
4760	0,543	32,9	4,5
5380	0,613	37,9	5,0
5980	0,681	43,0	5,1
6500	0,741	47,9	4,9
6920	0,789	52,1	5,2

Als Mittelwert erhält man

$$\frac{\alpha_r}{2} - \frac{\alpha_{r-1}}{2} = \frac{52{,}1 - 18{,}9}{7} = 4{,}75^0.$$

Daher wird

$$m = \frac{90}{2 \cdot 4{,}75} - 0{,}5 = 8{,}98.$$

Der genaue Wert ist m = 9.

Man sieht, daß dieses Verfahren sich zur Feststellung einzelner grober Fehler gut eignet. Es ist nicht nur bei Leitungen großer Dämpfung anwendbar, sondern, wie man leicht erkennen kann, auch bei Leitungen mit geringerer Dämpfung dann, wenn das Leitungsende durch einen Apparat abgeschlossen ist, dessen Scheinwiderstand angenähert gleich dem Wellenwiderstand der Leitung ist.

Damit ist die Ursache und das Wesen der eigenartigen Störungen im Wellenwiderstand vollständig aufgeklärt. Die gewonnene Einsicht wird uns in die Lage setzen, Mittel und Wege zur Verbesserung der Leitungen anzugeben.

VIII. Wege zur Verbesserung.

21. Die zu lösende praktische Aufgabe. Nach den Darlegungen im Abschnitt IV über die Herkunft der Störungen ist das gegebene Mittel zur Verbesserung das möglichst genaue Abgleichen sämtlicher Glieder der Leitung. Damit dieser Weg auch tatsächlich zu dem erstrebten Ziele führe, muß man nach den Ausführungen im Abschnitt V Spulen verwenden, deren Induktivität in dem Bereiche der Betriebsstromstärken möglichst konstant ist. Da indessen die störenden Ungleichheiten an sich verhältnismäßig klein sind und andererseits die Abgleichung niemals vollständig, sondern immer nur bis zu einer gewissen Grenze durchgeführt werden kann, liegt die praktische Schwierigkeit der zu lösenden Aufgabe darin, wie weit man mit der Abgleichung gehen soll. Man wird die Abgleichung zweckmäßig nur so weit treiben, daß die Schwankungen im Wellenwiderstand auf ein für den Betrieb, für den die Leitung dient, unschädliches Maß herabgesetzt werden. Eine noch genauere Abgleichung würde unwirtschaftlich sein, da die für die Abgleichung aufzuwendenden Mittel mit der verlangten Genauigkeit unverhältnismäßig schnell anwachsen.



22. Vorkommende Abweichungen der Induktivität der Spulen und der Kapazität der Kabel. Einen Überblick über die praktisch vorkommenden Ungleichmäßigkeiten, die durch die Art der Herstellung der Kabel und Spulen bedingt sind, gibt Tafel 7. Spalte I ist nach Kapazitätsmessungen an einem Probekabel üblicher Bauart berechnet und gibt also die durch die Fabrikation bedingten Abweichungen. Spalte II gibt für normale Pupinspulen die Abweichungen der Induktivität vom Sollwert. Da nach den Bestimmungen der Reichstelegraphen-Verwaltung Spulen mit mehr als $\pm 5\%$ Abweichung nicht abgenommen werden, enthält die Tafel keine höheren Werte.

Tafel 7.

I. Kapazität	$100\,\delta$	unter ± 0,5	± 0,5 bis ± 1	± 1 bis ± 2	± 2 bis ± 3	± 3 bis ± 4	± 4 bis ± 5	± 5 bis ± 6	über ± 6
	Häufigkeit des Vorkommens in %	14	17	27	24	9	3	3	3
II. Induktivität	$100\,\varepsilon$	unter ± 0,5	± 0,5 bis ± 1	± 1 bis ± 2	± 2 bis ± 3	± 3 bis ± 4	± 4 bis ± 5	± 5 bis ± 6	über ± 6
	Häufigkeit des Vorkommens in %	13	17	42	20	6	2	—	—

23. Vorkommende Dämpfungszahlen. Nach den Ausführungen im Abschnitt VII hängt der Einfluß der Unregelmäßigkeiten auf den Wellenwiderstand von der Höhe der Dämpfung ab. Die folgende Tafel 8 gibt die Dämpfungszahlen für ein Leitungsglied für verschiedene Arten von Spulenleitungen an. s bedeutet den Spulenabstand; er ist bei den oberirdischen Leitungen für eine Spuleninduktivität von 0,2 Henry so berechnet, daß die Grenzfrequenz $\omega_0 = 16000$ wird. Beim Kabel ist $s = 1,7$ km (entsprechend den Verhältnissen beim Fernkabel Berlin-Hannover) angenommen. Der Spulenwiderstand beträgt durchweg 9 Ohm. Die Dämpfungszahl ist

$$\beta_s = \frac{R_s}{2Z} + \frac{G_s Z}{2},$$

wobei R_s den gesamten (Leitungs- + Spulen-) Widerstand eines Gliedes, G_s die gesamte Ableitung eines Gliedes bedeuten. Für die oberirdischen Leitungen ist $G_s = 0$ angenommen; für das Kabel ist G_s aus der Beziehung

$$G_s = \omega\, C_s \operatorname{tg} \Theta$$

berechnet; der dielektrische Leistungsfaktor $\operatorname{tg} \Theta$ beträgt für das Fernkabel $2,7 \cdot 10^{-3}$.

Tafel 8.

Leitungsart	Leiterdurchmesser mm	Kapazität in $\frac{m\mu F}{km}$	s in km	Z Ohm	R_s Ohm	G_s μS	$1000\,\beta_s$
Oberirdische Leitung	2	5,25	14,9	1600	172	0	53,8
	3	5,70	13,7	1600	75,7	0	23,6
	4	6,03	12,9	1600	44,3	0	13,8
	5	6,34	12,6	1580	31,2	0	9,9
Fernkabel	2	37	1,7	1780	27,7	1,07	8,7
	3	44,5	1,7	1600	17,3	1,28	6,4

24. Das Versuchskabel. Die im Folgenden angeführten Versuche an dem bereits beschriebenen Versuchskabel sind mit 9, 19 und 50 Ohm Widerstand im Glied gemacht worden. Dem entsprechen die in der Tafel 9 angegebenen Dämpfungszahlen.

Für das Versuchskabel ergibt sich die Ableitung eines Gliedes, da der Leistungsfaktor der Kondensatoren 0,01 beträgt, für die Kreisfrequenz $\omega = 5000$ zu

$$G_s = 5000 \cdot 0{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}01 = 13\,\mu S.$$

Der Wellenwiderstand ist

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}26 \cdot 10^{-6}}} = 877 \text{ Ohm}.$$

Der Beitrag der Ableitung zur Dämpfung ist demnach

$$\beta_g = \frac{1}{2} G_s Z = 5{,}7 \cdot 10^{-3}.$$

Fügt man die vom Widerstand herrührende Dämpfung (Tafel 6, letzte Spalte) hinzu, so erhält man die Zahlen in Tafel 9.

Die Versuchsleitung mit 9 Ohm im Glied entspricht ungefähr dem Fernkabel oder einer starkdrähtigen oberirdischen Bronzeleitung; bei 19 Ohm im Glied entspricht sie etwa einer oberirdischen Bronzeleitung mit mittelstarken Drähten, bei 50 Ohm im Glied einer solchen mit dünnen Drähten.

Tafel 9.
Dämpfungszahlen für ein Glied der Versuchsleitung.

Widerstand eines Gliedes in Ohm	$1000\ \beta_s$
9	10,8
19	16,5
50	34,2

25. Regel für die Abgleichung. Kapazität und Induktivität der einzelnen Glieder der 100-gliedrigen Versuchsleitung wurden nunmehr so abgeglichen, daß die Einzelwerte um höchstens $\pm\delta$% bzw. $\pm\varepsilon$% von dem Mittelwert abwichen. Dann wurde jedesmal der Verlauf des Wellenwiderstandes bei veränderlicher Frequenz gemessen. Dies wurde bei verschiedenen Glieddämpfungen ausgeführt. Aus zahlreichen Versuchsreihen, von denen wir hier nur die bemerkenswertesten anführen wollen, haben sich gewisse Grenzwerte ε und δ ergeben, bis zu denen man die Genauigkeit der Abgleichung treiben muß, wenn die Schwankungen des Wellenwiderstandes in erträglichen Grenzen bleiben sollen. Die erhaltenen Werte stimmen mit den nach Abschnitt VII theoretisch zu erwartenden überein.

Als einen guten praktischen Mittelwert für die vorkommenden Leitungsarten empfehlen wir

die Spuleninduktivitäten bis auf $\varepsilon = \pm 2$%,
die Kapazitäten der Zwischenstücke bis auf $\delta = \pm 1{,}5$%

abzugleichen. Für Leitungen mit einer Dämpfung von 0,01 und weniger im Gliede wird man womöglich noch etwas genauer abgleichen, bei einer Glieddämpfung über 0,03 können etwas größere Ungleichförmigkeiten zugelassen werden. Die folgenden Kurven mögen veranschaulichen, was sich durch die Abgleichung der Konstanten erreichen läßt.

26. Bestätigung durch Versuche. Bild 22 zeigt den Verlauf des Wellenwiderstandes der 100-gliedrigen Leitung bei 9 Ohm Widerstand im Glied, Bild 23 bei 19 Ohm Widerstand im Glied. Induktivitäten und Kapazitäten sind gemäß der soeben angegebenen Regel abgeglichen.

Bemerkenswert ist die durch Bild 24 veranschaulichte Versuchsreihe. Es war

$$R_s = 9 \text{ Ohm}, \qquad \varepsilon = \pm 2\,\%,$$

wie vorher, dagegen waren Schwankungen in der Kapazität bis $\delta = \pm 5$% zugelassen, die in der aus dem Bild ersichtlichen Weise über die Leitung verteilt waren.

Das Bild zeigt deutlich, daß Unregelmäßigkeiten von ± 5 %, die man bisher unbedenklich zugelassen hat, bereits bedeutende Schwankungen im Wellenwiderstand

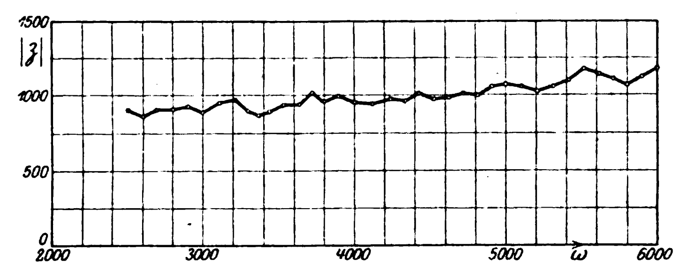


Bild 22. Wellenwiderstand einer regelrecht abgeglichenen 100gliedrigen Spulenleitung mit der Glieddämpfung $\beta_s = 0{,}0108$.

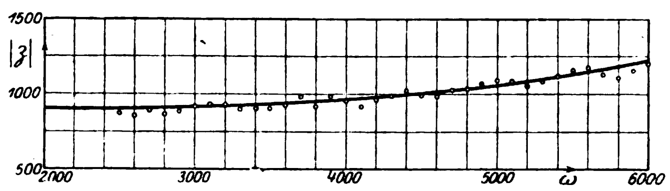


Bild 23. Wellenwiderstand einer regelrecht abgeglichenen 100gliedrigen Spulenleitung mit der Glieddämpfung $\beta_s = 0{,}0165$.

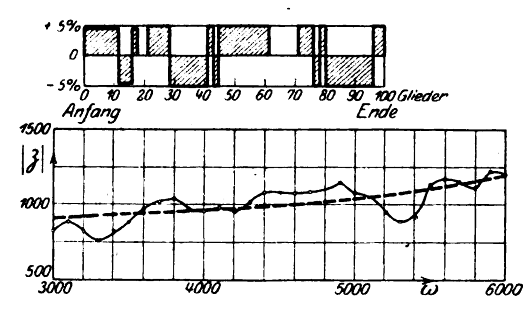


Bild 24. Wellenwiderstand einer 100gliedrigen Spulenleitung mit der Glieddämpfung $\beta_s = 0{,}0108$, deren Induktivitäten auf ± 2 %, deren Kapazitäten auf ± 5 % abgeglichen sind.

hervorrufen. Diese werden noch größer, wenn auch die Spuleninduktivitäten noch bis ± 5 % um ihren Sollwert schwanken. Daß Abweichungen dieser Größe auch bei Leitungen mit höherer Glieddämpfung noch erheblich stören, zeigte schon Bild 21a im Abschnitt VII.

In der vorher angegebenen Abgleichungsregel sind die zulässigen Kapazitätsschwankungen δ kleiner als die Induktivitätsschwankungen ε angenommen. Der Grund ist ein rein praktischer. Die Abgleichung der Spulen muß schon bei ihrer Herstellung vorgenommen werden. Damit die Kosten der Spulen nicht unerschwinglich wachsen, muß man sich hinsichtlich der Anforderungen an ihre Genauigkeit möglichst beschränken.

27. Kapazitätsausgleich an fertiggestellten Leitungen durch Zusatzkapazitäten. Die Kapazitäten der Spulen-Zwischenstücke lassen sich auch an der fertiggestellten Leitung noch ausgleichen, wenn man kleine Zusatzkapazitäten verwendet, die man zweckmäßig an den Spulenpunkten einbaut, ähnlich wie es bereits zum Ausgleich der gegenseitigen Kapazitäten verschiedener Doppelleitungen zwecks Begrenzung des Mit- und Übersprechens geschieht. Auf diesem Wege kann man die Kapazitäten beliebig genau ausgleichen.

28. Spulen mit geringer Stromabhängigkeit. Damit der Ausgleich auch wirklich den gewünschten Erfolg habe, muß man, wie bereits erwähnt und im Abschnitt V begründet ist, Spulen benutzen, deren Induktivität im Bereich der Gebrauchsstromstärken sich möglichst wenig ändert. Daß es möglich ist, solche Spulen auch mit Eisenkern herzustellen, lehrt die folgende Tafel 10. Sie gibt die Induktionswerte zweier verschiedener Spulenformen der Firma Siemens & Halske.



Tafel 10.
Pupinspulen, deren Induktivität sich mit der Stromstärke nur wenig ändert.

Stromstärke in m A	Induktivität in Henry	
	große Spule	kleine Spule
0,5	0,15031	0,15072
1,0	039	108
1,5	048	135
2,0	057	157
2,5	066	178
3,0	075	199
3,5	084	220
4,0	093	238
4,5	102	256
5,0	111	272
Zunahme	0,53%	1,3%

29. Bedeutung des Leitungsanfanges. Da der Wellenwiderstand einer Leitung hauptsächlich von der Beschaffenheit des Anfangs der Leitung abhängt und der Einfluß der Glieder mit wachsender Entfernung vom Leitungsanfang abnimmt, braucht man bei einer langen Leitung nicht sämtliche Glieder abzugleichen. Es genügt, wenn man die Abgleichung gemäß der vorher angegebenen Regel, vom Anfang der Leitung ausgehend, bis zu einem Punkt mit dem Dämpfungsmaß von ungefähr 0,3 vornimmt und darüber hinaus die doppelten Abweichungen zuläßt. Über das Dämpfungsmaß 1 hinaus braucht man überhaupt nicht abzugleichen, sofern grobe Unstimmigkeiten vermieden sind. Daß solche selbst in der Entfernung $\beta l = 1,5$ noch merklich sind, zeigt das Bild 25. Es bezieht sich auf die 100-gliedrige Leitung mit 19 Ohm Widerstand im Gliede; sie war durchweg mit der Genauigkeit $\varepsilon = \pm 2\%$, $\delta = \pm 1,5\%$ abgeglichen, jedoch war die Induktivität der 81-ten Spule um 50% zu klein.

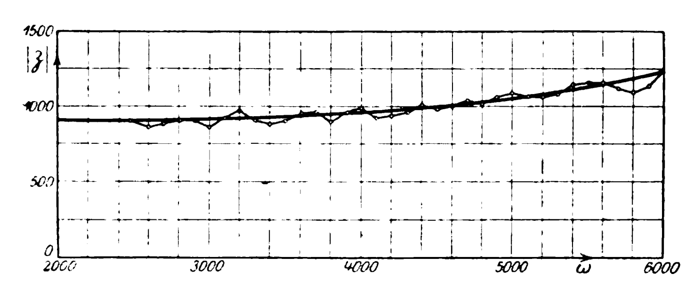


Bild 25. Wellenwiderstand einer regelrecht abgeglichenen 100gliedrigen Spulenleitung mit der Glieddämpfung $\beta_s = 0,0165$ und einer groben Abweichung im 81. Glied ($\beta l = 1,5$).

Man kann sich die Abgleichung dadurch erleichtern, daß man die Dämpfung der ersten Glieder durch Einschalten von Widerstand absichtlich erhöht. Die dadurch eingebüßte Lautstärke kann man mit der nunmehr möglichen höheren Verstärkung wieder herausholen. Bild 26 zeigt den Wellenwiderstand unserer auf

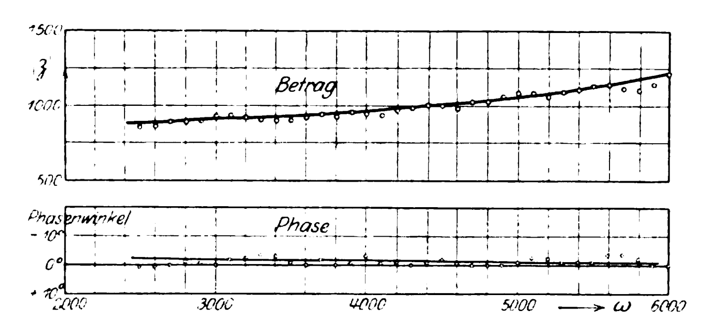


Bild 26. Wellenwiderstand einer regelrecht abgeglichenen 100gliedrigen Spulenleitung mit erhöhter Dämpfung in den Anfangsgliedern (in den ersten 10 Gliedern $\beta_s = 0,0342$, in den übrigen Gliedern $\beta_s = 0,0165$).

$\varepsilon = \pm 2\,\%$, $\delta = \pm 1{,}5\,\%$ abgeglichenen 100-gliedrigen Versuchsleitung mit 50 Ohm Widerstand in den ersten 10 Gliedern und 19 Ohm Widerstand in den übrigen 90 Gliedern. Man bemerkt beim Vergleich mit den vorher gezeigten Kurven eine weitere Glättung des Verlaufs der Kurve. Der Gewinn ist durch einen Dämpfungszuwachs von $\beta l = 0{,}23$ erkauft.

IX. Zusammenfassung.

Der Wellenwiderstand von Spulenleitungen zeigt in seiner Abhängigkeit von der Frequenz erhebliche Abweichungen von seinem durch die Theorie dieser Leitungen vorgeschriebenen Verlauf. Für Verstärkerschaltungen in der Fernsprechtechnik und im Gegensprechbetrieb der Telegraphie ist es erforderlich, den Wellenwiderstand der betreffenden Leitungen möglichst genau nachzubilden. Dabei sind die erwähnten Abweichungen unerwünscht und störend. Ihre Ursache aufzuklären und Mittel zu ihrer Beseitigung zu finden, war das Ziel der im Telegraphentechnischen Reichsamt hierüber angestellten systematischen Untersuchung. Es ergab sich, daß Verschiedenheiten in den elektrischen Konstanten der aus Spule und Leitungsabschnitt gebildeten Glieder der Leitung die Ursache der Abweichungen sind, und zwar können schon durch ganz geringe Ungleichförmigkeiten ansehnliche Abweichungen im Wellenwiderstand hervorgerufen werden. Die Ungleichförmigkeiten beruhen zum Teil auf fabrikationstechnischen Ungenauigkeiten in der Herstellung der Spulen und im Bau der Leitungen, zum Teil auf der Abhängigkeit der Induktivität der Pupinspulen von der Stromstärke.

Die Ergebnisse von Messungen an wirklichen und künstlichen Spulenleitungen stehen im Einklang mit den angestellten Rechnungen und zeigen, daß die Abweichungen im Wellenwiderstand ganz bestimmten Frequenzen (den Eigenfrequenzen der leerlaufenden und der kurzgeschlossenen Spulenleitung) eigentümlich sind. Sie lehren weiterhin, daß es nicht möglich ist, durch eine absichtliche Veränderung nur einzelner Glieder die Unstimmigkeiten zu kompensieren. Es ist vielmehr erforderlich, sämtliche Glieder der Leitung möglichst genau abzugleichen. Des Näheren wird ausgeführt, bis zu welchem Grad der Genauigkeit diese Abgleichung durchzuführen ist, damit die Schwankungen im Wellenwiderstand auf ein für den Betrieb unschädliches Maß herabgesetzt werden, ohne die Abgleichung unwirtschaftlich zu gestalten. Maßgebend für die Genauigkeit ist die Größe der Dämpfung der Leitung. Es wird empfohlen, bei einem Dämpfungsexponenten von etwa 0,02 pro Glied die Spuleninduktivitäten auf etwa $\pm 2\,\%$, die Kapazitäten der Leitungsabschnitte auf etwa $\pm 1{,}5\,\%$ abzugleichen. Bei größerer Dämpfung können etwas größere Ungleichförmigkeiten zugelassen werden, bei geringerer Dämpfung wird man womöglich etwas genauer abgleichen. Verschiedenheiten im Wirkwiderstand sind ohne großen Einfluß auf den Wellenwiderstand, sie brauchen deshalb nicht ausgeglichen zu werden. Eine Reihe von mitgeteilten Versuchsergebnissen veranschaulicht die gute Wirkung der Abgleichung der Induktivitäten und der Kapazitäten. Man wird die Spulen zweckmäßig schon bei ihrer Herstellung abgleichen, insbesondere ist auch Wert darauf zu legen, daß ihre Induktivität möglichst wenig von der Stromstärke abhängt. Zur Abgleichung der Kapazitäten der Leitungsglieder ist es erforderlich, die Spulen in möglichst gleichen Abständen in die Leitung einzubauen. Da dies praktisch nur bis zu einem gewissen Grade möglich ist und da bei unterirdischen Leitungen noch Kapazitätsunterschiede in Betracht kommen, die durch die Fabrikation der Kabel bedingt sind, läßt sich die genauere Ausgleichung durch Zusatzkondensatoren an den Spulenpunkten erzielen. Bei einer langen Leitung genügt es, die Abgleichung nur für eine gewisse Strecke vom Anfang der Leitung aus in der angegebenen Genauigkeit vorzunehmen, darüber hinaus kann man größere Verschiedenheiten zulassen. Eine künstliche Erhöhung der Dämpfung einiger Glieder am Anfang der Leitung wirkt ebenfalls günstig.

Archiv
für
Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Prof. Dr.-Ing. **W. Rogowski**, Aachen
Verlag von Julius Springer in Berlin

IX. Band | **10. März 1921** | **11/12. Heft**

Inhaltsverzeichnis. Seite

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift" nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift" infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden erbeten unter der Adresse: Professor Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen, elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

Das **Archiv für Elektrotechnik** erscheint in Heften, von denen 12 einen Band bilden. Der Preis des Bandes beträgt M. 48,—, für Abonnenten der „Elektrotechnischen Zeitschrift" sowie Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins M. 36,—. Der Bezug kann durch jede Buchhandlung, sowie durch unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer
Berlin W 9, Linkstraße 23/24.

Voranzeige.

In den nächsten Heften des Archivs für Elektrotechnik werden voraussichtlich folgende Arbeiten erscheinen:

Biermanns, Resonanzspannungen des Schwingungskreises mit eisenhaltiger Induktivität.
Biermanns, Ausgleichsvorgänge beim Parallelschalten von Synchrommaschinen.
Fritze, Geräuschbildung bei elektrischen Maschinen.
Grösser, Die Dämpfungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise.
Grösser, Die Frequenzsprünge des Zwischenkreisröhrensenders bei kapazitiver Kopplung.
Jakob, Die Erwärmung stark isolierter Spulen.
Liwschitz, Das Drehmoment und die Gesichtspunkte für den Entwurf der Dämpferwicklung einer Mehrphasensynchrommaschine im Parallelbetrieb.
Ridder, Das Frequenzspektrum mehrlagiger Spulen.
Rogowski, Frequenzsprünge beim Zwischenkreisröhrensender bei beliebiger Mischung primärer und sekundärer Gitterkopplung.
Schumann, Die elektrische Festigkeit der Luft.
Töpler, Die physikalischen Grundgesetze der in der Isolatorentechnik auftretenden elektrischen Gleiterscheinungen.
Wallot, Die Spule bei Hochfrequenz.
Zimmermann, Versuch und Rechnung bei der scheibenförmigen Wirbelstrombremse.

